Adaptive Finite Elemente
Konvergenz für optimal Kontrollprobleme?

Kristina Kohls

Fachbereich Mathematik

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Zell am Ziller, Skiseminar, 07.-14.04.2009

Problemklasse

$$(P') \min_{u \in U^{ad}} J[u,y] \text{ unter } \mathbb{D}y = u \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, y = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

Annahmen:

1. $y \in Y' \subset U$ reelle Hilberträume und Funktionenräume über Ω
   Typischer Weise: $U = H^p(\Omega), Y' = H_0^q(\Omega)$ mit $q \geq p$
2. $U^{ad} \subset U$ abgeschlossen, beschränkt, konvex
3. Ω hat Lipschitzrand (für exakte Triangulierung polygonaler Rand)
4. $\mathbb{D}$ allgemeiner Differentialoperator
5. Y' ist ausreichend regulär, so dass $\mathbb{D}y \in U \ \forall y \in Y'$
6. $J[u,y] = \frac{1}{2}\|y - y_d\|_U^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2$ mit $\alpha > 0$, $y_d \in Y'$

Schwache Formulierung der Nebenbedingung

Bestimme $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_2$, so dass $\mathbb{D}_2^* \mathbb{D}_1 = \mathbb{D}$ und die Regularität minimiert wird:

$$\max_{i=1,2} \min_{\mathbb{D}_2^* \mathbb{D}_1 = \mathbb{D}} \max\{|n| \in \mathbb{N} : a_n^i \neq 0\} \text{ soll minimal sein.}$$

Mit: $\mathbb{D}_i = \sum_{|n| \in \mathbb{N}} a_n^i \partial^n,\ n \in \mathbb{N}^d,\ \partial^n := \prod_{i=1}^{d} (\frac{\partial}{\partial x_i})^{n_i}$.

Jetzt definiere die Bilinearform $B : Y \times Y \to \mathbb{R}$ wobei $Y \supseteq Y'$ der maximale Unterraum von U sei, dessen Elemente neben der nötigen Regularität für $\mathbb{D}_1$ und $\mathbb{D}_2$ auch noch Nullrandwerte haben:

$$B[y, w] := \langle \mathbb{D}_1 y, \mathbb{D}_2 w \rangle \ \forall y, w \in Y.$$

Neues Problem:

$$(P) : \min_{u \in U^{ad}} J[u, y] \text{ unter } B[y, w] = \langle u, w \rangle \ \forall w \in Y.$$

Unter gewissen Regularitätsbedingungen, liefert dieses Problem die selbe Lösung wie das Originalproblem (P').

Existenz und Eindeutigkeit

Aus der Numerik ist bekannt, daß die Aussage:

'Für jedes $u \in U$ existiert genau ein $y \in Y$, mit $B[y,w] = \langle u,w\rangle\ \forall w \in Y$.'

äquivalent dazu ist, daß B die infsup Bedingung erfüllt:

$$\exists \beta > 0 : \forall y \in Y : \sup_{w \in Y} \frac{B[y,w]}{\|w\|_Y} \geq \beta \|y\|_Y$$

$$\text{und } \forall w \in Y \setminus \{0\}\ \exists y \in Y : B[y,w] \neq 0.$$

Für ein allgemeines $\mathbb{D} := \sum_{|n| \in \mathbb{N}} a_n \partial^n$ hängt dies insbesondere von den Koeffizienten a_n ab.
Bei dem Beweis hiervon wird zunächst die Existenz von $S^{-1} \in L(Y,U)$ mit $B[y,w] = \langle S^{-1}y, w\rangle\ \forall w \in Y$ gezeigt, und dann dessen Invertierbarkeit, so daß hierbei nicht nur die bloße Existenz von $S : U \to Y$ mit $B[Su,w] = \langle u,w\rangle\ \forall w \in Y$ gezeigt wird sondern außerdem:

Eigenschaften von S

- Stetigkeit
- Linearität
- als Operator $S : U \to Y$ invertierbar
- $\|S\|_{L(U,U)} \leq \|S\|_{L(U,Y)} \leq \beta^{-1}$

$$\begin{aligned} \beta\|Su\|_U &\overset{\|y\|_Y \geq \|y\|_U}{\leq} \beta\|Su\|_Y \overset{inf sup}{\leq} \sup_{w\in Y} \frac{B[Su,w]}{\|w\|_Y} \\ &= \sup_{w\in Y} \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|_Y} \overset{Y\subseteq U}{=} \sup_{w\in U} \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|_Y} \\ &\overset{\|y\|_Y \geq \|y\|_U}{\leq} \sup_{w\in U} \frac{\langle u,w\rangle}{\|w\|_U} = \|u\|_U \end{aligned}$$

- $\|S^*\|_{L(U,U)} = \|S\|_{L(U,U)} \leq \beta^{-1}$

Optimalitätssystem und Lagrangemultiplikatoren

Lagrangefunktion:

$$L[u,y,p] = J[u,y] - B[y,p] + \langle p,u\rangle = \frac{1}{2}\|y-y_d\|_U^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2 - B[y,p] + \langle p,u\rangle$$

kontinuierliches Optimalitätssystem:

adjungierte Glg: $\forall w \in Y: \quad \langle y - y_d, w\rangle - B[w,p] = 0$

Gradienten Glg: $\forall v \in U^{ad}: \quad \alpha\langle u, v-u\rangle + \langle p, v-u\rangle \geq 0$

Zustands Glg: $\forall w \in Y: \quad B[y,w] - \langle w,u\rangle = 0$

$$p = S^*\nabla_y J(u,y) = S^*(y-y_d) = S^*(Su-y_d)$$

Diskretisierung

$\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von (exakten) Triangulierungen von Ω. Dabei sei für $k_1 \leq k_2$ τ_{k_2} eine Verfeinerung von τ_{k_1}.
Jedem Gitter dieser Folge entspricht eine Diskretisierung der Räume U, Y:

$$U_k := \{v \in U | v_{|T} \in \mathbb{P}_l \ \forall T \in \tau_k\}, \ Y_k := \{w \in Y | w_{|T} \in \mathbb{P}_l \ \forall T \in \tau_k\}.$$

Dies erhält die Eigenschaft $Y_k \subset U_k$, und erzeugt zwei Folgen geschachtelter (i.e.: $Y_k \subset Y_{k+1}, U_k \subset U_{k+1} \ \forall k \in \mathbb{N}$) reeller Hilberträume.

Des weiteren sei für jedes $k \in \mathbb{N}$: $U_k^{ad} := U^{ad} \cap U^k$, und $S_k : U_k \to Y_k$ definiert durch $B[S_k u_k, w_k] = \langle u_k, w_k \rangle \ \forall u_k \in U_k, w_k \in Y_k$.

Wird die Galerkin Lösung verwendet, so ergibt für jedes k Diskretisieren-Optimieren und Optimieren-Diskretisieren das selbe diskrete Optimalitätssystem:

diskretes Optimalitätssystem

adjungierte Glg: $\forall w_k \in Y_k: \quad \langle y_k - y_d, w_k\rangle - B[w_k, p_k] = 0$

Gradienten Glg: $\forall v_k \in U_k^{ad}: \quad \alpha\langle u_k, v_k - u_k\rangle + \langle p_k, v_k - u_k\rangle \geq 0$

Zustands Glg: $\forall w_k \in Y_k: \quad B[y_k, w_k] - \langle w_k, u_k\rangle = 0$

$$p_k = S_k^* \nabla_y J(u_k, y_k) = S_k^*(y_k - y_d) = S_k^*(S_k u_k - y_d).$$

Dabei ist zu beachten, dass B das selbe bleibt, und damit lässt sich analog zum kontinuierlichen Fall zeigen, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|S_k^*\|_{L(U,U)} = \|S_k\|_{L(U,U)} \leq \|S_k\|_{L(U,Y)} \leq \beta^{-1}.$$

Algorithmenmodule:

- SOLVE (Lösung der aktuellen diskreten Problemstellung)
- ESTIMATE (Fehlerschätzer, Elementweise)
- MARK (Markierung von Elementen zur Verfeinerung)
- REFINE (Verfeinerung zumindest der markierten Elemente)

Dieser Algorithmus benötigt neben den Problemdaten eine Anfangstriangulierung τ_0 und natürlich ein Abbruchskriterium, üblicherweise als Toleranz für den Gesamtfehlerschätzer.
Da der Algorithmus nur vorhandene Konformität erhalten kann, wi

SOLVE

Wir verwenden hier die Galerkin Lösung, da diese Optimieren-Diskretisieren=Diskretisieren-Optimieren garantiert.

Eine Implementierung von SOLVE beinhaltet immer auch Näherungen der Problemdaten, der Intgralbildung und der in B vorkommenden Ableitungen. Diese müssen nicht exakt sein. Bei einer vollstndigen Fehleranalyse müssen solche

'variational crimes'

berücksichtigt werden.

Wir gehen heute davon aus, dass SOLVE das diskrete Optimalitätssystem exakt löst.

ESTIMATE

Für die Fehlerschätzer sind zwei Dinge wichtig:

1. Sie müssen den tatsächlichen Fehler elementweise nach oben beschränken. (**obere Schranke**)
2. Sie sollten den tatsächlichen elementweisen Fehler nicht zu stark überschätzen, da dies, wenn die Überschätzung unregelmäßig ist, dazu führen könnte, daß die 'falschen' Elemente verfeinert werden. Außerdem könntees passieren, daß das Verfahren nicht abgebrochen wird, auch wenn der tatsächliche Fehler schon hinreichend klein ist. (**untere Schranke**)

Daneben ist für die Abschätzungen wichtig, daß der Fehlerschaetzer eine gewisse Struktur hat:

$$\epsilon_k(\tau_k')^2 = \sum_{T\in\tau_k'} \epsilon_k(T)^2 \text{ für alle } \tau_k' \subset \tau_k$$

Mark

Rechenaufwandminimierung pro Iteration $\Leftrightarrow$ Maximale Fehlerreduktion

Sei ϵ der Gesamtfehlerschätzer,$\epsilon(T)$ der Fehlerschätzer auf dem Element T und ϵ_{max} der maximale elementweise Fehlerschätzer.

- $M_k := \{T \in \tau_k : \epsilon(T) \geq \theta\epsilon_{max}\}$ für ein geeignetes $\theta \in [0, 1]$ Natürlich ist eine analoge Strategie auch für Erwartungswert, Mittelwert oder Minimum der elementweisen Fehler denkbar.
- Wähle ein geeignetes $\theta \in [0, 1]$ und sammle so viele Elemente aus τ_k in M_k, so daß der Fehler auf deren vereinigtem Gebiet über $\theta\epsilon$ liegt.
- Wie zuvor wähle aber M_k so, dass $\#M_k$ minimal ist.

Refine

REFINE soll alle Elemente des zuvor bestimmten M_k verfeinern. Um die Konformität des Gitters zu erhalten, kann es aber sein, daß mehr Elemente verfeinert werden.

zu verfeinernde Elemente $\neq$ markierte Elemente

Mögliche Verfahren:

- Grüner Abschluss
- 'newest vertex Bisektion'

Problem für die Konvergenzanalyse

Aufgrund der Adaptivität kann nicht erwartet werden, daß die Reihen der diskreten Räume U_k, Y_k dicht in den kontinuierlichen U, Y liegen.

Ansatz:

Betrachte zunächst die Hilberträume Y_∞, U_∞:

$$U_\infty := \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k}, \; Y_\infty := \overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k}.$$

Anhand dieser lässt sich analog zum diskreten und kontinuierlichen Fall
$U_\infty^{ad} = U_\infty \cap U^{ad}$ und
$S_\infty : U \to Y$ mit $B[S_\infty u_\infty, w_\infty] = \langle u_\infty, w_\infty \rangle \; \forall w_\infty \in Y_\infty$
definieren.

$$h_k(x) := \left(\sum_{x\in T\in\tau_k} |T| \right)^{\frac{1}{d}}$$ wird als Gitterweitenfuntion bezeichnet.

Idee:

$$\Omega_1 := \{x \in \Omega : h_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\}$$

$$\Omega_2 := \Omega \backslash \Omega_1$$

Auf Ω_1 sieht läuft das ganz genau wie im klassischen nicht adaptiven Fall.
Auf Ω_2 brauchen wir die obere Schranke und eine geeignete Markierungsstrategie i.e. MARK muss passend gewählt sein.

Es gilt außerdem wie zuvor:

$$\|S_\infty^*\|_{L(U_\infty,U_\infty)} = \|S_\infty\|_{L(U_\infty,U_\infty)} \leq \|S_\infty\|_{L(U_\infty,Y_\infty)} \leq \beta^{-1}.$$

Und mit der Quasi-Bestapproximation der Galerkinlösung gilt zusätzlich:

$$\|(S_k - S_\infty)u_\infty\|_U \leq C \inf_{y_k \in Y_k} \|S_\infty u_\infty - y_k\|_U \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \;\forall u_\infty \in U_\infty$$

$$\|(S_k^* - S_\infty^*)u_\infty\|_U \leq C \inf_{y_k \in Y_k} \|S_\infty^* u_\infty - y_k\|_U \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \;\forall u_\infty \in U_\infty$$

Die Konvergenz auf Ω_1 entspricht

$$\|u_k - u_\infty\|_U \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \text{ bzw. } \|y_k - y_\infty\|_U \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

und die Näherung auf Ω_2 dem Beweis, daß gilt:

$$u_\infty = u \text{ und } y_\infty = y.$$

Wenn $\|u_k - u_\infty\|_U \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ gilt, dann ist klar, daß:

$$\begin{aligned} \|y_k - y_\infty\|_U &= \|S_k u_k - S_\infty u_\infty\|_U \\ &\leq \|S_k u_k - S_k u_\infty\|_U + \|S_k u_\infty - S_\infty u_\infty\|_U \\ &\leq \beta^{-1}\|u_k - u_\infty\|_U + \|(S_k - S_\infty)u_\infty\|_U \\ &\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Aus der Summe der diskreten Gradientengleichung (für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$) und der entsprechenden für $k = \infty$, samt der Darstellung der adjundierten Zustände mit Hilfe von S_k, S_∞ gilt für alle $v_k \in U_k^{ad}$:

$$
\begin{aligned}
0 \leq\ & \alpha\langle u_\infty, u_k - u_\infty\rangle + \langle S_\infty^*(S_\infty u_\infty - y_d), u_k - u_\infty\rangle + \\
& \alpha\langle u_k, v_k - u_\infty + u_\infty - u_k\rangle + \langle S_k^*(S_k u_k - y_d), v_k - u_\infty + u_\infty - u_k\rangle \\
=\ & -\alpha\|u_\infty - u_k\|_U^2 - \|S_k(u_k - u_\infty)\|_U^2 \\
& + \langle (S_\infty^* S_\infty - S_k^* S_k)u_\infty, u_k - u_\infty\rangle + \langle (S_k^* - S_\infty^*)y_d, u_k - u_\infty\rangle \\
& + \alpha\langle u_k, v_k - u_\infty\rangle + \langle S_k^* S_k u_k, v_k - u_\infty\rangle - \langle S_k^* y_d, v_k - u_\infty\rangle
\end{aligned}
$$

Wähle also v_k als U-Projektion von u_∞ auf U_k^{ad}, von dieser ist aufgrund der Dichtheit der Räume bekannt, dass sie stark gegen u_∞ konvergiert. Da die ersten Terme in den letzten drei Summanden alle in der U-Norm beschränkt sind - $u_k \in U^{ad}$ und allein deshalb schon beschränkt - konvergieren diese f'ur $k \to \infty$ offenbar gegen Null.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\|u_\infty - u_k\|_U \quad &\leq \quad \alpha^{-1}\lim_{k\to\infty}\|(S_\infty^* S_\infty - S_k^* S_k)u_\infty\|_u \\ &\quad\; +\alpha^{-1}\lim_{k\to\infty}\|(S_k^* - S_\infty^*)y_d\|_U\end{aligned}$$

Falls die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Für den zweiten Summanden haben wir das bereits'

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\|(S_\infty^* S_\infty - S_k^* S_k)u_\infty\|_U \\ &\quad = \quad \lim_{k\to\infty}\left\|\left[S_k^*(S_\infty - S_k) + (S_\infty^* - S_k^*)S_\infty\right]u_\infty\right\|_U \\ &\quad \leq \quad \lim_{k\to\infty}\left\{\|S_k^*\|_{L(U,U)}\|(S_\infty - S_k)u_\infty\|_U + \|(S_\infty^* - S_k^*)(S_\infty u_\infty)\|_U\right\} \\ &\quad = \quad 0\end{aligned}$$

Zusammenfassung

Die starke Konvergenz von u_k gegen u_∞ und y_k gegen y_∞ ist also bewiesen. Es fehlt noch:

- $u = u_\infty$, $y = y_\infty$ Für den numerischen Fall, i.e. nur die Lösung einer gleichung $B[y, w] = \langle u, w \rangle \ \forall w \in Y$ ist dies alles schon geschehen:
  'A Basic Convergence Result for Conforming Adaptive Finite Elements',
  P. Morin, K.G. Siebert, A. Veeser,
  Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 18, No 5, 2008, World Scientific Publishing Company, 707-737
- In dem Zusammenhang auch Überprüfung bereits existenter Fehlerschätzer für die optimale Kontrolle, erfüllen sie die notwendigen Bedingungen? Gibt es andere Möglichkeiten?
- Geben Abwandlungen der Algorithmenmodule Sinn? Sollte MARK auf den gemeinsamen Fehlerschätzer von u_k und y_k angesetzt werden oder beide einzeln verwenden?