
Prüfungsfragen (Beispiele)

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sommersemester 2005

Dr. Daniel Lenz

1. Was versteht man unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung? Wie sind die Lösungen einer solchen definiert?
2. Wie kann eine gewöhnliche Differentialgleichung auf eine solche erster Ordnung reduziert werden? Wie hängen explizite gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung mit Integralgleichungen zusammen?
3. Wie funktioniert das Verfahren der Trennung der Variablen? Was versteht man unter einer exakten Differentialgleichung? Wie kann sie gelöst werden?
4. Geben Sie Beispiele für gewöhnliche Differentialgleichungen auf \mathbb{R} , deren Lösungen nicht eindeutig sind bzw. nicht auf ganz \mathbb{R} existieren.
5. Was besagt der bekannte Eindeutigkeitssatz für Lösungen? Wie wird er bewiesen?
6. Was besagt der Peanosche Existenzsatz? Wie wird er bewiesen? Welcher wichtige Satz spielt bei seinem Beweis eine Rolle?
7. Erläutern Sie das Verfahren von Picard/Lindelöf. Auf welchem Satz beruht es?
8. Wie lassen sich maximale Lösungen charakterisieren? Wie wird (im Falle eindeutiger Lösbarkeit) ihre Existenz gezeigt?
9. Was können Sie zur stetigen Abhängigkeit der Lösungen von den Daten sagen?

10. Was besagt das Lemma von Gronwall? Welche Rolle spielt es beim Beweis der Eindeutigkeit, bei Betrachtungen zur stetigen Abhängigkeit und beim Beweis globaler Existenz von Lösungen linearer Differentialgleichungen?
11. Welche Struktur hat die Menge der Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung. Welche Rolle spielen Fundamentalsysteme in diesem Zusammenhang? Wie ist die Lösungsmatrix definiert? Wie ergeben sich die Lösungen mit ihrer Hilfe? (Beweis)
12. In welchem Verhältnis stehen die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichungen zu denen der entsprechenden homogenen Differentialgleichung?
13. Geben Sie die Lösungsmatrix einer linearen Differentialgleichung der Form $y' = Ay$ mit konstantem A an? Wie kann man sie für diagonalisierbare A bzw. für beliebige A berechnen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten von A und dem Verhalten der Lösungen bei $+\infty$?
14. Was ist ein Fluß auf einem metrischen Raum? In welcher Beziehung stehen Flüsse und gewöhnliche Differentialgleichungen? (Wieso?) Wie lassen sich die Orbits eines Flusses klassifizieren?
15. Skizzieren Sie das Verhalten typischer linearer Flüsse in \mathbb{R}^2 . Was besagt der Satz von der linearisierten Stabilität? Wie wird er bewiesen?