

---

## Prüfungsfragen (Beispiele)

### Funktionalanalysis

Wintersemester 2005/2006

Dr. Daniel Lenz

---

1. Was ist eine Topologie? Was kann man mit ihr anfangen? Was hat das mit metrischen Räumen zu tun?
2. Was ist ein topologischer Vektorraum? Was ist ein normierter Raum? Was können Sie in diesem Rahmen zur Stetigkeit linearer Abbildungen sagen? Wie ist der Dualraum definiert? Welche Eigenschaften hat er?
3. Geben Sie Beispiele normierter Räume und ihrer Dualräume.
4. Was wissen Sie über  $\ell^p$  Räume? Welche Rolle spielen Höldersche Ungleichung und Minkowskische Ungleichung?
5. Was besagt der Satz von Hahn/Banach? Wie wird er bewiesen? Welche Rolle spielt das Zornsche Lemma beim Beweis? Diskutieren Sie Konsequenzen des Satzes von Hahn/Banach (Trennungssätze, Bipolarrensatz,...). Was haben Halbnormen mit absolut konvexen Menge zu tun?
6. Was besagt der Satz von Baire? Wie wird er bewiesen? Welche wichtigen Sätze folgen aus ihm (Wie?)?
7. Wann heißt ein Operator abgeschlossen? Was besagt der Satz vom abgeschlossenen Graphen? Wie wird er bewiesen?
8. Was können Sie zu Stabilität von Abgeschlossenheit und Invertierbarkeit sagen (Beweis)? Was hat das mit der Neumannschen Reihe zu tun?
9. Wie ist das Spektrum, die Resolventenmenge, die Resolvente eines Operators definiert? Welche Eigenschaften haben diese Objekte? Wie sieht das für Matrizen, wie für Multiplikationsoperatoren aus? Welche Rolle spielt der Spektralradius? (Beweise!)

10. Was ist ein Hilbertraum? Welche wichtige Identität erfüllt seine Norm? Wie wird das zum Beweis bester Approximationen benutzt? Was besagt der Projektionssatz? Wie wird er bewiesen? Was können Sie zur Entwicklung eines Vektors nach einer Orthonormalbasis sagen?
11. Wie sieht der Dualraum eines Hilbertraumes aus? Wie ist der adjungierte Operator definiert? Welche Norm hat er?