

---

## Analysis I

Wintersemester 2006/07

PD Dr. D. Lenz

---

### Zusatzmaterial 5

- (1) Zeigen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k b_k = 0$ , falls  $b_k \geq 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ .
- (2) Ermitteln Sie durch Umordnen die Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$  für  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$ .
- (3) Berechnen Sie: (a)  $\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-1}{k^2+2k}$  (b)  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3k+2}{k^2+3k}$ .
- (4) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:  
(a)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ , (b)  $\sum_{k \geq 1} \frac{k}{2^k}$ , (c)  $\sum_{k \geq 1} 3^k \frac{2k-2}{3k+4}$ , (d)  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^k}$ , (e)  $\sum_{k \geq 1} \frac{2k+1}{5k}$ ,  
(f)  $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{k+200}{2k+7}\right)^k$ , (g)  $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{2^k}$ , (h)  $\sum_{k \geq 1} \frac{3k}{4+1/k}$ , (i)  $\sum_{k \geq 1} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ , (j)  $\sum_{k \geq 1} (-1)^k \frac{k}{(k+2)^2}$ .