

## Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

Wir untersuchen die lineare inhomogene Dgl mit **harmonischer Anregung**

$$y'(x) = a y(x) + f_1 \sin(\omega x) + f_2 \cos(\omega x)$$

und  $f_1, f_2$  und  $\omega \in \mathbb{R}$  gegeben. Der **Ansatz vom Typ der rechten Seite**

$$y_p(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$$

mit noch unbekanntem Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$  führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} -a & -\omega \\ \omega & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

zur Bestimmung von  $c_1$  und  $c_2$ . Das System ist immer eindeutig lösbar, denn die Determinante der Matrix (vgl. Definition 2.40 und Satz 2.42) ist

$$(-a)^2 - \omega(-\omega) = a^2 + \omega^2 \neq 0.$$

### Beispiel 5.7 (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

Für  $a = -1$  und eine Anregung mit  $f_1 = 0, f_2 = 1$  und Frequenz  $\omega = 2$  ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{5}, \quad c_2 = \frac{1}{5}.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$y(x) = c e^{-x} + \frac{2}{5} \sin(2x) + \frac{1}{5} \cos(2x).$$

Durch die AB  $y(0) = 0,5$  wird die Lösung eindeutig (linkes Bild):

$$y(0) = c + \frac{1}{5} \stackrel{!}{=} 0,5 \Rightarrow c = 0,3.$$

Für die Anregungsfrequenz  $\omega = 10$  bei ansonsten gleichen Daten erhalten wir

$$y(x) = c e^{-x} + 0,0990 \sin(10x) + 0,0099 \cos(10x),$$

und die AB  $y(0) = 0,5$  wählt die eindeutige Lösung mit  $c = 0,4901$  aus (rechtes Bild).

