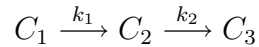


## Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

### Beispiel 5.14 (Chemische Reaktion)

Eine einfache chemische Reaktion laufe nach dem Schema



mit Reaktionsraten  $k_1, k_2 > 0$  ab. Wir bezeichnen mit  $y_1(x)$  die Stoffkonzentration (bzw. Stoffmenge) von  $C_1$  zum Zeitpunkt  $x$ , analog  $y_2(x)$  und  $y_3(x)$ . Für sie gilt

$$y_1'(x) = -k_1 y_1(x),$$

d.h., die Abnahmerate der Stoffmenge ist proportional zur vorhandenen Menge. Die Konzentration von  $C_2$  nimmt aufgrund der ersten Reaktion zu und aufgrund der zweiten ab:

$$y_2'(x) = +k_1 y_1(x) - k_2 y_2(x).$$

Schließlich ändert sich  $C_3$  wie folgt:

$$y_3'(x) = +k_2 y_2(x).$$

Die Reaktionsgleichung lässt sich also kurz schreiben als

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{y}'(x) = A \vec{y}(x).$$

### Beispiel 5.17 (Chemische Reaktion)

Wir lösen das Dgl-System aus Beispiel 5.14 für den Fall  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ , also mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von  $A$  sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \vec{v}_1 &= \alpha (0, 0, 1)^\top \\ \lambda_2 &= -1, & \vec{v}_2 &= \alpha (1, 1, -2)^\top \\ \lambda_3 &= -2, & \vec{v}_3 &= \alpha (0, 1, -1)^\top. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nach Satz 5.16 folgende **allgemeine Lösung** des homogenen Dgl-Systems  $\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x)$ :

$$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^3 c_i e^{\lambda_i x} \vec{v}_i = c_1 e^{0x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

mit  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

Die AB  $\vec{y}(0) = (5, 3, 0)^\top$  wählt aus diesen Lösungen genau eine aus. Einsetzen ergibt:

$$\vec{y}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ein LGS für  $(c_1, c_2, c_3)^\top$ ! Dessen eindeutige Lösung ist hier  $(c_1, c_2, c_3) = (8, 5, -2)$ .

