

## Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

### Beispiel 5.8 (Charakteristisches Polynom)

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -8 & -12 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - [0 + 0 - 8(1-\lambda)] \\ &= [(-2-\lambda)(4-\lambda) + 8](1-\lambda) \\ &= [-8 - 4\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 8](1-\lambda) \\ &= [\lambda^2 - 2\lambda](1-\lambda) \\ &= \lambda(\lambda - 2)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms 3. Grades sind

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

### Beispiel 5.10 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Wir führen das Beispiel 5.8 fort. Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Für die Berechnung der Eigenvektoren lösen wir:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} -2-0 & -8 & -12 & 0 \\ 1 & 4-0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-0 & 0 \end{array} \right) & \text{ hat die allgemeine Lösung } \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} -2-1 & -8 & -12 & 0 \\ 1 & 4-1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 & 0 \end{array} \right) & \text{ hat die allgemeine Lösung } \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \left( \begin{array}{ccc|c} -2-2 & -8 & -12 & 0 \\ 1 & 4-2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 & 0 \end{array} \right) & \text{ hat die allgemeine Lösung } \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Eigenvektoren sind jeweils die Lösungen mit  $\alpha \neq 0$ .