

A priori Fehleranalyse bei elliptischen Optimalsteueraufgaben

Skiseminar, Zell am Ziller (**nicht** am See), 07.–14.03.2009

Christian Meyer

Inhalt

- ▶ Modellproblem mit Steuerbeschränkungen
 - ▶ Variationelle Diskretisierung
 - ▶ Volldiskretisierung
- ▶ Modellproblem mit Zustandsschranken
 - ▶ Konstruktion zulässiger Lösungen
 - ▶ FE-Fehlerabschätzung in L^∞
- ▶ Kurzer Ausblick

Steuerbeschränktes Modellproblem

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \\ \text{subject to} & -\Delta y = u \quad \text{in } \Omega \\ & y = 0 \quad \text{on } \Gamma \\ \text{and} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{P})$$

Voraussetzungen:

- ▶ $\Omega \in \mathbb{R}^2$: konvex und polygonal berandet (3D geht teilweise auch ist aber komplizierter ...)
- ▶ $y_d \in L^2(\Omega)$
- ▶ $\nu > 0$

Steuerungszustandsoperator

Lax-Milgram-Lemma: Für alle $u \in H^{-1}(\Omega)$ existiert eine eindeutige Lösung $y \in H_0^1(\Omega)$ der PDE in (P).

Steuerungszustandsoperator: $S : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ – Lösungsoperator der PDE

Reduziertes Optimierungsproblem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f(u) := J(S u, u) = \frac{1}{2} \|S u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} \quad u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{P})$$

Zulässige Menge: $U_{ad} := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega\}$

Standard: Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Lösung \bar{u} (strenge Konvexität)

Steuerungszustandsoperator

Lax-Milgram-Lemma: Für alle $u \in H^{-1}(\Omega)$ existiert eine eindeutige Lösung $y \in H_0^1(\Omega)$ der PDE in (P).

Steuerungszustandsoperator: $S : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ – Lösungsoperator der PDE

Reduziertes Optimierungsproblem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f(u) := J(S u, u) = \frac{1}{2} \|S u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} \quad u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{P})$$

Zulässige Menge: $U_{ad} := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega\}$

Standard: Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Lösung \bar{u} (strenge Konvexität)

Steuerungszustandsoperator

Lax-Milgram-Lemma: Für alle $u \in H^{-1}(\Omega)$ existiert eine eindeutige Lösung $y \in H_0^1(\Omega)$ der PDE in (P).

Steuerungszustandsoperator: $S : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ – Lösungsoperator der PDE

Reduziertes Optimierungsproblem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f(u) := J(S u, u) = \frac{1}{2} \|S u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} \quad u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{P})$$

Zulässige Menge: $U_{ad} := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega\}$

Standard: Existenz und Eindeutigkeit der optimalen Lösung \bar{u} (**strenge Konvexität**)

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Zielfunktion f ist Gateaux-diffbar (u.a. wegen Linearität von S)

Notwendige Optimalitätsbdg.'en: **Variationsungleichung** (ist auch hinreichend wegen Konvexität)

$$\begin{aligned} f'(\bar{u})(u - \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \\ \Updownarrow \\ (S^*(S\bar{u} - y_d) + \nu\bar{u}, u - \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

(Beachte: hierbei wird S als Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ aufgefasst.)

(VI) ist die Basis für die gesamte A priori Fehleranalysis!!!

Was ist S^* ? **Adjungierter** Lösungsoperator: Da S *selbstadjungiert* ist, löbt $S^* : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ dieselbe PDE, d.h.

$$p = S^*(y - y_d) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} -\Delta p &= y - y_d && \text{in } \Omega \\ p &= 0 && \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

Notwendige und hinreichende Bedingungen

Zielfunktion f ist Gateaux-diffbar (u.a. wegen Linearität von S)

Notwendige Optimalitätsbdg.'en: **Variationsungleichung** (ist auch hinreichend wegen Konvexität)

$$\begin{aligned} f'(\bar{u})(u - \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \\ \Downarrow \\ (S^*(S\bar{u} - y_d) + \nu\bar{u}, u - \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

(Beachte: hierbei wird S als Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ aufgefasst.)

(VI) ist die Basis für die gesamte A priori Fehleranalysis!!!

Was ist S^* ? **Adjungierter** Lösungsoperator: Da S *selbstadjungiert* ist, löst $S^* : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ dieselbe PDE, d.h.

$$p = S^*(y - y_d) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} -\Delta p = y - y_d & \text{in } \Omega \\ p = 0 & \text{on } \Gamma \end{array}$$

Diskretisierung der PDE

Finite-Element-Diskretisierung:

- ▶ **Triangulierung** des Gebiets: $\mathcal{T}_h: \bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ mit Gitterweite $h > 0$
(exakte Triangulierung)
- ▶ Ansatzraum: $V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \forall T \in \mathcal{T}_h\}$
mit \mathcal{P}_1 : Raum der Polynome vom Grad ≤ 1
- ▶ Diskrete Version der PDE (in schwacher Form):

$$\int_{\Omega} \nabla y_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} u v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h$$

(Galerkin-Verfahren: Ansatzraum = Testraum)

- ▶ Diskreter Lösungsoperator: $S_h : H^{-1}(\Omega) \rightarrow V_h$

Diskretisierung der PDE

Finite-Element-Diskretisierung:

- ▶ **Triangulierung** des Gebiets: $\mathcal{T}_h: \bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ mit Gitterweite $h > 0$
(exakte Triangulierung)
- ▶ Ansatzraum: $V_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid v|_T \in \mathcal{P}_1 \forall T \in \mathcal{T}_h\}$
mit \mathcal{P}_1 : Raum der Polynome vom Grad ≤ 1

- ▶ Diskrete Version der PDE (in schwacher Form):

$$\int_{\Omega} \nabla y_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} u v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h$$

(Galerkin-Verfahren: Ansatzraum = Testraum)

- ▶ Diskreter Lösungsoperator: $S_h : H^{-1}(\Omega) \rightarrow V_h$

(Variationelle-)Diskretisierung des Optimalsteuerproblems

(Semi-)Diskretes Optimierungsproblem (nach Hinze):

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f_h(u) := \frac{1}{2} \|S_h u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} \quad u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (P_h)$$

Die Steuerung wird also nicht diskretisiert!!!

Vorteile:

- + Wesentlich einfachere Analysis
- + Höhere Konvergenzraten

Nachteile:

- Hoher Implementationsaufwand, da die Steuerung kein diskretes Objekt ist.

(Variationelle-)Diskretisierung des Optimalsteuerproblems

(Semi-)Diskretes Optimierungsproblem (nach Hinze):

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f_h(u) := \frac{1}{2} \|S_h u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} \quad u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (P_h)$$

Die Steuerung wird also nicht diskretisiert!!!

Vorteile:

- + Wesentlich einfachere Analysis
- + Höhere Konvergenzraten

Nachteile:

- Hoher Implementationsaufwand, da die Steuerung kein diskretes Objekt ist.

Konvergenzanalyse I

- ▶ Diskretes Optimum: \bar{u}_h (wieder eindeutig wegen strenger Konvexität)
- ▶ Diskrete Variationsungleichung analog zum Kontinuierlichen:

$$(S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, u - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (VI_h)$$

- ▶ Da die Steuerung nicht diskretisiert wurde, ist die kontinuierliche Lösung \bar{u} zulässig für (VI_h) !!!
- ▶ (VI) mit $u = \bar{u}_h$ + (VI_h) mit $u = \bar{u}$:

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) - (S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \geq 0$$

⋮

$$\nu \|\bar{u} - \bar{u}_h\|^2 + \|\bar{y} - \bar{y}_h\|^2 \leq \|(S - S_h)\bar{u}_h\|^2 + \frac{1}{\nu} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\|^2$$

Konvergenzanalyse I

- ▶ Diskretes Optimum: \bar{u}_h (wieder eindeutig wegen strenger Konvexität)
- ▶ Diskrete Variationsungleichung analog zum Kontinuierlichen:

$$(S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, u - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (VI_h)$$

- ▶ **Da die Steuerung nicht diskretisiert wurde, ist die kontinuierliche Lösung \bar{u} zulässig für (VI_h) !!!**
- ▶ (VI) mit $u = \bar{u}_h$ + (VI_h) mit $u = \bar{u}$:

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) - (S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \geq 0$$

⋮

$$\nu \|\bar{u} - \bar{u}_h\|^2 + \|\bar{y} - \bar{y}_h\|^2 \leq \|(S - S_h)\bar{u}_h\|^2 + \frac{1}{\nu} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\|^2$$

Konvergenzanalyse I

- ▶ Diskretes Optimum: \bar{u}_h (wieder eindeutig wegen strenger Konvexität)
- ▶ Diskrete Variationsungleichung analog zum Kontinuierlichen:

$$(S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, u - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad} \quad (VI_h)$$

- ▶ **Da die Steuerung nicht diskretisiert wurde, ist die kontinuierliche Lösung \bar{u} zulässig für (VI_h) !!!**
- ▶ (VI) mit $u = \bar{u}_h$ + (VI_h) mit $u = \bar{u}$:

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) - (S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, \bar{u} - \bar{u}_h) \geq 0$$

⋮

$$\nu \|\bar{u} - \bar{u}_h\|^2 + \|\bar{y} - \bar{y}_h\|^2 \leq \|(S - S_h)\bar{u}_h\|^2 + \frac{1}{\nu} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\|^2$$

Konvergenzanalyse II

Theorem

Die L^2 -Norm der Differenz zwischen der Lösung des kontinuierlichen und des diskreten Problems kann durch

$$\sqrt{\nu} \|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq c \left(\|(S - S_h)\bar{u}_h\| + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\| \right)$$

abgeschätzt werden.

Was ist $(S - S_h)f$ bei bel., aber festem $f \in L^2(\Omega)$?

$$w = S f \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$w_h = S_h f \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h$$

(beachte: $S^* = S$, $S_h^* = S_h$)

Corollary

Der Diskretisierungsfehler des Optimierungsproblems verhält sich damit genauso, wie der reine Diskretisierungsfehler der PDE!!!

Konvergenzanalyse II

Theorem

Die L^2 -Norm der Differenz zwischen der Lösung des kontinuierlichen und des diskreten Problems kann durch

$$\sqrt{\nu} \|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq c \left(\|(S - S_h)\bar{u}_h\| + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\| \right)$$

abgeschätzt werden.

Was ist $(S - S_h)f$ bei bel., aber festem $f \in L^2(\Omega)$?

$$w = S f \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$w_h = S_h f \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h$$

(beachte: $S^* = S$, $S_h^* = S_h$)

Corollary

Der Diskretisierungsfehler des Optimierungsproblems verhält sich damit genauso, wie der reine Diskretisierungsfehler der PDE!!!

Konvergenzanalyse II

Theorem

Die L^2 -Norm der Differenz zwischen der Lösung des kontinuierlichen und des diskreten Problems kann durch

$$\sqrt{\nu} \|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq c \left(\|(S - S_h)\bar{u}_h\| + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\| \right)$$

abgeschätzt werden.

Was ist $(S - S_h)f$ bei bel., aber festem $f \in L^2(\Omega)$?

$$w = S f \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$w_h = S_h f \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx \quad \forall v_h \in V_h$$

(beachte: $S^* = S$, $S_h^* = S_h$)

Corollary

Der Diskretisierungsfehler des Optimierungsproblems verhält sich damit genauso, wie der reine Diskretisierungsfehler der PDE!!!

Abschätzung des Diskretisierungsfehlers der PDE

Standard FE-Theorie:

$$\|(S - S_h)f\| = \|w - w_h\| \leq c h^2 \|w\|_{H^2(\Omega)} = c h^2 \|S f\|_{H^2(\Omega)}$$

(Aubin-Nitsche-Trick)

Man braucht also $S : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$!!!

Das gilt z.B. bei:

- ▶ Laplace-Gleichung in konvexen, polygonal berandeten Gebieten (2D **und** 3D), vgl. Grisvard
- ▶ Stokes-Gleichungen (für die Geschwindigkeit) in konvexen, polygonal berandeten Gebieten (2D **und** 3D), vgl. Mazya
- ▶ Elliptische PDEs mit glatten Koeffizienten und glatten Gebieten (s. Grisvard), Achtung hier: Triangulierung?!

Was, wenn das Gebiet nicht glatt und nicht konvex ist???

Antwort: **Thomas Apel!**

Abschätzung des Diskretisierungsfehlers der PDE

Standard FE-Theorie:

$$\|(S - S_h)f\| = \|w - w_h\| \leq c h^2 \|w\|_{H^2(\Omega)} = c h^2 \|S f\|_{H^2(\Omega)}$$

(Aubin-Nitsche-Trick)

Man braucht also $S : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$!!!

Das gilt z.B. bei:

- ▶ Laplace-Gleichung in konvexen, polygonal berandeten Gebieten (2D **und** 3D), vgl. Grisvard
- ▶ Stokes-Gleichungen (für die Geschwindigkeit) in konvexen, polygonal berandeten Gebieten (2D **und** 3D), vgl. Mazya
- ▶ Elliptische PDEs mit glatten Koeffizienten und glatten Gebieten (s. Grisvard), Achtung hier: Triangulierung?!

Was, wenn das Gebiet nicht glatt und nicht konvex ist???

Antwort: **Thomas Apell!**

Abschätzung des Diskretisierungsfehlers der PDE

Standard FE-Theorie:

$$\|(S - S_h)f\| = \|w - w_h\| \leq c h^2 \|w\|_{H^2(\Omega)} = c h^2 \|S f\|_{H^2(\Omega)}$$

(Aubin-Nitsche-Trick)

Man braucht also $S : L^2(\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$!!!

Das gilt z.B. bei:

- ▶ Laplace-Gleichung in konvexen, polygonal berandeten Gebieten (2D **und** 3D), vgl. Grisvard
- ▶ Stokes-Gleichungen (für die Geschwindigkeit) in konvexen, polygonal berandeten Gebieten (2D **und** 3D), vgl. Mazya
- ▶ Elliptische PDEs mit glatten Koeffizienten und glatten Gebieten (s. Grisvard), Achtung hier: Triangulierung?!

Was, wenn das Gebiet nicht glatt und nicht konvex ist???

Antwort: **Thomas Apel!**

Fehlerabschätzung bei variationeller Diskretisierung

$$\|(S - S_h)\bar{u}_h\| \leq c h^2 \|S \bar{u}_h\|_{H^2(\Omega)} \leq c h^2 \|S\|_{L^2 \rightarrow H^2} \|\bar{u}_h\| \leq c h^2 \|\bar{u}_h\|$$

Die gleichmäßige (d.h. unabhängig von h) Beschränktheit von $\|\bar{u}_h\|$ folgt aus den Steuerbeschränkungen ($\bar{u}_h \in U_{ad}$ für alle $h > 0$) oder aus der radialen Unbeschränktheit des Zielfunktional.

Aus der gleichmäßigen Beschränktheit von $\|\bar{u}_h\|$ folgt die von $\|\bar{y}_h\|$ und damit:

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu} \|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| &\leq c \left(\|(S - S_h)\bar{u}_h\| + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\| \right) \\ &\leq c h^2 \left(\|\bar{u}_h\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|\bar{y}_h - y_d\|^2 \right) \leq c h^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) \end{aligned}$$

Theorem

Unter der Annahme, dass $\nu \leq 1$, gilt für den Diskretisierungsfehler bei variationeller Diskretisierung:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq \frac{1}{\nu} c h^2$$

Fehlerabschätzung bei variationeller Diskretisierung

$$\|(S - S_h)\bar{u}_h\| \leq c h^2 \|S \bar{u}_h\|_{H^2(\Omega)} \leq c h^2 \|S\|_{L^2 \rightarrow H^2} \|\bar{u}_h\| \leq c h^2 \|\bar{u}_h\|$$

Die gleichmäßige (d.h. unabhängig von h) Beschränktheit von $\|\bar{u}_h\|$ folgt aus den Steuerbeschränkungen ($\bar{u}_h \in U_{ad}$ für alle $h > 0$) oder aus der radialen Unbeschränktheit des Zielfunktional.

Aus der gleichmäßigen Beschränktheit von $\|\bar{u}_h\|$ folgt die von $\|\bar{y}_h\|$ und damit:

$$\begin{aligned} \sqrt{\nu} \|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| &\leq c \left(\|(S - S_h)\bar{u}_h\| + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|(S^* - S_h^*)(\bar{y}_h - y_d)\| \right) \\ &\leq c h^2 \left(\|\bar{u}_h\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|\bar{y}_h - y_d\|^2 \right) \leq c h^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \right) \end{aligned}$$

Theorem

Unter der Annahme, dass $\nu \leq 1$, gilt für den Diskretisierungsfehler bei variationeller Diskretisierung:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq \frac{1}{\nu} c h^2$$

Diskretisierung der Steuerung I

Um den Implementationsaufwand zu verringern, wird jetzt auch die Steuerung diskretisiert, mögliche Ansatzräume für die Steuerung:

$$U_h = \{u \in L^2(\Omega) \mid u|_T = \text{const. } \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$U_h = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid u|_T \in \mathcal{P}_1 \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$U_h = \dots$$

(Voll-)diskretes Optimierungsproblem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f_h(u_h) := \frac{1}{2} \|S_h u_h - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u_h\|^2 \\ \text{subject to} \quad u_h \in U_h \quad \text{und} \quad u_a \leq u_h(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (P_h)$$

Diskretisierung von y_d (kein Problem, wenn y_d glatt ist) liefert

Endlich-dimensionales Optimierungsproblem!

Diskretisierung der Steuerung I

Um den Implementationsaufwand zu verringern, wird jetzt auch die Steuerung diskretisiert, mögliche Ansatzräume für die Steuerung:

$$U_h = \{u \in L^2(\Omega) \mid u|_T = \text{const.} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$U_h = \{u \in C(\bar{\Omega}) \mid u|_T \in \mathcal{P}_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$U_h = \dots$$

(Voll-)diskretes Optimierungsproblem:

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize} \quad f_h(u_h) := \frac{1}{2} \|S_h u_h - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u_h\|^2 \\ \text{subject to} \quad u_h \in U_h \quad \text{und} \quad u_a \leq u_h(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (P_h)$$

Diskretisierung von y_d (kein Problem, wenn y_d glatt ist) liefert

Endlich-dimensionales Optimierungsproblem!

Diskretisierung der Steuerung II

Unterschied zum Konvergenzbeweis bei variationeller Diskretisierung:

Kontinuierliche Lösung \bar{u} kann nicht mehr in die diskrete Variationsungleichung eingesetzt werden:

- ▶ Diskrete zulässige Menge: $U_{ad}^h := \{u_h \in U_h \mid u_a \leq u_v(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega\}$
- ▶ Diskrete Variationsungleichung:

$$(S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, u_h - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u_h \in U_{ad}^h \quad (VI_h)$$

- ▶ **ABER:** $\bar{u} \notin U_{ad}^h$ (denn $\bar{u} \notin U_h$), deshalb kann man (VI_h) **nicht** mit \bar{u} testen!
- ▶ Idee: $I_h \bar{u}$ statt \bar{u} in (VI_h) mit I_h : **Quasi-Interpolationsoperator**

Diskretisierung der Steuerung II

Unterschied zum Konvergenzbeweis bei variationeller Diskretisierung:

Kontinuierliche Lösung \bar{u} kann nicht mehr in die diskrete Variationsungleichung eingesetzt werden:

- ▶ Diskrete zulässige Menge: $U_{ad}^h := \{u_h \in U_h \mid u_a \leq u_u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega\}$
- ▶ Diskrete Variationsungleichung:

$$(S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, u_h - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u_h \in U_{ad}^h \quad (VI_h)$$

- ▶ **ABER:** $\bar{u} \notin U_{ad}^h$ (denn $\bar{u} \notin U_h$), deshalb kann man (VI_h) **nicht** mit \bar{u} testen!
- ▶ Idee: $I_h \bar{u}$ statt \bar{u} in (VI_h) mit I_h : **Quasi-Interpolationsoperator**

Zulässige Interpolation

Was muss I_h erfüllen?

- ▶ **Zulässigkeit** erhalten, d.h.

$$u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u_a \leq I_h u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega$$

- ▶ Interpolationsfehlerabschätzungen, auch in **negativen Sobolevräumen**:

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)^*} \leq c h^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

(Beide Eigenschaften sind bei konstanten und linearen Ansatzfunktionen mit speziellen Interpolationsoperatoren erfüllbar, Clément- und Carstensen-Interpolierende)

Dann gilt $I_h \bar{u} \in U_h \cap U_{ad} \Rightarrow I_h \bar{u} \in U_{ad}^h \Rightarrow I_h \bar{u}$ kann als Testfunktion in $(V|_h)$ verwendet werden!

Zulässige Interpolation

Was muss I_h erfüllen?

- ▶ **Zulässigkeit** erhalten, d.h.

$$u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u_a \leq I_h u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega$$

- ▶ Interpolationsfehlerabschätzungen, auch in **negativen Sobolevräumen**:

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)^*} \leq c h^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

(Beide Eigenschaften sind bei konstanten und linearen Ansatzfunktionen mit speziellen Interpolationsoperatoren erfüllbar, Clément- und Carstensen-Interpolierende)

Dann gilt $I_h \bar{u} \in U_h \cap U_{ad} \Rightarrow I_h \bar{u} \in U_{ad}^h \Rightarrow I_h \bar{u}$ kann als Testfunktion in $(V|_h)$ verwendet werden!

Zulässige Interpolation

Was muss I_h erfüllen?

- ▶ **Zulässigkeit** erhalten, d.h.

$$u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u_a \leq I_h u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega$$

- ▶ Interpolationsfehlerabschätzungen, auch in **negativen Sobolevräumen**:

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)^*} \leq c h^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

(Beide Eigenschaften sind bei konstanten und linearen Ansatzfunktionen mit speziellen Interpolationsoperatoren erfüllbar, Clément- und Carstensen-Interpolierende)

Dann gilt $I_h \bar{u} \in U_h \cap U_{ad} \Rightarrow I_h \bar{u} \in U_{ad}^h \Rightarrow I_h \bar{u}$ kann als Testfunktion in $(V|_h)$ verwendet werden!

Zulässige Interpolation

Was muss I_h erfüllen?

- ▶ **Zulässigkeit** erhalten, d.h.

$$u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega \quad \Rightarrow \quad u_a \leq I_h u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega$$

- ▶ Interpolationsfehlerabschätzungen, auch in **negativen Sobolevräumen**:

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)^*} \leq c h^2 \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

(Beide Eigenschaften sind bei konstanten und linearen Ansatzfunktionen mit speziellen Interpolationsoperatoren erfüllbar, Clément- und Carstensen-Interpolierende)

Dann gilt $I_h \bar{u} \in U_h \cap U_{ad} \Rightarrow I_h \bar{u} \in U_{ad}^h \Rightarrow I_h \bar{u}$ kann als Testfunktion in (VI_h) verwendet werden!

Regularität der Steuerung I

Durch die Interpolation treten bei der Konvergenzanalyse neue Terme auf (Interpolationsfehler), z.B.:

$$\nu(\bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) - \nu(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u}_h) = -\nu \|\bar{u} - \bar{u}_h\|^2 + \nu(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u})$$

Um diese Abschätzen braucht man **Regularität** von \bar{u} und \bar{u}_h (und Interpolationsfehler in H^{-1}):

$$\begin{aligned}(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u}) &\leq \|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{H^1(\Omega)^*} \\ &\leq c h^2 \|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Zusätzliche **Regularität der optimalen Steuerung** kommt aus der notwendigen Bedingung (VI), also

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

Regularität der Steuerung I

Durch die Interpolation treten bei der Konvergenzanalyse neue Terme auf (Interpolationsfehler), z.B.:

$$\nu(\bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) - \nu(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u}_h) = -\nu \|\bar{u} - \bar{u}_h\|^2 + \nu(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u})$$

Um diese Abschätzen braucht man **Regularität** von \bar{u} und \bar{u}_h (und Interpolationsfehler in H^{-1}):

$$\begin{aligned}(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u}_h) &\leq \|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{H^1(\Omega)^*} \\ &\leq c h^2 \|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Zusätzliche **Regularität der optimalen Steuerung** kommt aus der notwendigen Bedingung (VI), also

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

Regularität der Steuerung I

Durch die Interpolation treten bei der Konvergenzanalyse neue Terme auf (Interpolationsfehler), z.B.:

$$\nu(\bar{u}, \bar{u}_h - \bar{u}) - \nu(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u}_h) = -\nu \|\bar{u} - \bar{u}_h\|^2 + \nu(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u})$$

Um diese Abschätzen braucht man **Regularität** von \bar{u} und \bar{u}_h (und Interpolationsfehler in H^{-1}):

$$\begin{aligned}(\bar{u}_h, I_h \bar{u} - \bar{u}_h) &\leq \|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{u} - I_h \bar{u}\|_{H^1(\Omega)^*} \\ &\leq c h^2 \|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Zusätzliche **Regularität der optimalen Steuerung** kommt aus der notwendigen Bedingung (VI), also

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$

Regularität der Steuerung II

Mit $p = S^*(S\bar{u} - y_d)$ (**adjungierter Zustand**) ist (VI) äquivalent zu

$$(p + \nu\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$



$$(p(x) + \nu\bar{u}(x))(u - \bar{u}(x)) \geq 0 \text{ für alle } u \in [u_a, u_b] \text{ und fast alle } x \in \Omega$$



$$\bar{u} = \Pi_{ad} \left\{ \frac{1}{\nu} p \right\}$$

mit Π_{ad} : **punktweise Projektion** auf $[u_a, u_b]$

Es gilt: $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow \Pi_{ad}\{v\} \in H^1(\Omega)$

p ist Lösung einer PDE $\Rightarrow p \in H^2(\Omega) \Rightarrow \bar{u} \in H^1(\Omega)$

(Leider ist Π_{ad} nicht in H^2 beschränkt ...)

(Etwas aufwendiger ist die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$.)

Regularität der Steuerung II

Mit $p = S^*(S\bar{u} - y_d)$ (**adjungierter Zustand**) ist (VI) äquivalent zu

$$(p + \nu\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$



$$(p(x) + \nu\bar{u}(x))(u - \bar{u}(x)) \geq 0 \text{ für alle } u \in [u_a, u_b] \text{ und fast alle } x \in \Omega$$



$$\bar{u} = \Pi_{ad} \left\{ \frac{1}{\nu} p \right\}$$

mit Π_{ad} : **punktweise Projektion** auf $[u_a, u_b]$

Es gilt: $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow \Pi_{ad}\{v\} \in H^1(\Omega)$

p ist Lösung einer PDE $\Rightarrow p \in H^2(\Omega) \Rightarrow \boxed{\bar{u} \in H^1(\Omega)}$

(Leider ist Π_{ad} nicht in H^2 beschränkt ...)

(Etwas aufwendiger ist die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$.)

Regularität der Steuerung II

Mit $p = S^*(S\bar{u} - y_d)$ (**adjungierter Zustand**) ist (VI) äquivalent zu

$$(p + \nu\bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}$$



$$(p(x) + \nu\bar{u}(x))(u - \bar{u}(x)) \geq 0 \text{ für alle } u \in [u_a, u_b] \text{ und fast alle } x \in \Omega$$



$$\bar{u} = \Pi_{ad} \left\{ \frac{1}{\nu} p \right\}$$

mit Π_{ad} : **punktweise Projektion** auf $[u_a, u_b]$

Es gilt: $v \in H^1(\Omega) \Rightarrow \Pi_{ad}\{v\} \in H^1(\Omega)$

p ist Lösung einer PDE $\Rightarrow p \in H^2(\Omega) \Rightarrow \boxed{\bar{u} \in H^1(\Omega)}$

(Leider ist Π_{ad} nicht in H^2 beschränkt ...)

(Etwas aufwendiger ist die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\bar{u}_h\|_{H^1(\Omega)}$.)

Fehlerabschätzung bei Volldiskretisierung

Trotzdem verschlechtert sich die Fehlerordnung bei Volldiskretisierung:

Theorem

Die Steuerung sei mit konstanten Ansatzfunktionen diskretisiert. Dann gilt für den Diskretisierungsfehler bei Volldiskretisierung:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq \frac{1}{\nu} c h$$

Bemerkungen hierzu:

- ▶ Die Theorie hierzu ist schon sehr alt (Falk'73)
- ▶ Im Fall von konstanten Ansatzfunktionen ist das Ergebnis trotzdem optimal, weil man dieselbe Konvergenzordnung wie beim Interpolationsfehler erhält.
- ▶ Durch Postprocessing kann man auch hier h^2 erhalten.

Fehlerabschätzung bei Volldiskretisierung

Trotzdem verschlechtert sich die Fehlerordnung bei Volldiskretisierung:

Theorem

Die Steuerung sei mit konstanten Ansatzfunktionen diskretisiert. Dann gilt für den Diskretisierungsfehler bei Volldiskretisierung:

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq \frac{1}{\nu} c h$$

Bemerkungen hierzu:

- ▶ Die Theorie hierzu ist schon sehr alt (Falk'73)
- ▶ Im Fall von konstanten Ansatzfunktionen ist das Ergebnis trotzdem optimal, weil man dieselbe Konvergenzordnung wie beim Interpolationsfehler erhält.
- ▶ Durch Postprocessing kann man auch hier h^2 erhalten.

Ein Modellproblem mit Zustandsbeschränkungen

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \\ \text{subject to} & -\Delta y = u \quad \text{in } \Omega \\ & y = 0 \quad \text{on } \Gamma \\ \text{and} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq y(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{Q})$$

Zustandsbeschränkte Probleme sind schwierig, weil die **Lagrange Multiplikatoren** i.A. nur **Maße** sind.

Deshalb versuchen wir's ohne Lagrange Multiplikatoren ...

Ein Modellproblem mit Zustandsbeschränkungen

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \\ \text{subject to} & -\Delta y = u \quad \text{in } \Omega \\ & y = 0 \quad \text{on } \Gamma \\ \text{and} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq y(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{Q})$$

Zustandsbeschränkte Probleme sind schwierig, weil die **Lagrange Multiplikatoren** i.A. nur **Maße** sind.

Deshalb versuchen wir's ohne Lagrange Multiplikatoren ...

Ein Modellproblem mit Zustandsbeschränkungen

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - y_d|^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} u^2 dx \\ \text{subject to} & -\Delta y = u \quad \text{in } \Omega \\ & y = 0 \quad \text{on } \Gamma \\ \text{and} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq y(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{Q})$$

Zustandsbeschränkte Probleme sind schwierig, weil die **Lagrange Multiplikatoren** i.A. nur **Maße** sind.

Deshalb versuchen wir's ohne Lagrange Multiplikatoren ...

Verkürztes Problem und notwendige Bedingung

Verkürztes Problem:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(u) := \frac{1}{2} \|S u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq (S u)(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{Q})$$

Zulässige Menge jetzt:

$$U_{ad}^Q := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (S u)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}$$

Die zulässige Menge ist konvex (weil S linear ist), deshalb ergibt sich wieder die Variationsungleichung:

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}^Q \quad (\text{VI}^Q)$$

Verkürztes Problem und notwendige Bedingung

Verkürztes Problem:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(u) := \frac{1}{2} \|S u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq (S u)(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{Q})$$

Zulässige Menge jetzt:

$$U_{ad}^Q := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (S u)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}$$

Die zulässige Menge ist konvex (weil S linear ist), deshalb ergibt sich wieder die Variationsungleichung:

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}^Q \quad (\text{VI}^Q)$$

Verkürztes Problem und notwendige Bedingung

Verkürztes Problem:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(u) := \frac{1}{2} \|S u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq (S u)(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (\text{Q})$$

Zulässige Menge jetzt:

$$U_{ad}^Q := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (S u)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}$$

Die zulässige Menge ist konvex (weil S linear ist), deshalb ergibt sich wieder die Variationsungleichung:

$$(S^*(S \bar{u} - y_d) + \nu \bar{u}, u - \bar{u}) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}^Q \quad (\text{VI}^Q)$$

Variationelle Diskretisierung

(Semi-)diskretes Problem wie oben:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_h(u) := \frac{1}{2} \|S_h u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq (S_h u)(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (Q_h)$$

(Steuerung wieder nicht diskretisiert)

Diskrete zulässige Menge:

$$U_{ad}^{Q,h} := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (S_h u)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}$$

Diskrete Variationsungleichung:

$$(S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, u - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}^{Q,h} \quad (VI_h^Q)$$

Variationelle Diskretisierung

(Semi-)diskretes Problem wie oben:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{minimize} & f_h(u) := \frac{1}{2} \|S_h u - y_d\|^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|^2 \\ \text{subject to} & u_a \leq u(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ & y_a \leq (S_h u)(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega \end{array} \right\} \quad (Q_h)$$

(Steuerung wieder nicht diskretisiert)

Diskrete zulässige Menge:

$$U_{ad}^{Q,h} := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (S_h u)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}$$

Diskrete Variationsungleichung:

$$(S_h^*(S_h \bar{u}_h - y_d) + \nu \bar{u}_h, u - \bar{u}_h) \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}^{Q,h} \quad (VI_h^Q)$$

Slater Bedingung

Wieder hat man Probleme mit der **Zulässigkeit**, d.h. $\bar{u} \notin U_{ad}^{Q,h}$ und $\bar{u}_h \notin U_{ad}^Q$, aber diesmal liegt es nicht an der Steuerung, sondern am Zustand.

- ▶ **Ziel:** Konstruktion von zulässigen Steuerungen, die man in die Variationsungleichungen einsetzen kann und die "nah" an der Lösung des jeweils anderen Problems liegen.
- ▶ **Trick: Slater-Bedingung:**

Assumption

Es existiert ein $\hat{u} \in L^2(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} u_a &\leq \hat{u}(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ y_a + \tau &\leq (S \hat{u})(x) \leq y_b - \tau \quad \text{a.e. in } \Omega \end{aligned}$$

mit einem $\tau > 0$.

(Diese Annahme braucht man für die Existenz von Lagrange Multiplikatoren sowieso!)

Slater Bedingung

Wieder hat man Probleme mit der **Zulässigkeit**, d.h. $\bar{u} \notin U_{ad}^{Q,h}$ und $\bar{u}_h \notin U_{ad}^Q$, aber diesmal liegt es nicht an der Steuerung, sondern am Zustand.

- ▶ **Ziel:** Konstruktion von zulässigen Steuerungen, die man in die Variationsungleichungen einsetzen kann und die “nah” an der Lösung des jeweils anderen Problems liegen.
- ▶ **Trick: Slater-Bedingung:**

Assumption

Es existiert ein $\hat{u} \in L^2(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} u_a &\leq \hat{u}(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ y_a + \tau &\leq (S \hat{u})(x) \leq y_b - \tau \quad \text{a.e. in } \Omega \end{aligned}$$

mit einem $\tau > 0$.

(Diese Annahme braucht man für die Existenz von Lagrange Multiplikatoren sowieso!)

Slater Bedingung

Wieder hat man Probleme mit der **Zulässigkeit**, d.h. $\bar{u} \notin U_{ad}^{Q,h}$ und $\bar{u}_h \notin U_{ad}^Q$, aber diesmal liegt es nicht an der Steuerung, sondern am Zustand.

- ▶ **Ziel:** Konstruktion von zulässigen Steuerungen, die man in die Variationsungleichungen einsetzen kann und die “nah” an der Lösung des jeweils anderen Problems liegen.
- ▶ **Trick: Slater-Bedingung:**

Assumption

Es existiert ein $\hat{u} \in L^2(\Omega)$, so dass

$$\begin{aligned} u_a &\leq \hat{u}(x) \leq u_b \quad \text{a.e. in } \Omega \\ y_a + \tau &\leq (S \hat{u})(x) \leq y_b - \tau \quad \text{a.e. in } \Omega \end{aligned}$$

mit einem $\tau > 0$.

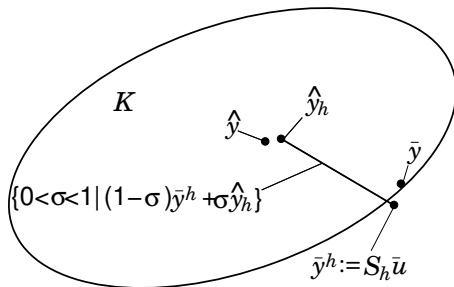
(Diese Annahme braucht man für die Existenz von Lagrange Multiplikatoren sowieso!)

Konstruktion von zulässigen Lösungen

Sei $K := \{y \in C(\bar{\Omega}) \mid y_a \leq y(x) \leq y_b \quad \forall x \in \bar{\Omega}\}$.

$\bar{y} = S\bar{u} \in K$, aber $\bar{y}^h = S_h\bar{u}$ muss nicht in K liegen.

Idee: \bar{y}^h verlässt K "nur ein bisschen". Wenn man "dieses bisschen" in Richtung des Inneren von K (also in Richtung Slaterpunkt) geht, wird man wieder zulässig!



Hierzu braucht man **FE-Fehlerabschätzungen in L^∞** !!!

Finite-Element-Fehler in L^∞ I

Theorem (Schatz'89)

Sei $f \in L^\infty(\Omega)$ beliebig und $w = S f \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Dann gilt für $w_h = S_h f$:

$$\|w - w_h\|_\infty \leq c |\log h| \|w - I_h w\|_\infty$$

(I_h : *Lagrange-Interpolierende*).

(Ähnliche Resultate auch von Rannacher/Frehse)

Interpolationsfehlerabschätzung (s. z.B. Brenner/Scott oder Vortrag T. Apel):

$$\|w - I_h w\|_\infty \leq c h^{2-2/q} \|w\|_{W^{2,q}(\Omega)}.$$

Finite-Element-Fehler in L^∞ I

Theorem (Schatz'89)

Sei $f \in L^\infty(\Omega)$ beliebig und $w = S f \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Dann gilt für $w_h = S_h f$:

$$\|w - w_h\|_\infty \leq c |\log h| \|w - I_h w\|_\infty$$

(I_h : *Lagrange-Interpolierende*).

(Ähnliche Resultate auch von Rannacher/Frehse)

Interpolationsfehlerabschätzung (s. z.B. Brenner/Scott oder Vortrag T. Apel):

$$\|w - I_h w\|_\infty \leq c h^{2-2/q} \|w\|_{W^{2,q}(\Omega)}.$$

Finite-Element-Fehler in L^∞ II

Regularität für Laplace-Gl.: $S : L^q(\Omega) \rightarrow W^{2,q}(\Omega)$ für alle $q < \infty$, falls der größte Winkel in den Ecken von $\partial\Omega$ kleiner als $\pi/2$ ist (s. Grisvard).

Wenn das nicht der Fall ist, frag' nach bei T. Apel ... (**Mesh grading schon bei konvexen Gebieten!!!**)

Damit folgt insgesamt:

Corollary

Sei $f \in L^\infty(\Omega)$ und Ω erfülle die obige Voraussetzung. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\|(S - S_h)f\|_\infty \leq c h^{2-\varepsilon} \|f\|_\infty \quad (\text{ERR}_\infty)$$

Finite-Element-Fehler in L^∞ II

Regularität für Laplace-Gl.: $S : L^q(\Omega) \rightarrow W^{2,q}(\Omega)$ für alle $q < \infty$, falls der größte Winkel in den Ecken von $\partial\Omega$ kleiner als $\pi/2$ ist (s. Grisvard).

Wenn das nicht der Fall ist, frag' nach bei T. Apel ... (**Mesh grading schon bei konvexen Gebieten!!!**)

Damit folgt insgesamt:

Corollary

Sei $f \in L^\infty(\Omega)$ und Ω erfülle die obige Voraussetzung. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\|(S - S_h)f\|_\infty \leq c h^{2-\varepsilon} \|f\|_\infty \quad (\text{ERR}_\infty)$$

Zulässige konvexe Linearkombination

Konvexe Linearkombination: $u_\sigma = (1 - \sigma)\bar{u}_h + \sigma\hat{u}$

Wie groß muss man σ wählen, d.h. wie weit muss man in Richtung des Slater-Punktes gehen, um zulässig für (Q) zu werden?

Zu zeigen: $S u_\sigma \in K \Leftrightarrow y_a \leq (S u_\sigma)(x) \leq y_b$ a.e. in Ω

Beispiel obere Schranke:

$$(S u_\sigma)(x) = (1 - \sigma)(S \bar{u}_h)(x) + \sigma S(\hat{u})(x) \leq \dots \leq y_b - \sigma\tau + c h^{2-\varepsilon}$$

\Rightarrow Wähle $\sigma = (c/\tau) h^{2-\varepsilon}$, dann ist u_σ zulässig für (Q).

(Beachte: Steuerbeschränkungen trivial, da u_σ konvexe Linearkombination zweier zulässiger Punkte.)

$$\text{UND: } \|\bar{u}_h - u_\sigma\| = \sigma \|\hat{u} - \bar{u}_h\| \leq c h^{2-\varepsilon} \quad (*)$$

u_σ ist zulässig für das kontinuierliche Problem, aber "nah" an \bar{u}_h !!!

Zulässige konvexe Linearkombination

Konvexe Linearkombination: $u_\sigma = (1 - \sigma)\bar{u}_h + \sigma\hat{u}$

Wie groß muss man σ wählen, d.h. wie weit muss man in Richtung des Slater-Punktes gehen, um zulässig für (Q) zu werden?

Zu zeigen: $S u_\sigma \in K \Leftrightarrow y_a \leq (S u_\sigma)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega$

Beispiel obere Schranke:

$$(S u_\sigma)(x) = (1 - \sigma)(S \bar{u}_h)(x) + \sigma S(\hat{u})(x) \leq \dots \leq y_b - \sigma\tau + c h^{2-\varepsilon}$$

\Rightarrow Wähle $\sigma = (c/\tau) h^{2-\varepsilon}$, dann ist u_σ zulässig für (Q).

(Beachte: Steuerbeschränkungen trivial, da u_σ konvexe Linearkombination zweier zulässiger Punkte.)

$$\text{UND: } \|\bar{u}_h - u_\sigma\| = \sigma \|\hat{u} - \bar{u}_h\| \leq c h^{2-\varepsilon} \quad (*)$$

u_σ ist zulässig für das kontinuierliche Problem, aber "nah" an \bar{u}_h !!!

Zulässige konvexe Linearkombination

Konvexe Linearkombination: $u_\sigma = (1 - \sigma)\bar{u}_h + \sigma\hat{u}$

Wie groß muss man σ wählen, d.h. wie weit muss man in Richtung des Slater-Punktes gehen, um zulässig für (Q) zu werden?

Zu zeigen: $S u_\sigma \in K \Leftrightarrow y_a \leq (S u_\sigma)(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega$

Beispiel obere Schranke:

$$(S u_\sigma)(x) = (1 - \sigma)(S \bar{u}_h)(x) + \sigma S(\hat{u})(x) \leq \dots \leq y_b - \sigma\tau + c h^{2-\varepsilon}$$

\Rightarrow Wähle $\sigma = (c/\tau) h^{2-\varepsilon}$, dann ist u_σ zulässig für (Q).

(Beachte: Steuerbeschränkungen trivial, da u_σ konvexe Linearkombination zweier zulässiger Punkte.)

$$\text{UND: } \|\bar{u}_h - u_\sigma\| = \sigma \|\hat{u} - \bar{u}_h\| \leq c h^{2-\varepsilon} \quad (*)$$

u_σ ist zulässig für das kontinuierliche Problem, aber "nah" an \bar{u}_h !!!

Zulässige konvexe Linearkombination

Konvexe Linearkombination: $u_\sigma = (1 - \sigma)\bar{u}_h + \sigma\hat{u}$

Wie groß muss man σ wählen, d.h. wie weit muss man in Richtung des Slater-Punktes gehen, um zulässig für (Q) zu werden?

Zu zeigen: $S u_\sigma \in K \Leftrightarrow y_a \leq (S u_\sigma)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega$

Beispiel obere Schranke:

$$(S u_\sigma)(x) = (1 - \sigma)(S \bar{u}_h)(x) + \sigma S(\hat{u})(x) \leq \dots \leq y_b - \sigma\tau + c h^{2-\varepsilon}$$

\Rightarrow Wähle $\sigma = (c/\tau) h^{2-\varepsilon}$, dann ist u_σ zulässig für (Q).

(Beachte: Steuerbeschränkungen trivial, da u_σ konvexe Linearkombination zweier zulässiger Punkte.)

$$\text{UND: } \|\bar{u}_h - u_\sigma\| = \sigma \|\hat{u} - \bar{u}_h\| \leq c h^{2-\varepsilon} \quad (*)$$

u_σ ist zulässig für das kontinuierliche Problem, aber "nah" an \bar{u}_h !!!

Zulässige konvexe Linearkombination

Konvexe Linearkombination: $u_\sigma = (1 - \sigma)\bar{u}_h + \sigma\hat{u}$

Wie groß muss man σ wählen, d.h. wie weit muss man in Richtung des Slater-Punktes gehen, um zulässig für (Q) zu werden?

Zu zeigen: $S u_\sigma \in K \Leftrightarrow y_a \leq (S u_\sigma)(x) \leq y_b \quad \text{a.e. in } \Omega$

Beispiel obere Schranke:

$$(S u_\sigma)(x) = (1 - \sigma)(S \bar{u}_h)(x) + \sigma S(\hat{u})(x) \leq \dots \leq y_b - \sigma\tau + c h^{2-\varepsilon}$$

\Rightarrow Wähle $\sigma = (c/\tau) h^{2-\varepsilon}$, dann ist u_σ zulässig für (Q).

(Beachte: Steuerbeschränkungen trivial, da u_σ konvexe Linearkombination zweier zulässiger Punkte.)

$$\text{UND: } \|\bar{u}_h - u_\sigma\| = \sigma \|\hat{u} - \bar{u}_h\| \leq c h^{2-\varepsilon} \quad (*)$$

u_σ ist zulässig für das kontinuierliche Problem, aber "nah" an \bar{u}_h !!!

Fehlerabschätzung bei Zustandsschranken

Analog konstruiert man $u_\rho = (1 - \rho)\bar{u} + \rho\hat{u}$, das mit $\rho = c h^{2-\varepsilon}$ **zulässig** für das diskrete Problem wird.

Dann u_σ in (VI_h^Q) und u_ρ in (VI^Q) einsetzen, Variationsungleichungen addieren und (*) ausnutzen (und viel umformen ...)

Theorem

Unter den Voraussetzungen an Ω gilt für die variationelle Diskretisierung

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq c h^{1-\varepsilon}$$

für alle $\varepsilon > 0$ (allerdings hängt c von ε ab).

Fehlerabschätzung bei Zustandsschranken

Analog konstruiert man $u_\rho = (1 - \rho)\bar{u} + \rho\hat{u}$, das mit $\rho = c h^{2-\varepsilon}$ **zulässig** für das diskrete Problem wird.

Dann u_σ in (VI_h^Q) und u_ρ in (VI^Q) einsetzen, Variationsungleichungen addieren und (*) ausnutzen (und viel umformen ...)

Theorem

Unter den Voraussetzungen an Ω gilt für die variationelle Diskretisierung

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq c h^{1-\varepsilon}$$

für alle $\varepsilon > 0$ (allerdings hängt c von ε ab).

Fehlerabschätzung bei Zustandsschranken

Analog konstruiert man $u_\rho = (1 - \rho)\bar{u} + \rho\hat{u}$, das mit $\rho = c h^{2-\varepsilon}$ zulässig für das diskrete Problem wird.

Dann u_σ in (VI_h^Q) und u_ρ in (VI^Q) einsetzen, Variationsungleichungen addieren und (*) ausnutzen (und viel umformen ...)

Theorem

Unter den Voraussetzungen an Ω gilt für die variationelle Diskretisierung

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\| + \|\bar{y} - \bar{y}_h\| \leq c h^{1-\varepsilon}$$

für alle $\varepsilon > 0$ (allerdings hängt c von ε ab).

Bemerkungen

- ▶ Das Resultat sieht vergleichsweise schlecht aus (im Vgl. zum steuerbeschränkten Fall), ist aber im Hinblick auf die Regularität der Steuerung als optimal anzusehen.
- ▶ Durch eine Diskretisierung der Steuerung wird die Analysis erheblich komplexer (Regularität der Steuerung muss betrachtet werden, Achtung: maßwertige Lagrange Multiplikatoren verschlechtern Regularität der Lösung)
- ▶ Es zeigt sich: in 2D ist die Volldiskretisierung genauso gut wie die variationelle Diskretisierung

Bemerkungen

- ▶ Das Resultat sieht vergleichsweise schlecht aus (im Vgl. zum steuerbeschränkten Fall), ist aber im Hinblick auf die Regularität der Steuerung als optimal anzusehen.
- ▶ Durch eine Diskretisierung der Steuerung wird die Analysis erheblich komplexer (Regularität der Steuerung muss betrachtet werden, Achtung: maßwertige Lagrange Multiplikatoren verschlechtern Regularität der Lösung)
- ▶ Es zeigt sich: in 2D ist die Volldiskretisierung genauso gut wie die variationelle Diskretisierung

Ausblick ...

- ▶ ... auf **semilineare** Probleme mit Zustandsbeschränkungen:
Die Argumentation im linear-quadratischen basierte auf der Variationsungleichung mit der zulässigen Menge

$$U_{ad}^Q := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (Su)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

Im semilinearen Fall ist S kein linearer Operator mehr! Dann ist U_{ad} nicht mehr konvex und die Variationsungleichung gilt **nicht** mehr!

Es braucht dann eine stark modifizierte Analysis, die **hinreichende Bdg.'en zweiter Ordnung** berücksichtigt (Störungsargumente á la Robinson?!)

Ausblick ...

- ▶ ... auf **semilineare** Probleme mit Zustandsbeschränkungen:
Die Argumentation im linear-quadratischen basierte auf der Variationsungleichung mit der zulässigen Menge

$$U_{ad}^Q := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (Su)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

Im semilinearen Fall ist S **kein** linearer Operator mehr! Dann ist U_{ad} nicht mehr konvex und die Variationsungleichung gilt **nicht** mehr!

Es braucht dann eine stark modifizierte Analysis, die **hinreichende Bdg.'en zweiter Ordnung** berücksichtigt (Störungsargumente á la Robinson?!)

Ausblick ...

- ▶ ... auf **semilineare** Probleme mit Zustandsbeschränkungen:
Die Argumentation im linear-quadratischen basierte auf der Variationsungleichung mit der zulässigen Menge

$$U_{ad}^Q := \{u \in L^2(\Omega) \mid u_a \leq u(x) \leq u_b \text{ a.e. in } \Omega, y_a \leq (Su)(x) \leq y_b \text{ a.e. in } \Omega\}.$$

Im semilinearen Fall ist S **kein** linearer Operator mehr! Dann ist U_{ad} nicht mehr konvex und die Variationsungleichung gilt **nicht** mehr!

Es braucht dann eine stark modifizierte Analysis, die **hinreichende Bdg.'en zweiter Ordnung** berücksichtigt (Störungsargumente á la Robinson?!)

Ausblick ...

- ▶ ... auf **parabolische** (linear-quadratische) Probleme mit Zustandsbeschränkungen:

Für die obige Analysis braucht man L^∞ -FE-Abschätzungen im parabolischen Fall. Hier gibt es zwar Resultate, aber nicht viel und meistens mit viel zu starken Regularitätsannahmen (Johnson, Hackbusch).

Problem Steuerungsdiskretisierung:

Die maximale Regularität der Steuerung ist i.A. $\bar{u} \in L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega))$
⇒ Keine Diffbarkeit bzgl. der Zeit!!! Interpolationsfehlerabschätzungen hierfür?!

Ausblick ...

- ▶ ... auf **parabolische** (linear-quadratische) Probleme mit Zustandsbeschränkungen:

Für die obige Analysis braucht man L^∞ -FE-Abschätzungen im parabolischen Fall. Hier gibt es zwar Resultate, aber nicht viel und meistens mit viel zu starken Regularitätsannahmen (Johnson, Hackbusch).

Problem Steuerungsdiskretisierung:

Die maximale Regularität der Steuerung ist i.A. $\bar{u} \in L^r(0, T; W^{1,s}(\Omega))$
⇒ Keine Diffbarkeit bzgl. der Zeit!!! Interpolationsfehlerabschätzungen hierfür?!

That's it. Danke fürs Zuhören!