Über Optimierungsprobleme bei partiellen Differentialgleichungen mit Zustandsbeschränkungen

Arnd Rösch

Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik

Zell im Zillertal, 8. März 2009

Inhalt

Nichtlineare Optimierungsprobleme

Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{bei} \quad g(x) \leq 0$$

Lagrangefunktion

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

$$L_x = f'(x) + \lambda g'(x) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \cdot g(x) = 0$$

Um die Existenz von Lagrangeschen Multiplikatoren λ zu sichern, benötigt man eine Regularitätsbedingung (CQ), z. B. Slater, MFCQ, LICQ, ...

Gegenbeispiel

Optimierungsproblem

$$\min(x+1)^2 \quad \text{bei} \quad x^2 \le 0$$

Natürlich ist die Lösung der einzige zulässige Punkt $x = 0$. Wir finden aber

$$\begin{aligned} L(x,\lambda) &= (x+1)^2 + \lambda x^2 \\ L_x(x,\lambda) &= 2(x+1) + 2\lambda \cdot 0 \\ &= 2 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Folglich existiert für $x = 0$ kein Lagrangescher Multiplikator λ so dass das KKT-System erfüllt ist für die optimale Lösung.

Bemerkung zum Gegenbeispiel

In der Optimierungstheorie (Optimalsteuertheorie) arbeitet man häufig mit linearisierten Problemen. Das heißt, man linearisiert das Problem im optimalen Punkt.

Linearisiertes Problem

$$\min f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{bei} \quad g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \leq 0.$$

Wir finden für unser

Beispiel

$$\min 1 + 2x \quad \text{bei} \quad 0 + 0 \leq 0.$$

Dieses Minimierungsproblem besitzt keine Lösung ! Im besonderen ist die Lösung des nichtlinearen Problems keine Lösung des linearisierten Problems.

Konsequenz: Regularitätsbedingungen sind wichtig !

Optimierungsprobleme in Funktionenräumen I

Wir bemerken zunächst, dass die Fréchet-Differenzierbarkeit von Nemytski-Operatoren im allgemeinen nur in L^∞ gewährleistet ist. Wir wollen uns mit diesem Aspekt nicht weiter beschäftigen ($\rightarrow$ Buch von Fredi Tröltzsch).

Wir diskutieren hier die Slater-Bedingung, d.h. die Existenz eines inneren Punktes.

Theorem

Die Menge der nichtnegativen Funktionen

$$M := \{f \in L^2(0,1),\ f(x) \geq 0 \text{ f.ü.}\}$$

besitzt keinen inneren Punkt .

Wir überprüfen dies nur für $f \equiv 1$ und betrachten

$$f_n = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (0, 1/n) \\ 1 & \text{für } x \in (1/n, 1) \end{cases} \qquad \|f_n - f\|_2 = \sqrt{4/n} \rightarrow 0.$$

Optimierungsprobleme in Funktionenräumen II

In $L^\infty(0,1)$ verändert sich die Situation.

Theorem

Jede Funktion $g \in L^\infty(0,1)$ mit $g(x) \geq \tau > 0$ fast überall ist ein innerer Punkt von

$$M^\infty := \{f \in L^\infty(0,1),\ f(x) \geq 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Beweis: Man nehme eine Kugel B mit Radius $\tau/2$ und Mittelpunkt g. Dann gilt für eine beliebige Funktion $h \in B$:

$$h(x) \geq g(x) - \tau/2 \geq \tau - \tau/2 > 0 \quad \text{a.e.}$$

Damit können wir den Raum $L^\infty(0,1)$ für Optimierungsprobleme verwenden.

Optimierungsprobleme in Funktionenräumen III

Was sind die Konsequenzen der Wahl des Funktionenraumes $X = L^\infty$?

Die Lagrangeschen Multiplikatoren λ sind lineare und stetige Funktionale bezüglich X, d.h., λ gehört zum Dualraum von X. Der Dualraum von L^∞ enthält Funktionen des Raumes L^1 aber auch Maße.

Abstraktes Lagrangefunktional

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle g, \lambda \rangle_{L^\infty,(L^\infty)^*}$$

Probleme

- Existenz und Eindeutigkeit der dualen Variablen
- Regularität von Lösungen
- Hinreichende Optimalitätsbedingungen
- Numerisches Verhalten

Optimalsteuerprobleme mit Steuerbeschränkungen I

Zielfunktional

$$F(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Zustandsgleichung

$$-\Delta y = u \text{ in } \Omega \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma$$

Steuerbeschränkungen

$$u(x) \leq u_b \text{ f.ü.}$$

Optimalsteuerprobleme mit Steuerbeschränkungen II

Lagrangefunktion

$$L(y,u,p,\lambda) = F(y,u) - (\nabla y, \nabla p) + (u,p) + \langle u - u_b, \lambda \rangle$$

Adjungierte Gleichung ($L_y = 0$)

$$-\Delta p = y - y_d \text{ on } \Omega \quad p = 0 \text{ on } \Gamma$$

Damit gehört der adjungierte Zustand zumindest zu H^1.

Optimalitätsbedingung ($L_u = 0$)

$$(p,h) + (\nu u, h) + \langle h, \lambda \rangle = 0 \quad \forall h \in L^\infty(\Omega)$$

Die letzte Gleichung bedeutet

$$-(p + \nu u) = \lambda \quad \text{im Sinne von } (L^\infty)^*.$$

Damit können wir λ mit einer messbaren Funktion identifizieren.

Optimalsteuerprobleme mit Steuerbeschränkungen III

Optimalitätsbedingungen

$$
\begin{aligned}
\langle u - u_b, \lambda \rangle &= 0 \\
\lambda &\geq 0
\end{aligned}
$$

Was heißt $\lambda \geq 0$ in $L^\infty(\Omega)^*$?

Bedeutung von $\lambda \geq 0$

$$\lambda \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle h, \lambda \rangle \geq 0 \quad \forall h \in L^\infty(\Omega),\ h \geq 0 \text{ f.ü.}$$

Da λ eine messbare Funktion ist, kann man kurz schreiben

$$\lambda(x) \geq 0 \quad \text{f.ü.}$$

Optimalsteuerprobleme mit Steuerbeschränkungen IV

Wie sieht es aus mit Existenz und Eindeutigkeit der dualen Variablen ?

Für unsere einseitige Beschränkung ist das trivial nachzuweisen. Aber was passiert bei $u_a \leq u \leq u_b$?

Für die Existenz benötigt man offenbar $u_a \leq u_b$. Setzt man die Multiplikatoren $\lambda_a = (p + \nu u)_+$, $\lambda_b = (p + \nu u)_-$ so erfüllen diese Multiplikatoren alle bedingungen.

Gibt es bei stetigen u_a und u_b einen Punkt x mit $u_a(x) = u_b(x)$ dann sind die Multiplikatoren nicht eindeutig, da man zu beiden Multiplikatoren noch ein Punktmaß addieren kann.

Optimalsteuerprobleme mit gemischten Beschränk. I

Zielfunktional

$$F(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Zustandsgleichung

$$-\Delta y = u \text{ in } \Omega \qquad y = 0 \text{ auf } \Gamma$$

Gemischte Beschränkungen

$$y(x) + u(x) \leq u_b \text{ f.ü.}$$

Optimalsteuerprobleme mit gemischten Beschränk. II

Lagrangefunktion

$$L(y,u,p,\lambda) = F(y,u) - (\nabla y, \nabla p) + (u,p) + \langle u + y - u_b, \lambda \rangle$$

Adjungierte Gleichung ($L_y = 0$) in schwacher Formulierung

$$-(\nabla v, \nabla p) + (y - y_d, v) + \langle v, \lambda \rangle = 0$$

Was bedeutet diese Gleichung ?
Das Funktional

$$\langle v, \lambda \rangle$$

ist nur definiert für $v \in L^\infty(\Omega)$. Damit ist die Forderung $v \in H_0^1$ nicht ausreichend ! Das Funktional ist wohldefiniert für $v \in W_0^{1,s'}$ mit $s' > d$ (d - Dimension von Ω). Damit gehört der adjungierte Zustand p zum Raum $W_0^{1,s}$ mit

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = 1 \quad \Longrightarrow \quad s < \frac{d}{d-1}.$$

Optimalsteuerprobleme mit gemischten Beschränk. III

Optimalitätsbedingung ($L_u = 0$)

$$(p, h) + (\nu u, h) + \langle h, \lambda \rangle = 0 \quad \forall h \in L^\infty(\Omega)$$

Die letzte Gleichung bedeutet

$$-(p + \nu u) = \lambda \quad \text{im Sinne von } (L^\infty)^*.$$

Damit kann λ wieder mit einer messbaren Funktion identifiziert werden.
Wegen $\lambda \in L^2(\Omega)$ kann man die adjungierte Gleichung auch wieder im üblichen schwachen Sinne betrachten.

Optimalsteuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen I

Zielfunktional

$$F(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Zustandsgleichung

$$-\Delta y = u \text{ in } \Omega \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma$$

Zustandsbeschränkungen

$$y(x) \leq y_b \text{ f.ü.}$$

Optimalsteuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen II

Lagrangefunktion

$$L(y, u, p, \lambda) = F(y, u) - (\nabla y, \nabla p) + (u, p) + \langle y - y_b, \lambda \rangle$$

Adjungierte Gleichung ($L_y = 0$) in schwacher Formulierung

$$-(\nabla v, \nabla p) + (y - y_d, v) + \langle v, \lambda \rangle = 0$$

Erneut gehört der adjungierte Zustand p zu $W_0^{1,s}$ mit

$$s < \frac{d}{d-1}.$$

Optimalitätsbedingung ($L_u = 0$)

$$p + \nu u = 0$$

Optimalsteuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen III

Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \langle y - y_b, \lambda \rangle &= 0 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Wir wiederholen die Bedeutung von $\lambda \geq 0$ in $L^\infty(\Omega)^*$:

Bedeutung von $\lambda \geq 0$

$$\lambda \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle h, \lambda \rangle \geq 0 \quad \forall h \in L^\infty(\Omega),\ h \geq 0 \text{ f.ü.}$$

In diesem Fall besitzen wir keine Möglichkeit, zusätzliche Regularität von λ zu zeigen. Damit müssen wir mit $\lambda \in L^\infty(\Omega)^*$ rechnen.

Optimalsteuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen IV

Für die Definition unserer Lagrangefunktion benötigten wir, dass der Zustand y messbar und beschränkt ist. Daher benötigt man für die Existenz Lagrangescher Multiplikatoren:

$$S: \; U \to Y \hookrightarrow L^\infty$$

Die Eindeutigkeit erhält man für unser Beispiel auf folgendem Weg. Aus der Optimalitätsbedingung $p + \nu u = 0$ folgt die Eindeutigkeit von p und aus der adjungierten Gleichung die von λ.

Für Randsteuerprobleme ist das aber schon nicht mehr richtig. Wir erhalten lediglich die Eindeutigkeit der Randwerte von p.

Das Meyer-Prüfert-Tröltzsch-Beispiel

In einer Arbeit von Meyer, Prüfert und Tröltzsch wird ein Beispiel mit einer analytischen Lösung konstruiert mit einem Dirac-Maß als Lagrangescher Multiplikator.

Das Meyer-Prüfert-Tröltzsch-Beispiel

In einer Arbeit von Meyer, Prüfert und Tröltzsch wird ein Beispiel mit einer analytischen Lösung konstruiert mit einem Dirac-Maß als Lagrangescher Multiplikator.

Ist unsere Theorie falsch ?

$$\delta \notin L^{\infty}(\Omega)^{*}$$

Das Meyer-Prüfert-Tröltzsch-Beispiel

In einer Arbeit von Meyer, Prüfert und Tröltzsch wird ein Beispiel mit einer analytischen Lösung konstruiert mit einem Dirac-Maß als Lagrangescher Multiplikator.

Ist unsere Theorie falsch ?

$$\delta \notin L^\infty(\Omega)^*$$

Scheinbar muss entweder das Beipiel oder die Theorie falsch sein. Bei näherem Hinschauen erkennt man jedoch, dass beides seine Richtigkeit hat.

Gehen wir also den Dingen auf den Grund.

Satz von Hahn-Banach

Das Dirac-Maß ist Element des Raumes $C(\bar{\Omega})^*$, d.h. die Funktionalanwendung ist für alle $f \in C(\bar{\Omega})$ sauber definiert. Der Raum $C(\bar{\Omega})$ ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von $L^\infty(\Omega)$.

Satz von Hahn-Banach

Das Dirac-Maß lässt sich zu einem Funktional aus $L^\infty(\Omega)^*$ fortsetzen.

Die Fortsetzung des Funktionals ist nicht eindeutig. Die Art und Weise der Fortsetzung ist aber hier nicht von Belang: Wir verwenden den Lagrange Multiplikator nur in der adjungierten Gleichung. Hier gilt es das duale Produkt mit $v \in W^{1,s'}$ mit $s' > d$ auszuwerten. Dieser Sobolevraum ist aber nicht nur in L^∞ eingebettet, sondern auch in $C(\bar{\Omega})$. Da wir das Dirac-Maß nur auf stetige Funktionen anwenden müssen, spielt also die Art und Weise der Fortsetzung keine Rolle.

Vorzüge der C^*-Darstellung

Wie wir gesehen haben, können wir sowohl $L^\infty(\Omega)^*$ als auch $C(\bar{\Omega})^*$ zur Beschreibung der Lagrangeschen Multiplikatoren verwenden. Je nach beabsichtigten Zweck ist die eine oder die andere Darstellung vorzuziehen. Die Darstellung eines Multiplikators μ in $C(\bar{\Omega})^*$ gestattet folgende Zerlegung:

Zerlegung von μ

$$\mu = \mu_\Gamma + \mu_\Omega.$$

Der Anteil μ_Ω kann als Quelle interpretiert werden, während μ_Γ in der Randbedingung eine Rolle spielt.

Konsequenz: Eine Zustandsbedingung auf Ω wirkt sich auch auf den Rand aus !

Auswirkungen der $(L^\infty)^*$-Darstellung

Die Darstellung in $(L^\infty)^*$ ist theoretisch durchaus nützlich:

Theorem (Hewitt und Yosida 1952)

$$\mu = \mu_{reg} + \mu_{sing}.$$

Der reguläre Anteil kann mit einer messbaren Funktion $\mu_{reg} \in L^1(\Omega)$ identifiziert werden. Der singuläre Anteil ist ein sogenanntes endlich additives Maß. Es gilt

$$\mu \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_{reg} \geq 0, \quad \mu_{sing} \geq 0.$$

Der singuläre Anteil kann wie folgt charakterisiert werden: Es gibt eine Folge von Mengen E_n mit $\mathrm{meas}(E_n) \to 0$ und

$$\int_\Omega f d\mu_{sing} = \int_{E_n} f d\mu_{sing}$$

Das Maß ist also auf einer Menge beliebig kleinen Maßes konzentriert.

Konsequenzen I - Regulärer Fall

- Für Probleme mit Steuer- oder gemischten Beschränkungen können wir messbare Funktionen als Lagrangesche Multiplikatoren erwarten.
- In vielen Fällen ist es möglich nachzuweisen, dass diese Multiplikatoren auch beschränkt sind.
- Abhängig von Gleichung, Gebiet und Regularität der Daten kann man zeigen, dass die optimalen Steuerungen sogar Lipschitz- oder Hölderstetige Funktionen sind.
- Die Regularität der Lösungen erlaubt es hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung (SSC) für nichtlineare Probleme herzuleiten.
- (SSC) ist die Basis für Lipschitzstabilität von Lösungen und die Konvergenzanalysis von schnellen numerischen Verfahren (SQP)

Konsequenzen II - Zustandsbeschränkungen

- Im Fall reiner punktweiser Zustandsbeschränkungen müssen wir mit Maßen als Lagrangesche Multiplikatoren rechnen.
- Der adjungierte Zustand und die optimale Steuerung gehören dann zum Raum $W^{1,s}$ welcher nicht in die Räume stetiger (oder beschränkter) Funktionen eingebettet ist.
- Hinreichende Bedingungen zweiter Ordnung (SSC) sind nur in speziellen Fällen bekannt (elliptisch: siehe Casas/Tröltzsch, parabolisch: siehe Raymond/Tröltzsch). Dabei gibt es Beschränkungen an die Dimension der Ortsgebiete.
- Konvergenzanalysis für zustandsbeschränkte Probleme is de facto unbekannt (aktive-Mengen-Strategien, Innere-Punkte-Verfahren, SQP,...)

Inhalt

Der allgemeine Fall I

Beschränkungen

$$\alpha_i(x) \leq g_i(y(x), u(x), x) \leq \beta_i(x) \quad i = 1, .., K$$

$\alpha_i, \beta_i \in L^\infty(\Omega)$

Erste Voraussetzung

$$D_u g_i(y(x), u(x), x) \geq M > 0$$

Damit werden reine Zustandsbeschränkungen nicht zugelassen.

Der allgemeine Fall II

Sicherheitsmengen

$$M^\sigma_{\alpha_i} := \{x : -\sigma \le g_i(y(x), u(x), x) - \alpha_i \le 0\}$$

$$M^\sigma_{\beta_i} := \{x : -\sigma \le \beta_i - g_i(y(x), u(x), x) \le 0\}$$

Zweite Voraussetzung

$$\exists \sigma : \quad \bigcup_i M^\sigma_{\alpha_i} \cap \bigcup_i M^\sigma_{\beta_i} = \emptyset$$

Untere und obere Schranken sind nicht zur selben Zeit aktiv.

Der allgemeine Fall III

Lemma

Es existiert eine Funktion $h \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$D_u g_i(y(x), u(x), x) h(x) \geq 1 \text{ on } M^\sigma_{\beta_i}$$

$$D_u g_i(y(x), u(x), x) h(x) \leq -1 \text{ on } M^\sigma_{\alpha_i}$$

Theorem (Rösch und Tröltzsch 2007)

Die Lagrangeschen Multiplikatoren zu allen Ungleichungsnebenbedingungen sind messbare und beschränkte Funktionen.

Das Casas-Beispiel I

Zielfunktional

$$F(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Zustandsgleichung

$$-\Delta y = u \text{ in } \Omega \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma$$

Beschränkungen

$$u_a \leq u \leq u_b$$

$$y(x_i) \leq y_i \quad i = 1, .., N$$

Wir haben also endlich viele punktweise Zustandsbeschränkungen.

Das Casas-Beispiel II

Nehmen wir einmal an, dass eine Zustandsbeschränkung aktiv ist in x_i. Was sind die Konsequenzen daraus ?
Das Maß μ_i ist jetzt ein Punktmaß (Dirac). Damit ist der adjungierte Zustand p unbeschränkt in x_i. Lokal ergibt sich (in 2D) das folgende Verhalten:

$$p(x) = c \cdot \ln(|x - x_i|) + \text{ eine glatte Funktion}$$

Die Projektionsformel

$$u = \Pi_{[u_a, u_b]}\left(-\frac{1}{\nu}p\right)$$

impliziert damit, dass die Steuerbeschränkung aktiv ist in einer Umgebung von x_i.
Damit ist die optimale Steuerung $\bar{u}$ Lipschitz-stetig !
Zusammenfassung: Zusätzliche Beschränkungen können die Regularität optimaler Steuerungen erhöhen !

Das Casas-Tröltzsch-Beispiel I

Zielfunktional

$$F(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Zustandsgleichung

$$-\Delta y = u \text{ in } \Omega \quad y = 0 \text{ auf } \Gamma$$

Beschränkungen

$$u_a \leq u \leq u_b$$

$$y \leq y_c$$

Für die Schranken wird gefordert $u_a, u_b \in H^1 \cap L^\infty$.

Das Casas-Tröltzsch-Beispiel II

Hier ist die Singularitätendiskussion offenbar nicht mehr möglich. Trotzdem zeigen Casas und Tröltzsch:

- Die Steuerungen gehören für beliebige Ortsdimension zu $H^1 \cap L^\infty$
- Sebst bei strengsten Glattheitsforderungen an alle Daten erhält man keine Stetigkeit der optimalen Steuerung.

Bauweise des Gegenbeispiels: Die Beschränkung ist in einer Folge von Punkten mit einem Häufungspunkt aktiv. Im Häufungspunkt der Punktsingularitäten ist die optimale Steuerung unstetig.

Inhalt

Zustandsbeschränkungen und Steuerungen auf derselben Menge

Zielfunktional

$$\min J(u) = F(y, u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Zustandsgleichung

$$\begin{array}{rcll} Ay & = & u & \text{in } \Omega \\ y & = & 0 & \text{auf } \Gamma \end{array}$$

Beschränkungen

$$\begin{array}{rcccll} y_c & \leq & y & & & \text{f.ü. in } \Omega' \subset \Omega \\ 0 & \leq & u & \leq & b & \text{f.ü. in } \Omega \end{array}$$

Schwierigkeiten

Nehmen wir einmal an eine Zustandsbeschränkung $\bar{y} = y_c$ ist aktiv auf einem Teilgebiet. $\rightarrow$ Dann erhält man die optimale Steuerung durch zweimaliges Differenzieren der Daten:

$$Ay_c = \bar{u}.$$

Folglich haben wir

- $\rightarrow$ gewisse Eigenschaften schlecht gestellter Probleme
- $\rightarrow$ speziell hohe Konditionszahlen nach der Diskretisierung
- $\rightarrow$ Eindeutigkeit der adjungierten Variablen ist nicht garantiert.

Außerdem wissen wir dass die Multiplikatoren der Zustandsbeschränkungen μ im allgemeinen Maße sind. Das wirkt sich in der geringen Regularität des adjungierten Zustandes und der optimalen Steuerung aus.

Konzepte

Es gibt verschiedene Konzepte zustandsbeschränkte Probleme zu lösen:

- Direkter Zugang (discretize then optimize): Deckelnick, Hinze, Meyer, ...
- Strafterme: Hintermüller, Ito, Kunisch
- Innere-Punkte-Verfahren: Schiela, Ulbrich, Weiser
- Quelldarstellungen: Neitzel, Tröltzsch, Yousept

Mein favorisierter Zugang: $\rightarrow$ Lavrentiev Regularisierung (Meyer, Rösch, Tröltzsch)

Lavrentiev Regularisierung

$$\pm \varepsilon u + y \geq y_c$$

Vorteil: glatte Lösungen (Lipschitz stetige optimale Steuerungen), Fehlerabschätzung (Cherednichenko, Rösch):

$$\|\bar{u} - \bar{u}_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon}$$

Numerische Probleme bei der Lavrentievregularisierung

Bei der Umsetzung der Lavrentievidee können folgende Schwierigkeiten auftreten.

- Die aktiven Mengen für die Steuerbeschränkungen und die gemischten Beschränkungen überschneiden sich.
- Das führt zur Nichteindeutigkeit der dualen Variablen
- Diskretisierte Systeme weisen singuläre Matrizen auf

Diese Probleme werden durch eine Modifikation der Idee überwunden. Wir bezeichnen dies als Konzept der virtuellen Steuerungen.

Randsteuerung und Beschränkungen im Gebiet

Lavrentiev Regularisierung ist nicht möglich.

Zielfunktional

$$\min J(u) = F(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Gamma)}$$

Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} Ay + y &= 0 && \text{in } \Omega \\ \partial_{n_A} y &= u && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

Beschränkungen

$$\begin{array}{lllll} y_c & \leq & y & & \text{f.ü. in } \Omega \\ u_a & \leq & u & \leq \; u_b & \text{f.ü. auf } \Gamma \end{array}$$

Virtuelle Steuerungen

Zielfunktional

$$\min \Phi(y,u,v) = \frac{1}{2}\|y - y_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\nu}{2}\|u\|^2_{L^2(\Gamma)} + \frac{f(\varepsilon)}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Zustandsgleichung

$$\begin{aligned} Ay + y &= g(\varepsilon)v && \text{in } \Omega \\ \partial_{n_A} y &= u && \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

Beschränkungen

$$\begin{array}{lllll} y_c & \leq & y \pm h(\varepsilon)v & & \text{f.ü. in } \Omega \\ u_a & \leq & u & \leq \; u_b & \text{f.ü. auf } \Gamma \end{array}$$

f, g, h sind positive Funktionen.

Virtuelle Steuerungen - Eigenschaften

Einige Eigenschaften des Konzeptes:

- Der Regularisierungsfehler kann abgeschätzt werden.
- Damit ergeben sich Kriterien für eine vernünftige Wahl der Funktionen f, g, h.
- Die Wahl $g \equiv 0$ ist äquivalent zum Hintermüller-Ito-Kunisch-Konzept.
- Eindeutigkeit der dualen Variablen
- Konvergenztheorie für Primal-Duale-Aktive-Mengen-Strategien.

Darüber hinaus sind Abschätzungen für Diskretisierungsfehler bekannt.

Zusammenfassung

- Reine Zustandsbeschränkungen führen (im Gegensatz zu anderen Beschränkungen) auf Maßanteile bei den Lagrangeschen Multiplikatoren.
- Eine Regularisierung dieser Probleme ist möglich.
- Der Diskretisierungsfehler kann abgeschätzt werden.
- Zur numerischen Lösung kann man aktive-Mengen-Strategien und Innere Punkte-Methoden verwenden.