Analysis I

Wintersemester 2006/07 **PD Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe am 22.01.2007**

(1) Beweisen Sie den aus der Vorlesung bekannten Riemannschen Umordnungssatz für Reihen.

(2) Zeigen Sie: Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x \in (a, b)$, wenn sie in x rechts- und linksseitig differenzierbar ist und die beiden einseitigen Ableitungen übereinstimmen.

(3) Untersuchen Sie folgende Funktionen (und, wo möglich, auch ihre Ableitungen) auf links und rechtsseitige Differenzierbarkeit:

(a) abs: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{abs}(x) := |x|$,

(b) $[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x \mapsto [x] := \max\{z \in \mathbb{Z} : \ z \le x\}$,

(c) sgn: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} x/|x| & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$,

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \le 0, \end{cases}$.

(4) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in 0 differenzierbar und in allen anderen Punkten unstetig ist.