Skriptbausteine zur Vorlesung Maßtheorie *

Vorlesender: Prof. Dr. Bernd Hofmann

Der folgende Text soll die Nacharbeit der Vorlesung erleichtern und dabei an Definitionen, Sätze und Beispiele erinnern. Das Skript ist für Studierende der TU Chemnitz auf Anfrage erhältlich.

Mit dem Ziel der Verbesserung des aktuellen Textes werden Hinweise zu Tippfehlern und Unstimmigkeiten stets gern entgegengenommen. Dank allen Studierenden der letzten Vorlesung, die schon mit ihren Hinweisen beigetragen haben.

* Textstand: 01.02.2012. Vorlesung im Wintersemester 2011/12 an der Fakultät für Mathematik der TU Chemnitz. Der Vorlesende dankt Herrn Dr. Jens Flemming für die Mühe der Formulierung dieses Skripts und Überarbeitung sowie Präzisierung zahlreicher Komponenten auf der Grundlage des handschriftlichen Vorlesungsmanuskripts. Der Vorlesende dankt außerdem Herrn Prof. Dr. Reinhold Schneider (jetzt TU Berlin) für viele gute Ideen in Gliederung und Details aus seiner in Chemnitz gehaltenen Vorlesung Analysis III, die in diese Vorlesung und in die Skriptbausteine eingeflossen sind.

Inhaltsverzeichnis

1 Algebraische Strukturen bei Mengensystemen

Definition 1.1. Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Mit $\mathcal{P}(X)$ bezeichnen wir die *Potenzmenge*, d.h. das System aller Teilmengen, von X. Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt

(i) *Semiring* oder *zerlegbares Mengensystem* in X, wenn gilt:

  (a) $\emptyset \in \mathcal{M}$,

  (b) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$,

  (c) zu jedem Paar $A, B \in \mathcal{M}$ existieren paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ mit $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

(ii) *Ring* in X, wenn gilt:

  (a) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$,

  (b) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{M}$.

(iii) *Algebra* in X, wenn gilt:

  (a) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{M}$,

  (b) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$.

(iv) *σ-Ring* bzw. *σ-Algebra* in X, wenn $\mathcal{M}$ ein Ring bzw. eine Algebra in X ist, für den bzw. für die gilt:

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}.$$

(v) *monoton*, wenn für beliebige $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ gilt:

  (a) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$,

  (b) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Bemerkung. Man zeigt relativ leicht, dass jede σ-Algebra ein σ-Ring, jede Algebra ein Ring und jeder Ring ein Semiring ist.

Für $A \subseteq X$ werden wir die Menge $X \setminus A$ im Folgenden auch mit $\overline{A}$ bezeichnen, wenn klar ist, bezüglich welcher Grundmenge das Komplement gebildet wird.

Lemma 1.2. *Sei X eine beliebige nichtleere Menge.*

(i) Für jede Algebra $\mathcal{M}$ in X gilt: $A, B \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{M}$.

(ii) Für jede σ-Algebra $\mathcal{M} \subseteq X$ gilt: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Beweis. Nach den de-Morgan'schen Regeln gilt

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}.$$

Die Behauptungen folgen somit direkt aus Definition 1.1. $\square$

Die folgenden Beispiele sollen die definierten Mengenstrukturen etwas illustrieren.

Beispiel 1.3. In $X := \mathbb{R}$ ist das Mengensystem $\mathcal{M} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}$ ein Semiring, denn

- $\emptyset \in \mathcal{M}$ ist trivialerweise erfüllt,
- der Durchschnitt zweier Intervalle $(a, b]$ und $(c, d]$ ist entweder leer oder gleich dem Intervall $\big(\max\{a, c\}, \min\{b, d\}\big]$,
- für zwei Intervalle $(a, b]$ und $(c, d]$ ist $(a, b] \setminus (c, d]$ entweder leer oder gleich einer der Mengen $(a, b]$, $(d, b]$, $(a, c]$ oder $(a, c] \cup (d, b]$.

Beispiel 1.4. In einer unendlichen Menge X ist das Mengensystem $\mathcal{M} := \{A \subseteq X : A$ ist endlich oder $\overline{A}$ ist endlich$\}$ eine Algebra, denn

- für $A, B \in \mathcal{M}$ gilt: $A \cup B$ endlich, falls A und B endlich,
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ endlich, falls $\overline{A}$ oder $\overline{B}$ endlich,
- aus $A \in \mathcal{M}$ folgt trivialerweise $\overline{A} \in \mathcal{M}$.

Beispiel 1.5. In einer überabzählbaren Menge X ist das Mengensystem $\mathcal{M} := \{A \subseteq X : A$ höchstens abzählbar oder $\overline{A}$ höchstens abzählbar$\}$ eine σ-Algebra, denn

- für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ gilt:
  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ höchstens abzählbar, falls alle A_i höchstens abzählbar,
  $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$ höchstens abzählbar, falls mindestens ein $\overline{A_i}$ höchstens abzählbar,
- aus $A \in \mathcal{M}$ folgt trivialerweise $\overline{A} \in \mathcal{M}$.

Satz 1.6. *Seien X eine beliebige nichtleere Menge, T eine Indexmenge und $(\mathcal{R}_t)_{t\in T}$ eine Familie von Ringen in X. Dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{t\in T} \mathcal{R}_t$ wieder ein Ring in X. Entsprechendes gilt für Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren und monotone Mengensysteme in X.*

Beweis. Es gilt

$$A, B \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{R}_t \;\Rightarrow\; A, B \in \mathcal{R}_t \;\forall t \in T \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{R}_t \;\forall t \in T \;\Rightarrow\; A \cup B \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{R}_t$$

und

$$A, B \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{R}_t \;\Rightarrow\; A, B \in \mathcal{R}_t \;\forall t \in T \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{R}_t \;\forall t \in T \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{R}_t.$$

Völlig analog zeigt man die Behauptung für Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren und monotone Mengensysteme. □

Definition 1.7. Sei X eine beliebige nichtleere Menge und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein nichtleeres Mengensystem. Der Durchschnitt aller $\mathcal{M}$ umfassenden Ringe in X heißt der von $\mathcal{M}$ *erzeugte Ring* $\mathcal{R}(\mathcal{M})$. Entsprechend definieren wir die von $\mathcal{M}$ *erzeugte Algebra* $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, den von $\mathcal{M}$ *erzeugten σ-Ring* $\mathcal{R}_\sigma(\mathcal{M})$, die von $\mathcal{M}$ *erzeugte σ-Algebra* $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$ und das von $\mathcal{M}$ *erzeugte monotone Mengensystem* $m(\mathcal{M})$.

Bemerkung.

- Definition 1.7 ist korrekt, da die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ jedes Mengensystem $\mathcal{M}$ in X enthält und zugleich Ring, Algebra, σ-Ring, σ-Algebra und monotones Mengensystem ist; d.h. am Durchschnitt in Definition 1.7 nimmt mindestens eine Menge teil.
- Die von einem Mengensystem $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{M})$ wird manchmal auch mit $\sigma(\mathcal{M})$ bezeichnet und *Borel'sche Erweiterung* von $\mathcal{M}$ genannt.
- Der von einem Mengensystem erzeugte Ring ist im Sinne der Inklusion der kleinste Ring, der dieses Mengensystem enthält. Entsprechendes gilt für Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren und monotone Mengensysteme.

Lemma 1.8. *Sei X eine beliebige nichtleere Menge und seien $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ zwei nichtleere Mengensysteme. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{M}_2),\; \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{M}_1) \;\Rightarrow\; \mathcal{R}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{R}(\mathcal{M}_2).$$

Entsprechendes gilt für Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren und monotone Mengensysteme.

Beweis. Aus $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{M}_2)$ folgt $\mathcal{R}(\mathcal{M}_1) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{M}_2)) = \mathcal{R}(\mathcal{M}_2)$ und aus $\mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{M}_1)$ folgt $\mathcal{R}(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathcal{M}_1)) = \mathcal{R}(\mathcal{M}_1)$, d.h. $\mathcal{R}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{R}(\mathcal{M}_2)$. Völlig analog folgt die Behauptung für Algebren, σ-Ringe, σ-Algebren und monotone Mengensysteme. □

Satz 1.9. *Eine Algebra $\mathcal{M}$ in einer nichtleeren Menge X ist genau dann eine σ-Algebra, wenn sie ein monotones Mengensystem ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra. Dann gilt für $A_1, A_2, \ldots$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ offensichtlich $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$ und für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}} \in \mathcal{M}$, d.h. $\mathcal{M}$ ist ein monotones Mengensystem.

„$\Leftarrow$": Sei nun $\mathcal{M}$ eine monotone Algebra und seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$. Setzen wir $B_j := \bigcup_{i=1}^{j} A_i$ für $j \in \mathbb{N}$, so gilt $B_j \in \mathcal{M}$ und $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$, also $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{M}$. Die Behauptung folgt nun aus $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{M}$. □

Der folgende Satz ist sehr konstruktiv und liefert eine Vorschrift dafür, wie man aus einem Semiring einen Ring erzeugt.

Satz 1.10. *Sei X eine beliebige nichtleere Menge, sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Semiring und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ das System aller Vereinigungen von endlich vielen, paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{S}$. Dann gilt $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathcal{V}$.*

Beweis. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S})$ gilt und dass $\mathcal{V}$ ein Ring ist.

Sei also $A \in \mathcal{V}$. Dann existieren Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S})$ mit $A = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ und somit gilt $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ (wegen Definition 1.1 (ii)(a)). Also ist $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S})$ gezeigt.

Seien nun $A, B \in \mathcal{V}$. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{S}$ mit $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ und paarweise disjunkte Mengen $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{S}$ mit $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Da

$$A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$

gilt und die Mengen der Form $A_i \cap B_j$ paarweise disjunkt sind, folgt zunächst $A \cap B \in \mathcal{V}$. Wegen Definition 1.1 (i)(c) existieren für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ paarweise disjunkte Mengen $C_1^{i,j}, C_2^{i,j}, \ldots, C_{p_{i,j}}^{i,j} \in \mathcal{S}$ mit $A_i \setminus B_j = C_1^{i,j} \cup \cdots \cup C_{p_{i,j}}^{i,j}$ und somit gilt

$$A \setminus B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcap_{j=1}^{n} (A \setminus B_j) = \bigcap_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i \setminus B_j) \right) = \bigcap_{j=1}^{n} \left(\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{p_{i,j}} C_k^{i,j} \right).$$

Aus der Definition von $\mathcal{V}$ folgt

$$\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{p_{i,j}} C_k^{i,j} \in \mathcal{V}$$

für $j = 1, \ldots, n$ und aus der bereits gezeigten Durchschnittseigenschaft von $\mathcal{V}$ erhalten wir somit $A \setminus B \in \mathcal{V}$.

Es bleibt $A \cup B \in \mathcal{V}$ zu zeigen. Dies folgt aus

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = \bigcap_{j=1}^{n} \left(\left(\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{p_{i,j}} C_k^{i,j} \right) \cup B \right),$$

da die Mengen $A \setminus B$ und B disjunkt sind. $\square$

Lemma 1.11. *Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra in einer nichtleeren Menge X, so ist $m(\mathcal{A})$ eine σ-Algebra.*

Beweis. Wenn wir zeigen können, dass $m(\mathcal{A})$ eine Algebra ist, so folgt die Behauptung aus Satz 1.9. Wir zeigen zunächst die Abgeschlossenheit von $m(\mathcal{A})$ bezüglich der Komplementbildung. Sei dazu $\mathcal{M} := \{A \in m(\mathcal{A}) : \overline{A} \in m(\mathcal{A})\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{M}$ abgeschlossen bezüglich der Komplementbildung und es gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ gilt $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots \in \mathcal{M}$ und $\overline{A_1} \supseteq \overline{A_2} \supseteq \ldots$ und aus $\mathcal{M} \subseteq m(\mathcal{A})$ und der Monotonie von $m(\mathcal{A})$ folgt somit

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in m(\mathcal{A}) \qquad \text{und} \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in m(\mathcal{A}),$$

d.h. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$ (analog für $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$). Also ist $\mathcal{M}$ monoton und deshalb gilt $\mathcal{M} = m(\mathcal{A})$.

Es verbleibt die Abgeschlossenheit von $m(\mathcal{A})$ bezüglich endlicher Vereinigungen zu zeigen. Für $A \in m(\mathcal{A})$ setzen wir dazu $\mathcal{M}_A := \{B \in m(\mathcal{A}) : A \cup B \in m(\mathcal{A})\}$ und wir setzen $\mathcal{N} := \{A \in m(\mathcal{A}) : m(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_A\}$. Wie man leicht sieht, ist $\mathcal{M}_A$ für $A \in \mathcal{A}$ monoton und es gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_A$ für $A \in \mathcal{A}$. Also folgt $m(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_A$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und damit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$. Wir zeigen nun die Monotonie von $\mathcal{N}$. Seien also $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{N}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$. Dann gilt $m(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_{A_i}$ für $i \in \mathbb{N}$ und für beliebiges $C \in m(\mathcal{A})$ folgt somit $C \cup A_i \in m(\mathcal{A})$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also auch $C \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in m(\mathcal{A})$, da $m(\mathcal{A})$ monoton ist. Damit ist $m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$, d.h. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{N}$, gezeigt (analog für $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$). Aus $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ und der Monotonie von $\mathcal{N}$ folgt nun $m(\mathcal{A}) = \mathcal{N}$. Schließlich seien nun $A, B \in m(\mathcal{A})$ beliebig. Dann gilt $A, B \in \mathcal{N}$ und somit $A \in \mathcal{M}_B$, d.h. $A \cup B \in m(\mathcal{A})$. $\square$

Satz 1.12. *Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra in einer nichtleeren Menge X, so gilt $m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.*

Beweis. Aus $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ und Satz 1.9 folgt $m(\mathcal{A}) \subseteq m(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$. Und aus $\mathcal{A} \subseteq m(\mathcal{A})$ und Lemma 1.11 folgt $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(m(\mathcal{A})) = m(\mathcal{A})$. $\square$

Definition 1.13. Sei X ein metrischer Raum. Die vom System aller offenen Mengen in X erzeugte σ-Algebra heißt *Borel'sche σ-Algebra*. Wir bezeichnen sie mit dem Symbol $\mathcal{B}(X)$. Die Mengen der Borel'schen σ-Algebra heißen *Borel-Mengen*. Eine Menge heißt vom *Typ F_σ*, wenn sie als Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen dargestellt werden kann, und vom *Typ G_δ*, wenn sie als Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen dargestellt werden kann.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass Mengen vom Typ F_σ und Mengen vom Typ G_δ stets Borel-Mengen sind. Das σ in F_σ steht für „Summe“ (Vereinigung), das F für „fermé“ (französisch: abgeschlossen). Das δ in G_δ bedeutet „Durchschnitt“.

Beispiel 1.14. Sei $X := \mathbb{R}^n$ und sei $\mathcal{S} := \{\bigotimes_{i=1}^n (a_i, b_i] : a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\} \cup \{\emptyset\}$ der Semiring aller halboffenen n-Zellen im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ die Menge aller Vereinigungen von endlich vielen paarweise disjunkten n-Zellen aus $\mathcal{S}$. Der Ring $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ wird als *Ring der Elementarmengen* bezeichnet.

2 Mengenfunktionen

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ das *erweiterte System der reellen Zahlen* und legen die folgenden Konventionen fest:

(i) $x \pm \infty = \pm\infty, \quad \frac{x}{\pm\infty} = 0 \quad$ für $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $x \cdot (\pm\infty) = \pm(\operatorname{sgn} x) \cdot \infty \quad$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(iii) $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$,

(iv) $\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty, \quad \pm\infty - (\mp\infty) = \pm\infty$,

(v) $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty, \quad (\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$.

Definition 2.1. Sei X eine beliebige nichtleere Menge und sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleer.

(i) Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt eine auf $\mathcal{M}$ definierte *Mengenfunktion*.

(ii) Eine Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$, die höchstens einen der Werte $\pm\infty$ annimmt, heißt *additiv* auf $\mathcal{M}$, wenn für alle Mengen $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \cup B \in \mathcal{M}$ und $A \cap B = \emptyset$ gilt:

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B).$$

(iii) Eine additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *volladditiv* (oder σ-additiv) auf $\mathcal{M}$, wenn für alle Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gilt:

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

(iv) Eine additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *subvolladditiv* (oder σ-subadditiv) auf $\mathcal{M}$, wenn für alle Mengen $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt:

$$\varphi(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

Bemerkung. Falls die Reihe in Definition 2.1 (iii) konvergiert, so handelt es sich um absolute Konvergenz, da sich die linke Seite der Gleichung bei Vertauschung der Mengen A_i nicht ändert. D.h. die Reihe hat für beliebige Permutationen der $\varphi(A_i)$ stets den selben Wert. Aus dem Riemann'schen Umordnungssatz folgt damit die absolute Konvergenz.

Beispiel 2.2. Seien X eine unendliche Menge und $\mathcal{M} := \mathcal{P}(X)$. Dann ist die durch

$$\varphi(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ endlich}, \\ +\infty, & A \text{ unendlich} \end{cases}$$

gegebene Mengenfunktion offensichtlich additiv, aber weder volladditiv noch subvolladditiv.

Beispiel 2.3. Seien $X := \mathbb{R}$ und $\mathcal{M} := \{(n, n+1] : n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist die durch

$$\varphi((n, n+1]) := \begin{cases} 0, & n \text{ gerade}, \\ 1, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gegebene Mengenfunktion trivialerweise additiv, da keine Mengen $A, B \in \mathcal{M}$ mit $A \cup B \in \mathcal{M}$ existieren.

Beispiel 2.4. Seien $X := \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{M} := \mathcal{P}(X)$, sei $\tilde{X} := \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine höchstens abzählbare Menge und sei $f : \tilde{X} \to [0, \infty)$ eine beliebige Funktion. Dann ist die durch

$$\varphi(A) := \sum_{x_i \in A} f(x_i)$$

gegebene Mengenfunktion volladditiv.

Satz 2.5 (Eigenschaften von Mengenfunktionen)**.** *Seien $\mathcal{R}$ ein Ring in einer nichtleeren Menge X und $\varphi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine additive Mengenfunktion. Dann gilt:*

(i) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{R},\ A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \ \Rightarrow\ \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i).$

(ii) $A, B \in \mathcal{R},\ B \subseteq A,\ \varphi(B) \neq \pm\infty \ \Rightarrow\ \varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B).$

(iii) Existiert ein $A \in \mathcal{R}$ mit $\varphi(A) \neq \pm\infty$, so gilt $\varphi(\emptyset) = 0$.

(iv) $A, B \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B).$

Mit der zusätzlichen Forderung $\varphi(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt außerdem:

(v) $A, B \in \mathcal{R},\ B \subseteq A \ \Rightarrow\ \varphi(B) \leq \varphi(A).$

(vi) $A, B \in \mathcal{R} \ \Rightarrow\ \varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B).$

(vii) φ subvolladditiv $\Leftrightarrow$ φ volladditiv.

Beweis.

(i) Die Behauptung folgt per Induktion aus Definition 2.1 (ii).

(ii) $\varphi(A) = \varphi((A \setminus B) \cup B) = \varphi(A \setminus B) + \varphi(B).$

(iii) $\varphi(\emptyset) = \varphi(A \setminus A) = \varphi(A) - \varphi(A) = 0$.

(iv) $\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi\big((A \cap B) \cup (A \setminus B)\big) + \varphi(B) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \setminus B) + \varphi(B)$
$= \varphi(A \cap B) + \varphi\big((A \setminus B) \cup B\big) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cup B)$.

(v) $\varphi(A) = \varphi\big((A \setminus B) \cup B\big) = \varphi(A \setminus B) + \varphi(B) \geq \varphi(B)$.

(vi) $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

(vii) Wir zeigen zunächst die Richtung „$\Leftarrow$“. Seien $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Setzen wir $B_i := A \cap A_i \in \mathcal{R}$ für $i \in \mathbb{N}$ sowie $C_1 := B_1$ und $C_i := B_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j) \in \mathcal{R}$, so gilt $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $C_i \subseteq B_i \subseteq A_i$ und die C_i sind paarweise disjunkt. Es folgt

$$\varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i),$$

d.h. φ ist subvolladditiv.

Wir zeigen nun „$\Rightarrow$“. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in \mathcal{R}$$

und somit

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \varphi\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)\right) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \varphi\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)\\ &\geq \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i).\end{aligned}$$

Mit $n \to \infty$ folgt nun

$$\varphi(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

Die vorausgesetzte Subvolladditivität liefert die Behauptung. □

Satz 2.6. *Seien $\mathcal{R}$ ein Ring in einer nichtleeren Menge X und $\varphi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine additive Mengenfunktion. Dann sind äquivalent:*

(i) φ ist volladditiv.

(ii) Für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(A_i) = \varphi(A).$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Dazu führen wir die Mengen $B_1 := A_1$ und $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ $(i = 2, 3, ...)$ ein, für welche gilt

$$A_j = \bigcup_{i=1}^{j} B_i \qquad \text{und} \qquad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Offenbar sind die B_i paarweise disjunkt. Somit folgt

$$\varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} \varphi(B_i) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{j} B_i\right) = \lim_{j\to\infty} \varphi(A_j).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Seien $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt. Setzen wir $A_j := \bigcup_{i=1}^{j} B_i$, so gilt $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Daraus folgt

$$\varphi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \varphi(A) = \lim_{j\to\infty} \varphi(A_j) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\bigcup_{i=1}^{j} B_i\right) = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{j} \varphi(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(B_i).$$

□

Satz 2.7. *Seien $\mathcal{R}$ ein Ring in einer nichtleeren Menge X und $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ eine volladditive Mengenfunktion. Für alle $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ und $B := \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{R}$ gilt dann*

$$\varphi(B) = \lim_{i\to\infty} \varphi(B_i).$$

Beweis. Setzen wir $A_i := B_1 \setminus B_i$, so gilt $A_i \in \mathcal{R}$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$. Wegen $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = B_1 \setminus B \in \mathcal{R}$ gilt $\varphi(A) = \varphi(B_1) - \varphi(B)$ und mit den Sätzen 2.5 (ii) und 2.6 folgt

$$\varphi(B) = \varphi(B_1) - \varphi(A) = \varphi(B_1) - \lim_{i\to\infty} \varphi(A_i) = \varphi(B_1) - \lim_{i\to\infty} \big(\varphi(B_1) - \varphi(B_i)\big) = \lim_{i\to\infty} \varphi(B_i).$$ □

Satz 2.8. *Seien $\mathcal{R}$ ein Ring in einer nichtleeren Menge X und $\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ eine additive Mengenfunktion. Gilt für alle $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$ die Aussage $\lim_{i\to\infty} \varphi(B_i) = 0$, so ist φ volladditiv.*

Beweis. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkte Mengen und sei $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Setzen wir $B_j := \bigcup_{i=j+1}^{\infty} A_i$, so gilt $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ und $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \emptyset \in \mathcal{R}$. Damit gilt nach Voraussetzung $\lim_{j\to\infty} \varphi(B_j) = 0$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{j\to\infty} \varphi(B_j) &= \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j} A_i\right)\right) \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\varphi(A) - \sum_{i=1}^{j} \varphi(A_i)\right) = \varphi(A) - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i), \end{aligned}$$

d.h. $\varphi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$. □

3 Inhalt und Maß – Konstruktion von Maßen

In diesem Kapitel betrachten wir Mengensysteme $\mathcal{M}$ in X, wobei wieder X als eine beliebige nichtleere Menge vorausgesetzt wird. Weiter betrachten wir darauf definierte additive Mengenfunktionen φ. Zusätzlich schließen wir die singulären Fälle $\varphi(A) \equiv +\infty$ und $\varphi(A) \equiv -\infty$ für alle $A \in \mathcal{M}$ aus. Wegen Satz 2.5 (iii) gilt dann für $\varphi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ auf dem Mengenring $\mathcal{R}$ stets $\varphi(\emptyset) = 0$.

Definition 3.1. Eine auf einem Ring $\mathcal{R}$ definierte Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *Inhalt*, wenn sie additiv und nichtnegativ ist. Ein auf einer σ-Algebra definierter Inhalt heißt *Maß*, wenn er volladditiv ist.

Bemerkung. Für die Maßtheorie sind die Begriffe σ-Algebra und Maß von zentraler Bedeutung.

Definition 3.2. Seien $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ zwei Mengensysteme mit $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ und seien $\varphi_1 : \mathcal{M}_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\varphi_2 : \mathcal{M}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Mengenfunktionen. Die Mengenfunktion φ_2 heißt *Fortsetzung* von φ_1 auf $\mathcal{M}_2$, wenn $\varphi_1(A) = \varphi_2(A)$ für alle $A \in \mathcal{M}_1$ gilt. In diesem Fall heißt φ_1 *Einschränkung* von φ_2 auf $\mathcal{M}_1$.

Satz 3.3. *Sei $\mathcal{S}$ ein Semiring.*

(i) Jede additive Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ lässt sich in eindeutiger Weise zu einer additiven Mengenfunktion $\tilde{\varphi} : \mathcal{R}(\mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen.

(ii) Jede additive, subvolladditive und nichtnegative Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ lässt sich in eindeutiger Weise zu einem subvolladditiven Inhalt auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ fortsetzen.

Beweis. Wir zeigen zunächst (i). Sei $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ beliebig. Nach Satz 1.10 existieren paarweise disjunkte Mengen $S_1, S_2, \ldots, S_m \in \mathcal{S}$ mit $A = \bigcup_{i=1}^m S_i$. Wir setzen entsprechend

$$\tilde{\varphi}(A) := \sum_{i=1}^{m} \varphi(S_i).$$

Zunächst müssen wir zeigen, dass $\tilde{\varphi}(A)$ nicht von der konkreten Wahl der S_i abhängt. Seien also $T_1, T_2, \ldots, T_n \in \mathcal{S}$ weitere paarweise disjunkte Mengen mit $A = \bigcup_{j=1}^n T_j$. Dann gilt

$$S_i = S_i \cap A = S_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} T_j \right) = \bigcup_{j=1}^{n} (S_i \cap T_j)$$

für $i = 1, \dots, m$ und analog $T_j = \bigcup_{i=1}^m (S_i \cap T_j)$ für $j = 1, \dots, n$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \varphi(S_i) &= \sum_{i=1}^m \varphi\left(\bigcup_{j=1}^n (S_i \cap T_j)\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \varphi(S_i \cap T_j)\\ &= \sum_{j=1}^n \varphi\left(\bigcup_{i=1}^m (S_i \cap T_j)\right) = \sum_{j=1}^n \varphi(T_j),\end{aligned}$$

d.h. $\tilde{\varphi}(A)$ ist von der konkreten Wahl der S_i unabhängig.

Trivialerweise ist $\tilde{\varphi}$ eine Fortsetzung von φ auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$. Wir zeigen nun die Additivität von $\tilde{\varphi}$. Seien also $A, B \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ mit $A \cap B = \emptyset$ und seien $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ paarweise disjunkt mit $A = \bigcup_{i=1}^m S_i$ sowie $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{S}$ paarweise disjunkt mit $B = \bigcup_{j=1}^n T_j$. Offensichtlich gilt dann auch $S_i \cap T_j = \emptyset$ für alle i und j und somit

$$\tilde{\varphi}(A \cup B) = \tilde{\varphi}\left(\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^n T_j\right)\right) = \sum_{i=1}^m \varphi(S_i) + \sum_{j=1}^n \varphi(T_j) = \tilde{\varphi}(A) + \tilde{\varphi}(B).$$

Es verbleibt der Beweis zur Eindeutigkeit der Fortsetzung. Sei $\tilde{\psi} : \mathcal{R}(\mathcal{S}) \to \overline{\mathbb{R}}$ eine weitere additive Fortsetzung von φ auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$. Dann gilt für $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ mit $A = \bigcup_{i=1}^m S_i$ und paarweise disjunkten $S_1, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ die Beziehung

$$\tilde{\psi}(A) = \tilde{\psi}\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right) = \sum_{i=1}^m \tilde{\psi}(S_i) = \sum_{i=1}^m \varphi(S_i) = \tilde{\varphi}(A).$$

Wir zeigen nun (ii). Sei $\tilde{\varphi}$ wie im Beweis zu (i). Dann gilt offensichtlich $\tilde{\varphi}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ und die Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ ist eindeutig bestimmt, da sie additiv ist. Es verbleibt der Beweis der Subvolladditivität.

Seien zunächst $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ und $A := \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $S_1, S_2, \dots, S_m \in \mathcal{S}$ mit $A = \bigcup_{j=1}^m S_j$ und paarweise disjunkte Mengen $S_1^i, S_2^i, \dots, S_{m_i}^i \in \mathcal{S}$ mit $A_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} S_k^i$. Für jedes feste i sind die Mengen der Form $S_j \cap S_k^i$ dann ebenfalls paarweise disjunkt und es gilt

$$A_i = A \cap A_i = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^{m_i} (S_j \cap S_k^i)$$

für $i = 1, 2, \dots$ sowie

$$S_j = A \cap S_j = \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \cap S_j = \left(\bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{m_i} S_k^i\right) \cap S_j = \bigcup_{i=1}^\infty \bigcup_{k=1}^{m_i} (S_k^i \cap S_j)$$

für $j = 1, \dots, m$. Aufgrund der Subvolladditivität von φ gilt nun

$$\varphi(S_j) \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \varphi(S_k^i \cap S_j)$$

und somit

$$\tilde{\varphi}(A) = \sum_{j=1}^{m} \varphi(S_j) \le \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \varphi(S_k^i \cap S_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_i} \varphi(S_k^i \cap S_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(A_i).$$

Seien nun $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ sowie $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Setzen wir $B_i := A_i \cap A$ und $C_i := A_i \setminus A$, so gilt $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ und $B_i \cap C_i = \emptyset$. Also folgt

$$\tilde{\varphi}(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(B_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \big(\tilde{\varphi}(B_i) + \tilde{\varphi}(C_i)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(B_i \cup C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}(A_i).$$

□

Bemerkung. Nach Satz 2.5 (vii) ist der subvolladditive Inhalt in Satz 3.3 (ii) sogar volladditiv.

Beispiel 3.4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{S} := \{\bigotimes_{i=1}^{n}(a_i, b_i] : a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\} \cup \{\emptyset\}$ der Semiring aus Beispiel 1.14. Dann ist die Fortsetzung der durch

$$\mu\left(\bigotimes_{i=1}^{n}(a_i, b_i]\right) := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \qquad \text{und} \qquad \mu(\emptyset) := 0$$

gegebenen Mengenfunktion $\mu : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ entsprechend Satz 3.3 ein subvolladditiver Inhalt auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$, denn man kann zeigen, dass μ subvolladditiv ist (die Nichtnegativität ist offensichtlich).

Beispiel 3.5 (Dirac-Maß)**.** Seien $X := \mathbb{R}$ und $\mathcal{M} := \mathcal{P}(X)$. Dann ist die durch

$$\varphi(A) := \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A \end{cases}$$

definierte Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein Maß. Dieses Maß wird als in Null konzentriertes *Dirac-Maß* oder als Dirac-Maß mit Trägerpunkt Null bezeichnet.

Definition 3.6. Eine nichtnegative Mengenfunktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *äußeres Maß*, wenn gilt:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) μ^* ist monoton, d.h. für $A \subseteq B \subseteq X$ gilt $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

(iii) Für alle $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Bemerkung. Die Nichtnegativität des äußeres Maßes muss eigentlich nicht vorausgesetzt werden, denn sie folgt unmittelbar aus den Forderungen (i) und (ii). Die Eigenschaft (iii) ist eng verbunden mit der Subvolladditivität einer Mengenfunktion. Jedoch weisen wir an dieser Stelle deutlich darauf hin, dass äußere Maße nicht additiv sein müssen. Zum Beispiel ist

$$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & A \text{ höchstens abzählbar,} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein äußeres Maß auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ von $\mathbb{R}$, jedoch nicht additiv, denn

$$1 = \mu^*([0,1] \cup [4,5]) \neq \mu^*([0,1]) + \mu^*([4,5]) = 2.$$

Beispiel 3.7. Sei $X := [0,1]$. Dann ist die durch

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \sup A, & A \neq \emptyset, \\ 0, & A = \emptyset \end{cases}$$

gegebene Mengenfunktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ ein äußeres Maß. Denn μ^* ist offensichtlich nichtnegativ und erfüllt (i) und (ii) aus Definition 3.6. Zum Nachweis von (iii) seien $A_1, A_2, \ldots \subseteq X$ beliebig und es sei $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Es gilt nun $\sup A \leq \sup X = 1$ und somit existiert für jedes $\varepsilon > 0$ nach Definition des Supremums ein $x_\varepsilon \in A$ mit $\sup A \leq x_\varepsilon + \varepsilon$. Weiter existiert ein $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $x_\varepsilon \in A_{i_\varepsilon}$, sodass

$$\mu^*(A) = \sup A \leq x_\varepsilon + \varepsilon \leq \sup A_{i_\varepsilon} + \varepsilon \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \sup A_i = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

folgt. Für $\varepsilon \to 0$ folgt Eigenschaft (iii).

Satz 3.8. *Seien $\mathcal{R}$ ein Ring in X und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Für $E \subseteq X$ bezeichne*

$$\mathcal{M}_E := \left\{ \{U_i \in \mathcal{R} : i \in \mathbb{N}\} : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right\}$$

die Menge aller abzählbaren Überdeckungen von E. Dann definiert die durch

$$\mu^*(E) := \begin{cases} \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) : \{U_i : i \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{M}_E\right\}, & \mathcal{M}_E \neq \emptyset, \\ +\infty, & \mathcal{M}_E = \emptyset \end{cases}$$

gegebene Mengenfunktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ ein äußeres Maß.

Beweis. Offensichtlich ist $\mu^*(\emptyset) = 0$ erfüllt. Für beliebige $A \subseteq B \subseteq X$ folgt $\mathcal{M}_A \supseteq \mathcal{M}_B$ und somit $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, d.h. μ^* ist monoton. Zum Beweis von Eigenschaft (iii) in Definition 3.6 seien $E_1, E_2, \ldots \subseteq X$ beliebig. Existiert ein Index $j \in \mathbb{N}$ mit $\mu^*(E_j) = \infty$, so ist die Eigenschaft trivialerweise erfüllt. Sei also $\mu^*(E_i) < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren dann Überdeckungen $\{U_j^i : j \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{M}_{E_i}$ von E_i mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j^i) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Da jedoch $\{U_j^i : i, j \in \mathbb{N}\}$ die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ überdeckt, gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Fïr $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Satz 3.9. *Das äußere Maß μ^* aus Satz 3.8 ist genau dann eine Fortsetzung des Inhalts μ von $\mathcal{R}$ auf $\mathcal{P}(X)$, wenn μ subvolladditiv ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Es gelte $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$. Für beliebige Mengen $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ folgt dann aus (ii) und (iii) in Definition 3.6

$$\mu(A) = \mu^*(A) \leq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

d.h. μ ist subvolladditiv.

“$\Leftarrow$“: Sei μ subvolladditiv. Für beliebiges $A \in \mathcal{R}$ setzen wir $A_1 := A$ und $A_i := \emptyset$ für $i = 2, 3, \ldots$. Dann ist $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von A und somit folgt aus der Definition von μ^*

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \mu(A) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(\emptyset) = \mu(A).$$

Umgekehrt existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{R}$ von A mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Setzen wir $B_i := A \cap A_i \in \mathcal{R}$, so gilt $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ und damit

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, d.h. $\mu(A) = \mu^*(A)$. □

Satz 3.10. *Seien $\mathcal{R}$ ein Ring in X, μ ein subvolladditiver Inhalt auf $\mathcal{R}$ und μ^* das äußere Maß aus Satz 3.8. Dann gilt*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

für alle $A \in \mathcal{R}$ und alle $E \subseteq X$.

Beweis. Wegen $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$ gilt nach Definition 3.6 (iii) stets

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Für $\mu^*(E) = \infty$ gilt trivialerweise auch

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Sei nun also $\mu^*(E) < \infty$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann eine Überdeckung $\{U_i \in \mathcal{R} : i \in \mathbb{N}\}$ von E mit

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i).$$

Setzen wir $V_i := A \cap U_i$ und $W_i := U_i \setminus A$ für $i = 1, 2, \ldots$, dann gilt $V_i, W_i \in \mathcal{R}$, $U_i = V_i \cup W_i$ und $V_i \cap W_i = \emptyset$ sowie

$$A \cap E \subseteq A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i, \qquad E \setminus A \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$$

und $\mu(U_i) = \mu(V_i) + \mu(W_i)$. Also erhalten wir aus Satz 3.9 sowie aus Definition 3.6 (iii) und (ii)

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \varepsilon &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(U_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(W_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(V_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(W_i) \\ &\geq \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \right) + \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i \right) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A). \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Behauptung. □

Definition 3.11 (Caratheodory)**.** Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *μ^*-messbar*, falls

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

für alle $E \subseteq X$ gilt. Das System aller μ^*-messbaren Mengen in X bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$.

Lemma 3.12. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann ist jede Menge $A \subseteq X$ mit $\mu^*(A) = 0$ μ^*-messbar, d.h. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$.*

Beweis. Sei $E \subseteq X$ beliebig. Wegen $E \cap A \subseteq A$ und Definition 3.6 (i) und (ii) gilt

$$0 \leq \mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) = 0,$$

d.h. $\mu^*(E \cap A) = 0$, und aus $E \setminus A \subseteq E$ folgt mit Definition 3.6 (iii) und (ii)

$$\mu^*(E) = \mu^*\big((E \cap A) \cup (E \setminus A)\big) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq 0 + \mu^*(E),$$

also $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$. □

Lemma 3.13. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Ist $A \subseteq X$ μ^*-messbar, so ist auch $X \setminus A$ μ^*-messbar, d.h.*

$$A \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X) \quad \Rightarrow \quad X \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X).$$

Beweis. Sei $E \subseteq X$ beliebig. Aus

$$E \setminus A = E \cap (X \setminus A) \quad \text{und} \quad E \cap A = E \setminus (X \setminus A)$$

folgt dann

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \setminus (X \setminus A)) + \mu^*(E \cap (X \setminus A)).$$

□

Lemma 3.14. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Sind $A \subseteq X$ und $B \subseteq X$ μ^*-messbar, so ist auch $A \cap B$ μ^*-messbar, d.h.*

$$A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X) \quad \Rightarrow \quad A \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X).$$

Beweis. Sei $E \subseteq X$ beliebig. Wegen $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(E \setminus (A \cap B)) = \mu^*(E \cap (\overline{A \cap B})) &= \mu^*(\underbrace{E \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}_{=:\tilde{E}}) = \mu^*(\tilde{E} \cap A) + \mu^*(\tilde{E} \setminus A) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap \overline{B}) + \mu^*(E \cap \overline{A}) = \mu^*((E \cap A) \setminus B) + \mu^*(E \setminus A) \end{aligned}$$

und aus $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ sowie nochmals aus $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ folgt damit

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \setminus (A \cap B)) &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*((E \cap A) \setminus B) + \mu^*(E \setminus A) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E), \end{aligned}$$

d.h. $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$. □

Bemerkung. Für $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ folgt aus Lemma 3.13 und Lemma 3.14

$$A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X),$$

d.h. $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ ist eine Algebra.

Satz 3.15. *Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(X)}$ ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$.*

Beweis. [1] Sei $E \subseteq X$ beliebig und seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ paarweise disjunkt. Mit $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ gilt dann

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(\underbrace{(E \setminus A_1) \cap A_2}_{=E\cap A_2}) + \mu^*(\underbrace{(E \setminus A_1) \setminus A_2}_{=E\setminus(A_1\cup A_2)}) \\ &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2) + \mu^*\big(\underbrace{(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \cap A_3}_{=E\cap A_3}\big) + \mu^*\big(\underbrace{(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \setminus A_3}_{=E\setminus(A_1\cup A_2\cup A_3)}\big) \\ &= \cdots = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(\underbrace{E \setminus (\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}_{\supseteq E\setminus A}) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \setminus A)\end{aligned}$$

und der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert in Verbindung mit Definition 3.6 (iii)

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E \cap A_i)\right) + \mu^*(E \setminus A) \\ &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).\end{aligned}$$

Wegen $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$ und Definition 3.6 (iii) gilt auch die umgekehrte Ungleichung, also $\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$, d.h. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$. Insbesondere gilt also auch

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \setminus A).$$

Setzen wir $E := A$, so liefert dies

$$\mu^*(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \underbrace{\mu^*(\emptyset)}_{=0},$$

d.h. μ^* ist volladditiv auf $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$.

Seien nun $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ beliebig und sei $B := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Setzen wir $A_1 := B_1$ und $A_i := B_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j)$ für $i = 2, 3, \ldots$, so gilt $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ (wegen Lemma 3.13 und Lemma 3.14) und $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Nach dem bereits Gezeigten folgt also $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$, d.h. $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ ist eine σ-Algebra. $\square$

Satz 3.16 (Fortsetzungssatz von Hahn)**.** *Sei $\varphi : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ eine nichtnegative, additive Mengenfunktion auf einem Semiring $\mathcal{S}$ und sei $\mu : \mathcal{R}(\mathcal{S}) \to [0, \infty]$ die Fortsetzung von φ zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ (vgl. Satz 3.3). Dann ist die Einschränkung $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(X)}$ des in Satz 3.8*

[1] Da Additivität keine Eigenschaft μ^* ist, wird diese im Beweis auch nicht benötigt.

definierten äußeren Maßes $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ *genau dann eine Fortsetzung von* φ *auf* $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$*, wenn* φ *subvolladditiv ist.*

Beweis. Aus den Sätzen 3.3 (ii) und 3.9 folgt sofort, dass μ^* genau dann eine Fortsetzung von φ auf $\mathcal{P}(X)$ ist, wenn φ subvolladditiv ist. Trivialerweise gilt $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{S})$ und wegen Satz 3.10 auch $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$, falls φ subvolladditiv ist. Dies liefert die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Satz 3.16 gibt uns eine Möglichkeit, eine nichtnegative, subvolladditive Mengenfunktion auf einem Semiring zu einem Maß auf einer σ-Algebra (nämlich auf $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$) fortzusetzen.

Definition 3.17. Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleer. Eine Mengenfunktion $\varphi : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *σ-endlich*, wenn zu jedem $A \in \mathcal{M}$ abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit

$$|\varphi(A_i)| < \infty \qquad \text{und} \qquad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

existieren.

Satz 3.18 (Ergänzungssatz zum Fortsetzungssatz von Hahn)**.** *Sei* φ *eine nichtnegative, subvolladditive und* σ*-endliche Mengenfunktion auf einem Semiring* $\mathcal{S}$ *und es existiere eine abzählbare Überdeckung von* X *durch Mengen aus* $\mathcal{S}$*. Dann ist die Einschränkung* $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(X)}$ *des zu* φ *gehörenden äußeren Maßes* μ^* *(vgl. Satz 3.16) ein* σ*-endliches Maß auf* $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$*.*

Beweis. Wegen Satz 1.10 ist die Fortsetzung μ von φ auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ offensichtlich σ-endlich; damit ist also auch μ^* auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ σ-endlich. Nach Voraussetzung existiert eine Überdeckung $\{\tilde{U}_i \in \mathcal{S} : i \in \mathbb{N}\}$ von X. Setzen wir $U_1 := \tilde{U}_1$ und $U_i := \tilde{U}_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} \tilde{U}_j)$ für $i = 2, 3, \ldots$, so gilt $U_i \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Da μ^* σ-endlich auf $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ ist, existieren für jedes $i \in \mathbb{N}$ Mengen $V_i^1, V_i^2, \ldots \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$ mit $\mu^*(V_i^j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $U_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_i^j$. Für $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ gilt somit

$$A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} V_i^j \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap V_i^j).$$

Da die Mengen $A \cap V_i^j$ für $i, j \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind und $\mu^*(A \cap V_i^j) \leq \mu^*(V_i^j) < \infty$ gilt, ist die Behauptung gezeigt. $\square$

Definition 3.19. Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *vollständig*, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ aus $B \subseteq A$ stets $B \in \mathcal{A}$ folgt.

Bemerkung. Aus der Monotoniebedingung von Definition 3.6 (ii) und wegen des Lemmas 3.12 folgt unmittelbar, dass das im Sinne des Fortsetzungssatzes von Hahn über eine Einschränkung des äußeren Maßes μ^* auf der σ-Algebra der nach Caratheodory messbaren Mengen $\mathcal{A}_{\mu^*}(X)$ definierte Maß $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(X)}$ ein *vollständiges* Maß ist.

Satz 3.20. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in X und sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist das Mengensystem*

$$\overline{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A},\, N \in \mathcal{N}\},$$

wobei $\mathcal{N} := \{N \subseteq X : \exists B \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(B) = 0 \text{ und } N \subseteq B\}$ sei, eine σ-Algebra in X und die durch

$$\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$$

auf $\overline{\mathcal{A}}$ definierte Mengenfunktion $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} \to [0,\infty]$ ist ein vollständiges Maß auf $\overline{\mathcal{A}}$.

Beweis. Wir zeigen als Erstes, dass $\overline{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra ist. Sei $A \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{N}$ und sei $B \in \mathcal{A}$ eine Menge mit $\mu(B) = 0$ und $N \subseteq B$. Dann gilt

$$\overline{A \cup N} = \overline{(A \cup B) \setminus (B \setminus (A \cup N))} = \overline{(A \cup B)} \cap \overline{(B \setminus (A \cup N))} = (\underbrace{\overline{A \cup B}}_{\in \mathcal{A}}) \cup (\underbrace{B \setminus (A \cup N)}_{\subseteq B}),$$

d.h. $\overline{A \cup N} \in \overline{\mathcal{A}}$. Seien nun $A_1 \cup N_1, A_2 \cup N_2, \ldots \in \overline{A}$ mit entsprechenden Mengen $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$. Wegen Satz 2.5 (vii) ist μ subvolladditiv und damit folgt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = 0.$$

Also erhalten wir

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cup N_i) = \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right)}_{\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}} \in \overline{A}.$$

Wir zeigen nun die Korrektheit der Definition von $\overline{\mu}$. Seien also $A \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$ und $\tilde{A} \cup \tilde{N} \in \overline{\mathcal{A}}$ mit entsprechenden Mengen $B, \tilde{B} \in \mathcal{A}$, sodass $A \cup N = \tilde{A} \cup \tilde{N}$ gilt. Zu zeigen ist $\mu(A) = \mu(\tilde{A})$. Nach Satz 2.5 (iv) gilt zunächst

$$\mu(B \cup \tilde{B}) + \mu(B \cap \tilde{B}) = \mu(B) + \mu(\tilde{B}) = 0,$$

also $\mu(B \cup \tilde{B}) = 0$. Wegen Satz 2.5 (v) gilt dann auch $\mu(A \cap (B \cup \tilde{B})) = 0$. Falls $\mu(A) = \infty$ und $\mu(\tilde{A}) = \infty$, so ist die Behauptung trivial. Sei also $\mu(A) < \infty$ (sonst A und $\tilde{A}$ vertauschen). Aus $A \cup N = \tilde{A} \cup \tilde{N}$ folgt $A \cup B \cup \tilde{B} = \tilde{A} \cup B \cup \tilde{B}$, sodass Satz 2.5 (ii)

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\big((\tilde{A} \cup B \cup \tilde{B}) \setminus (A \cup B \cup \tilde{B})\big) = \mu(\tilde{A} \cup B \cup \tilde{B}) + \mu(A \cup B \cup \tilde{B}),$$

d.h. $\mu(A \cup B \cup \tilde{B}) = \mu(\tilde{A} \cup B \cup \tilde{B})$, liefert. Mit Satz 2.5 (iv) folgt wiederum

$$\mu(A \cup B \cup \tilde{B}) + \underbrace{\mu(A \cap (B \cup \tilde{B}))}_{=0} = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \cup \tilde{B})}_{=0}$$

und analog $\mu(\tilde{A} \cup B \cup \tilde{B}) = \mu(\tilde{A})$, d.h. es gilt $\mu(A) = \mu(\tilde{A})$.

Wir zeigen nun die Volladditivität von $\overline{\mu}$. Seien also $A_1 \cup N_1, A_2 \cup N_2, \ldots \in \overline{\mathcal{A}}$ paarweise disjunkt. Dann gilt (vgl. Beweisteil zur Abgeschlossenheit von $\overline{\mathcal{A}}$ bezüglich abzählbarer Vereinigungen)

$$\begin{aligned}\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cup N_i)\right) &= \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i \cup N_i).\end{aligned}$$

Es verbleibt die Vollständigkeit von $\overline{\mu}$ zu zeigen. Sei also $A \cup N \in \overline{\mathcal{A}}$ mit einer entsprechenden Menge $B \supseteq N$, $\mu(B) = 0$, und mit $\overline{\mu}(A \cup N) = 0$. Dann ist auch $\mu(A) = 0$. Für $C \subseteq A \cup N$ gilt $C \subseteq A \cup B \in \mathcal{A}$ und Satz 2.5 (iv) liefert

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) = 0,$$

d.h. $\mu(A \cup B) = 0$. Somit folgt $C = \emptyset \cup C \in \overline{\mathcal{A}}$, also ist $\overline{\mu}$ vollständig. □

Bemerkung. Das Maß $\overline{\mu}$ wird *Vervollständigung* von μ genannt.

Beispiel 3.21 (Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$)**.** Sei $X := \mathbb{R}^n$ und sei $\mathcal{R}$ der Ring der Elementarmengen im $\mathbb{R}^n$ (vgl. Beispiel 1.14). Weiter sei μ der subvolladditive Inhalt auf $\mathcal{R}$ aus Beispiel 3.4. Die Einschränkung $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(\mathbb{R}^n)}$ des entsprechend Satz 3.8 konstruierten äußeren Maßes μ^* ist nach Satz 3.16 eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{A}_{\mu^*}(\mathbb{R}^n)$. Das Maß $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(\mathbb{R}^n)}$ wird als (n-dimensionales) *Lebesgue-Maß* bezeichnet und $\mathcal{A}_{\mu^*}(\mathbb{R}^n)$ heißt *σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen*. Wir verwenden dafür im Weiteren das Symbol $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Offensichtlich ist $\mu(I) < \infty$ für alle n-Zellen der Form $I = \bigotimes_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$, d.h. μ ist auf dem Semiring dieser n-Zellen σ-endlich. Nach Satz 3.18 ist das Lebesgue-Maß $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(\mathbb{R}^n)}$ also σ-endlich. Entsprechend der Bemerkung nach Definition 3.19 ist das Lebesgue-Maß $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}(\mathbb{R}^n)}$ ein vollständiges Maß.

Bemerkung. Beschränkte Mengen im $\mathbb{R}^n$ haben ein endliches Lebesgue-Maß, da sie in einer (endlichen) n-Zelle enthalten sind. Man kann ohne große Mühe zeigen, dass abzählbare Mengen im $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar sind und dass ihr Lebesgue-Maß Null ist. Es gibt jedoch auch überabzählbare Lebesgue-Nullmengen (z.B. die Cantor-Menge).

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jede Borel-Menge im $\mathbb{R}^n$ (vgl. Definition 1.13) Lebesgue-messbar ist, es aber Lebesgue-messbare Mengen gibt, die keine Borel-Mengen sind. Also gilt mit echter Inklusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf die σ-Algebra der Borel-Mengen heißt Borel-Maß. Entsprechend bezeichnet man die Borel-Mengen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ auch als Borel-messbare Mengen. Das Borel-Maß im $\mathbb{R}^n$ ist im Gegensatz zum Lebesgue-Maß nicht vollständig, weil es Teilmengen zu Borel-Mengen mit Borel-Maß Null gibt, die selbst keine Borel-Mengen sind. Vervollständigt man das Borel-Maß im $\mathbb{R}^n$ im Sinne von Satz 3.20, so ergibt sich das Lebesgue-Maß als Vervollständigung.

Bemerkung. Es gibt auch Mengen in $\mathbb{R}^n$, die nicht Lebesgue-messbar sind (z.B. die so genannten Vitali-Mengen).

Beispiel 3.22 (Lebesgue-Maß in $\overline{\mathbb{R}}$)**.** Sei $X := \overline{\mathbb{R}}$ und sei

$$\mathcal{S} := \{[-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

Dann ist $\mathcal{S}$ ein Semiring und die durch

$$\mu([-\infty, b]) := +\infty, \quad \mu((a, +\infty]) := +\infty, \quad \mu((a, b]) := b - a, \quad \mu(\emptyset) := 0$$

gegebene Mengenfunktion $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ ist subvolladditiv und σ-endlich. Das analog zum Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ aus $\mathcal{S}$ und μ konstruierte Maß heißt *Lebesgue-Maß* in $\overline{\mathbb{R}}$. Die dazugehörige σ-Algebra bezeichnen wir entsprechend mit $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}})$.

Bemerkung. Die Mengen $[-\infty, b)$ bzw. $(a, +\infty]$ sehen wir als offene Kugeln (Umgebungen) um die uneigentlichen Punkte $-\infty$ bzw. $+\infty$ von $\overline{\mathbb{R}}$ an, sodass wir eine Grundlage haben, um über offene und abgeschlossene Mengen und deren Konsequenzen in $\overline{\mathbb{R}}$ zu sprechen. Zusätzlich zu beschränkten Intervallen (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$, die sowohl in $\mathbb{R}$ als auch in $\overline{\mathbb{R}}$ offene Kugeln bilden, treten in $\overline{\mathbb{R}}$ auch noch die unbeschränkten Intervalle der Typen $[-\infty, a)$ bzw. $(b, \infty]$ als offene Kugeln hinzu. Auch hier ist die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ als kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen von $\overline{\mathbb{R}}$ enthält, wieder als echte Teilmenge in $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}})$ enthalten.

Satz 3.23. *Seien $X := \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen und μ das Lebesgue-Maß. Für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $F \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und eine offene Menge $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subseteq A \subseteq G$, sodass $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$ und $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Erfülle $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ zunächst $\mu(A) < \infty$. Mit μ^* bezeichnen wir das äußere Maß, aus welchem das Lebesgue-Maß konstruiert wurde (vgl. Beispiel 3.21). Wegen $\mu^*(A) = \mu(A) < \infty$ existiert nach Definition von μ^* (vgl. Satz 3.8) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Überdeckung $\{E_i \in \mathcal{R} : i \in \mathbb{N}\}$ von A mit

$$\mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

($\mathcal{R}$ sei hier der Ring der Elementarmengen). Nach Satz 1.10 existieren zu jedem E_i paarweise disjunkte, halboffenen n-Zellen $I_i^1, I_i^2, \ldots, I_i^{m_i}$ mit $E_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} I_i^j$. Zur Vereinfachung der Notation nummerieren wir die Elemente der (abzählbaren) Menge $\{I_i^j : i \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq m_i\}$ um in $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$; wir haben also

$$\mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} > \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_i} \mu^*(I_i^j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(I_k).$$

Bezeichnen wir die Grenzen der halboffenen n-Zelle I_k mit $a_k^1, \ldots, a_k^n$ und $b_k^1, \ldots, b_k^n$, d.h. $I_k = \bigotimes_{i=1}^n (a_k^i, b_k^i]$, so existiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine offene n-Zelle $J_k := \bigotimes_{i=1}^n (a_k^i, b_k^i + \delta_k^i)$

mit
$$\mu^*(J_k) \leq \mu^*(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$$
(die $\delta_k^i > 0$ müssen hinreichend klein gewählt werden). Die Menge $G := \bigcup_{k=1}^\infty J_k$ ist dann offen und es gilt
$$\mu^*(G) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty J_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(J_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(I_k) + \frac{\varepsilon}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k}}_{=1} < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Somit folgt
$$\mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A) = \mu^*(G) - \mu^*(A) < \varepsilon.$$

Gilt für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nun $\mu(A) = \infty$, so existieren aufgrund der σ-Endlichkeit von μ (vgl. Beispiel 3.21) paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu(A_i) < \infty$ und $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Nach dem bereits gezeigten existieren für $\varepsilon > 0$ entsprechend offene Mengen $G_1, G_2, \ldots \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $A_i \subseteq G_i$ und $\mu(G_i \setminus A_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Setzen wir $G := \bigcup_{i=1}^\infty G_i$, so gilt $A \subseteq G$ und G ist offen. Es folgt
$$\begin{aligned}\mu(G \setminus A) &= \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty \left(G_i \setminus \left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right)\right)\right) \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty (G_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(G_i \setminus A_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Es verbleibt die Existenz einer abgeschlossenen Menge F mit den behaupteten Eigenschaften zu zeigen. Seien also $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\overline{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und somit existiert eine offene Menge $G \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\overline{A} \subseteq G$ und $\mu(G \setminus \overline{A}) < \varepsilon$. Setzen wir $F := \overline{G}$, so ist F abgeschlossen und wir erhalten $F \subseteq A$ sowie
$$\mu(A \setminus F) = \mu(A \cap \overline{F}) = \mu(A \cap G) = \mu(G \setminus \overline{A}) < \varepsilon.$$

□

Satz 3.24. *Sei $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ die Borel'sche σ-Algebra im $\mathbb{R}^n$ (vgl. Definition 1.13) und sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, d.h. $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann existieren eine Menge F vom Typ F_σ und eine Menge G vom Typ G_δ mit $F \subseteq A \subseteq G$, sodass $\mu(A \setminus F) = 0$ und $\mu(G \setminus A) = 0$ gilt, wobei μ das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ bezeichne.*

Beweis. Nach Satz 3.23 existieren zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Menge F_m und eine offene Menge G_m mit $F_m \subseteq A \subseteq G_m$, sodass
$$\mu(A \setminus F_m) < \frac{1}{m} \qquad \text{und} \qquad \mu(G_m \setminus A) < \frac{1}{m}$$

gilt. Setzen wir $F := \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ und $G := \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$, so gilt für jedes $M \in \mathbb{N}$

$$\mu(A \setminus F) = \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)\right) \leq \mu(A \setminus F_M) < \frac{1}{M}$$

und

$$\mu(G \setminus A) = \mu\left(\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m\right) \setminus A\right) \leq \mu(G_M \setminus A) < \frac{1}{M}.$$

Der Grenzübergang $M \to \infty$ liefert die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Aus Satz 3.24 folgt, dass jede Lebesgue-messbare Menge $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ als Vereinigung zweier disjunkter Mengen $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dargestellt werden kann, wobei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\mu(N) = 0$ gilt. Mit den Bezeichnungen aus Satz 3.24 müssen wir nur $B := F$ und $N := A \setminus F$ setzen.

Satz 3.24 und die nachfolgende Bemerkung lassen sich übertragen auf den Fall, dass man $X = \overline{\mathbb{R}}$ und die entsprechenden σ-Algebren $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ bzw. $\mathcal{L}(\overline{\mathbb{R}})$ betrachtet.

4 Messbare Funktionen

4.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition 4.1. Seien X eine beliebige nichtleere Menge, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra in X und μ ein Maß auf $\mathcal{M}$. Das Paar $(X, \mathcal{M})$ heißt *messbarer Raum* und das Tripel $(X, \mathcal{M}, \mu)$ heißt *Maßraum*. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt wieder *messbar* (oder $\mathcal{M}$-messbar), wenn $A \in \mathcal{M}$ gilt.

Bemerkung. Wir betrachten in diesem Kapitel Funktionen f, deren Urbilder in X und deren Bilder in Y liegen. Um den Begriff der Messbarkeit solcher Funktionen sinnvoll zu definieren, müssen die Funktionen jedoch als Funktionen zwischen zwei messbaren Räumen $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ betrachtet werden. Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, verzichtet man oft auf die explizite Erwähnung der σ-Algebren und schreibt nur kurz $f : X \to Y$.

Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang *reelle Funktionen* $f : X \to \mathbb{R}$ bzw. die so genannten *numerischen Funktionen* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ohne es im Weiteren immer explizit zu erwähnen, betrachten wir diese stets als Funktionen zwischen den messbaren Räumen $(X, \mathcal{M})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bzw. $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, d.h. im Bildraum wird stets die Borel'sche σ-Algebra zugrunde gelegt.

Definition 4.2. Seien $(X, \mathcal{M})$ und $(Y, \mathcal{N})$ messbare Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt (bezogen auf dieses Paar messbarer Räume) messbar, wenn das Urbild jeder messbaren Menge messbar ist, d.h.

$$B \in \mathcal{N} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{M}.$$

Eine reelle Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ bzw. eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nennen wir messbar, wenn sie jeweils als Funktionen zwischen $(X, \mathcal{M})$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bzw. $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar sind. Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ nennen wir reelle und numerische Funktionen messbar, wenn sie als Funktionen zwischen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bzw. $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar sind.

Bemerkung. Manchmal spricht man von Lebesgue-messbaren reellen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw. von Lebesgue-messbaren numerischen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, wenn sie als Funktionen zwischen $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ bzw. $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar sind. Da jedoch $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ gilt, ist jede solche messbare Funktion im Sinne der Definition 4.2 auch eine Lebesgue-messbare Funktion.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas 4.3 lässt sich danach direkt der zur Überprüfung der Messbarkeit von Funktionen und Funktionenklassen wichtige Satz 4.4 beweisen. Nochmals sei erwähnt, dass sich offene Kugeln in $\overline{\mathbb{R}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sowohl durch beschränkte offene Intervalle (a, b) als auch durch unbeschränkte Intervalle der Typen $[-\infty, a)$ bzw. $(b, \infty]$ darstellen lassen (vgl Bemerkung nach Beispiel 3.22). Weiter sei hier die Verwandtschaft dieses Lemmas mit dem später erwähnten und bewiesenen Lemma 4.10 vermerkt. Der Beweis von Lemma 4.3 verläuft analog zu dem von Lemma 4.10 auf der Grundlage der Tatsache, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist und dicht in der Menge der reellen Zahlen. Hier müssen aber noch unbeschränkte Intervalle einbezogen werden.

Lemma 4.3. *Jede offene Menge in $\overline{\mathbb{R}}$ ist als abzählbare Vereinigung offener Kugeln in $\overline{\mathbb{R}}$ darstellbar.*

Satz 4.4. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Dann ist eine numerische Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann messbar im Sinne von Definition 4.2, wenn*

$$X(f > a) := \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Sei zuerst die Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar im Sinne von Definition 4.2. Dann ist $X(f > a) \in \mathcal{M}$, weil $(a, +\infty]$ für beliebige reelle Zahlen a als offene Menge in $\overline{\mathbb{R}}$ auch zur Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ gehört.

Um die für den Beweis notwendige zweite Implikation zu zeigen, nehmen wir an, dass $X(f > a) \in \mathcal{M}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt und schließen daraus auf $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ für beliebige $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Dazu betrachten wir das Mengensystem $\mathcal{E} = \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$ und dessen erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$. Wegen $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ für alle $B \in \mathcal{E}$ gilt auch $f^{-1}(\tilde{B}) \in \mathcal{M}$ für alle $\tilde{B} \in \sigma(\mathcal{E})$. Gewiss enthält $\sigma(\mathcal{E})$ alle halboffenen Intervalle $(a, b]$ als Differenzmengen zweier Elemente aus $\mathcal{E}$ und alle Intervalle des Typs $[-\infty, a]$ als Komplemente. Da sich auch alle Intervalle der Art (a, b) bzw. $[-\infty, a)$ mittels abzählbarer Vereinigungen der bereits erzeugten Typen darstellen lassen, gehören alle offenen Kugeln in $\overline{\mathbb{R}}$ zu $\sigma(\mathcal{E})$, wegen Lemma 4.3 damit auch alle offenen Mengen. Somit haben wir $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$. Für $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ gilt dann auch $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ □

Bemerkung. Wie eine Inspektion des Beweises zeigt, bleibt die Aussage des Satzes 4.4 natürlich auch richtig, wenn reelle Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ betrachtet werden.

Satz 4.5. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $X(f > a) \in \mathcal{M}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$,

(ii) $X(f \geq a) \in \mathcal{M}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$,

(iii) $X(f < a) \in \mathcal{M}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$,

(iv) $X(f \leq a) \in \mathcal{M}$ *für alle* $a \in \mathbb{R}$.

Beweis. Beweis:
(i) $\Rightarrow$ (iv):

$$f^{-1}([-\infty, a]) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus (a, +\infty]) = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}) \setminus f^{-1}((a, +\infty]) = X \setminus f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii):

$$f^{-1}([-\infty, a)) = f^{-1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [-\infty, a - \tfrac{1}{m}]\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, a - \tfrac{1}{m}]) \in \mathcal{M}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii):

$$f^{-1}([a, +\infty]) = f^{-1}(\overline{R} \setminus [-\infty, a)) = X \setminus f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{M}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i):

$$f^{-1}((a, +\infty]) = f^{-1}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} [a + \tfrac{1}{m}, +\infty]\right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}([a + \tfrac{1}{m}, +\infty]) \in \mathcal{M}.$$

□

Bemerkung. Statt $X(f > a)$ kann in Satz 4.4 also auch $X(f < a)$, $X(f \geq a)$ oder $X(f \leq a)$ stehen.

Beispiel 4.6. Die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ ist wegen Satz 4.4 messbar, denn es gilt

$$X(f > a) = \begin{cases} [0, \frac{1}{a}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), & a > 0, \\ [0, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), & a = 0, \\ (-\infty, \frac{1}{a}) \cup [0, +\infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), & a < 0. \end{cases}$$

Satz 4.7. *Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist messbar.*

Beweis. Die Mengen $(a, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ für $a \in \mathbb{R}$ sind offen. Da f stetig ist, sind somit auch die Mengen $f^{-1}((a, +\infty))$ offen und gehören zu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Aus Satz 4.4 folgt daher die Behauptung. □

Bemerkung. Aus dem Beweis zu Satz 4.7 folgt sofort, dass jede auf einem metrischen Raum X definierte stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ messbar bezüglich der Borel'schen σ-Algebra in X ist.

Satz 4.8. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum. Ist $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so ist auch $|f| : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Beweis. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Für $a \geq 0$ gilt dann $X(f > a) \in \mathcal{M}$ und $X(f < -a) \in \mathcal{M}$ (Sätze 4.4 und 4.5). Also erhalten wir

$$X(|f| > a) = X(f < -a) \cup X(f > a) \in \mathcal{M},$$

d.h. $|f|$ ist nach Satz 4.4 messbar.

Wir geben ein Gebenbeispiel für die Gegenrichtung an. Sei $A \subseteq X$ mit $A \notin \mathcal{M}$ und sei $f : X \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ -1, & x \notin A \end{cases}$$

gegeben. Dann gilt

$$X(|f| > a) = \begin{cases} X \in \mathcal{M}, & a < 1, \\ \emptyset \in \mathcal{M}, & a \geq 1, \end{cases}$$

d.h. $|f|$ ist messbar. Jedoch erhalten wir $X(f > 0) = A \notin \mathcal{M}$, d.h. f ist nicht messbar. □

Satz 4.9. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und seien die Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar. Dann sind auch die durch*

$$g(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad h(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \quad p(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad q(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

gegebenen Funktionen $g, h, p, q : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.

Beweis. Aufgrund der Messbarkeit der Funktionen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $X(f_n > a) \in \mathcal{M}$ und nach Satz 4.5 auch $X(f_n \geq a) \in \mathcal{M}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Somit folgt

$$X(g > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X(f_n > a) \in \mathcal{M} \qquad \text{und} \qquad X(h \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(f_n \geq a) \in \mathcal{M},$$

d.h. g und h sind messbar.

Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} f_k(x) \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k(x).$$

Nach dem bereits gezeigten sind $g_n := \sup_{k\geq n} f_k$ und $h_n := \inf_{k\geq n} f_k$ messbar und damit auch $p = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n$ und $q = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_n$. □

Bemerkung. Existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$, so ist mit f_n für $n \in \mathbb{N}$ auch f messbar, da dann $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$ gilt.

Lemma 4.10. *Jede offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist als abzählbare Vereinigung offener n-Zellen $\bigotimes_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ darstellbar.*

Beweis. Fall $n = 1$: Sei M eine offene Menge in $\mathbb{R}$. Dann kann man sie darstellen als Vereinigung über offene Intervalle (Kugeln) um jeden einzelnen Punkt $x \in M$ mit geeigneten Radien $\varepsilon_x > 0$: $M = \bigcup\limits_{x\in M} (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$. Da die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ abzählbar und dicht in $\mathbb{R}$ ist, kann man jedes offene Intervall (a, b) in $\mathbb{R}$ darstellen als $(a, b) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ mit

rationalen Intervallgrenzen $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$ (rationale Approximation des Intervalls von innen). Dann ist $M = \bigcup_{x \in M} \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{x_i}, b_{x_i})$, wobei $a_{x_i}, b_{x_i} \in \mathbb{Q}$. Da es aber nur abzählbar viele rationale Zahlenpaare gibt, ist die Vereinigung zur Darstellung von M eine mit abzählbar vielen offenen Intervallen.
Fall $n > 1$: Der Beweis erfolgt mit analogen Hilfsmitteln. Jede offene n-Zelle lässt sich wieder von innen durch offene n-Zellen mit rationalen Eckpunkten beliebig genau approximinieren. Es gibt aber auch nur abzählbar viele derartige (rationale) n-Zellen. Bleibt zu zeigen, dass um jeden inneren Punkt von M eine offene n-Zelle existiert, die ganz in M liegt. Jede offene Kugel in $\mathbb{R}^n$ enthält aber eine offene n-Zelle. Man kann auch argumentieren, dass Kugeln nicht im Sinne der Euklidischen Norm, sondern im Sinne der Maximumnorm betrachtet werden und alle Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. □

Satz 4.11. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Ist die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch $h(x) := F(f(x), g(x))$ definierte Funktion $h : X \to \mathbb{R}$ messbar.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei

$$G_a := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : F(u, v) > a\} = F^{-1}((a, +\infty)).$$

Da $(a, +\infty)$ offen und F stetig ist, ist G_a offen, sodass nach Lemma 4.10 offene 2-Zellen $I_k = (a_k, b_k) \otimes (c_k, d_k)$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $G_a = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ existieren. Es folgt nun

$$\begin{aligned} X(h > a) = \{x \in X : (f(x), g(x)) \in G_a\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X : (f(x), g(x)) \in I_k\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(X(f > a_k) \cap X(f < b_k) \cap X(G > c_k) \cap X(g < d_k) \big) \in \mathcal{M}, \end{aligned}$$

d.h. h ist messbar. □

Folgerung 4.12. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind auch die (punktweise definierten) Funktionen $f + g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ (mit $c \in \mathbb{R}$) sowie die durch*

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \qquad \textit{und} \qquad f_-(x) := -\min\{f(x), 0\}$$

definierten Funktionen f_+ und f_- messbar.

Beweis. Für $f + g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$ folgt die Behauptung aus Satz 4.11, da die Zuordnungen $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, $(x, y) \mapsto cx$ für $x, y \in \mathbb{R}$ stetig sind. Die Messbarkeit von f_+ und f_- folgt aus

$$f_+ = \tfrac{1}{2}(f + |f|) \qquad \text{und} \qquad f_- = \tfrac{1}{2}(|f| - f).$$

□

Bemerkung. Die Funktion $f_+ \geq 0$ heißt *positiver Anteil*, $f_- \geq 0$ *negativer Anteil von* f. Es gilt stets $f = f_+ - f_-$ sowie $|f| = f_+ + f_-$.

Definition 4.13. Sei X eine beliebige nichtleere Menge. Eine Funktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, falls ihre Bildmenge $\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X \text{ mit } \varphi(x) = y\}$ endlich ist. Für $E \subseteq X$ heißt die durch

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

gegebene spezielle Treppenfunktion $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ *charakteristische Funktion* der Menge E.

Lemma 4.14. *Sei X eine beliebige nichtleere Menge und sei $\varphi : X \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit den paarweise verschiedenen Funktionswerten $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Dann existieren paarweise disjunkte Mengen $E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq X$ mit*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort mit

$$E_i := \{x \in X : \varphi(x) = c_i\} = \varphi^{-1}(c_i).$$

□

Bemerkung. Wenn wir Treppenfunktionen in der Form $\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ darstellen, nehmen wir im Folgenden stets an, dass die Mengen E_i paarweise disjunkt sind.

Satz 4.15. *Eine auf einem messbaren Raum $(X, \mathcal{M})$ definierte Treppenfunktion $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ ist genau dann messbar, wenn $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ gilt.*

Beweis. O.B.d.A. sei $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$. Für $a \leq c_1$ gilt $X(\varphi < a) = \emptyset$ und für $a > c_n$ gilt $X(\varphi < a) = X$. Ansonsten, d.h. für $c_1 < a \leq c_n$, gibt es ein $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ derart, dass $c_j < a \leq c_{j+1}$ gilt und wir $X(\varphi < a) = \bigcup_{i=1}^{j} E_i$ haben. Aus $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ folgt dann sofort $X(\varphi < a) \in \mathcal{M} \quad \forall a \in \mathbb{R}$ und φ ist messbar. Umgekehrt folgt aus der Messbarkeit von φ die Messbarkeit von $X(\varphi < a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Es ist dann nämlich $F_j := \bigcup_{i=1}^{j} E_i \in \mathcal{M}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Somit erhalten wir $E_i = F_i \setminus F_{i-1} \in \mathcal{M}$ für $i = 2, 3, \ldots, n$ und $E_1 = F_1 \in \mathcal{M}$. □

Bemerkung. In der Literatur werden messbare Treppenfunktionen vielfach als *einfache Funktionen* bezeichnet. Bereits hier sei darauf verwiesen, dass solche Funktionen das entscheidende Hilfsmittel zur Definition des Lebesgue-Integrals in Kapitel 5 sein werden. Für eine alternative Definition des Riemann-Integrals (siehe Definition 7.2) in Kapitel 7 muss man sich allerdings auf spezielle Treppenfunktionen einschränken, die wir (R)-Treppenfunktionen nennen werden.

Satz 4.16. *Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum und sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Funktion. Dann existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Treppenfunktionen $\varphi_n : X \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Gilt $f(x) \geq 0$ für ein $x \in X$, so ist die Folge $(\varphi_n(x))$ monoton wachsend (nicht notwendig streng). Ist f beschränkt, so konvergiert die Folge (φ_n) sogar gleichmäßig auf X gegen f.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für $f \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir dazu

$$E_n^i := \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n2^n$$

und $F_n := X(f \geq n)$. Aufgrund der Messbarkeit von f sind alle E_n^i und alle F_n messbar. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt außerdem $X = F_n \cup (\bigcup_{i=1}^{n2^n} E_n^i)$. Wir setzen nun

$$\varphi_n := \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_n^i} + n\chi_{F_n}.$$

Nach Satz 4.15 sind die Treppenfunktionen φ_n messbar.

Wir zeigen die punktweise Konvergenz. Für $x \in X$ mit $f(x) = +\infty$ gilt $x \in F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty$. Sei $x \in X$ mit $f(x) < \infty$. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > f(x)$ ein Index $i_n \in \{1, 2, \ldots, n2^n\}$ mit $x \in E_n^{i_n}$, d.h. $\varphi_n(x) = \frac{i_n - 1}{2^n}$ und

$$\frac{i_n - 1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i_n}{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq f(x) - \frac{i_n - 1}{2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Somit folgt für hinreichend große n

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Die Monotonie der Folge $(\varphi_n(x))$ für jedes $x \in X$ im Falle $f \geq 0$ kann man sich leicht überlegen, wenn man die Zerlegungen beim Übergang von n zu $n+1$ betrachtet.

Sei nun f beschränkt, $f \geq 0$ sowie $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f < n_0$ und $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Außerdem gilt $F_n = \emptyset$ für $n \geq n_0$, sodass zu jedem $x \in X$ und jedem $n \geq n_0$ ein Index $i_n(x) \in \{1, 2, \ldots, n2^n\}$ mit $x \in E_n^{i_n(x)}$ existiert. Folglich gilt

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

d.h. $\varphi_n \rightrightarrows f$ für $n \to \infty$.

Sei nun f beliebig (d.h. nicht notwendig $f \geq 0$). Dann gilt $f = f_+ - f_-$ mit $f_+ \geq 0$ und $f_- \geq 0$ und nach dem bereits Gezeigten existieren Folgen $(\varphi_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varphi_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$, die die Aussage des Satzes für f_+ und f_- erfüllen. Setzen wir $\varphi_n := \varphi_n^+ - \varphi_n^-$, so gilt $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ für alle $x \in X$ und wenn f beschränkt ist, so ist die Konvergenz gleichmäßig auf X (da f_+ und f_- beschränkt). Gilt $f(x) \geq 0$ für ein $x \in X$, so ist $f_-(x) = 0$, d.h. $\varphi_n^-(x) = 0$, also $\varphi_n(x) = \varphi_n^+(x)$; und $(\varphi_n^+(x))$ ist monoton wachsend. $\square$

4.2 Konvergenzsätze

Definition 4.17. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $E \in \mathcal{M}$. Man sagt, eine Aussage über die Elemente von X gilt *fast überall auf* E oder *für fast alle* $x \in E$, wenn eine Menge $B \in \mathcal{M}$ mit $\mu(B) = 0$ existiert, sodass die Aussage für alle $x \in E \setminus B$ gilt.

Etwas verkürzt kann man sagen: Eine Aussage gilt fast überall oder für fast alle Elemente einer betrachteten Menge, wenn sie höchstens auf einer Teilmenge vom Maße Null nicht gilt.

Satz 4.18. *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum mit vollständigem Maß μ. Sind die Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbar und gilt für $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dass $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für fast alle $x \in X$, so ist auch f messbar.*

Beweis. Sei $B \in \mathcal{M}$ eine Menge mit $\mu(B) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X \setminus B$. Dann sei $A \subseteq B$ die Menge der $x \in X$, auf welcher entweder $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gar nicht existiert oder aber der Grenzwert existiert und fällt nicht mit $f(x)$ zusammen. Für alle $x \in X \setminus A$ gilt demzufolge $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Aus der Vollständigkeit von μ folgt $A \in \mathcal{M}$ sowie $X(f > a) \cap A \in \mathcal{M}$ für $a \in \mathbb{R}$. Andererseits gilt wegen Satz 4.9

$$X(f > a) \cap (X \setminus A) = \{x \in X \backslash A : \lim_{n\to\infty} f_n(x) > a\} = \{x \in X \backslash A : \limsup_{n\to\infty} f_n(x) > a\} \in \mathcal{M}.$$

Wir erhalten also

$$X(f > a) = (X(f > a) \cap A) \cup (X(f > a) \cap (X \setminus A)) \in \mathcal{M},$$

d.h. f ist messbar. $\square$

Definition 4.19. Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge fast überall endlicher Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine fast überall endliche Funktion. Die Folge (f_n) heißt auf X *konvergent dem Maße nach* gegen f (Schreibweise: $f_n \xrightarrow{\mu} f$), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(X(|f_n - f| \geq \varepsilon)\big) = 0$$

gilt.

Satz 4.20 (Satz von Lebesgue)**.** *Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und einem vollständigen Maß μ. Weiter seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fast überall endlich und die f_n messbar. Dann gilt*

$$f_n(x) \to f(x) \text{ für fast alle } x \in X \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Beweis. Sei zunächst $f \geq 0$. Nach Satz 4.18 ist f messbar. Setzen wir

$$\begin{aligned}
&A := \{x \in X : f(x) = \infty\}, \qquad A_n := \{x \in X : f_n(x) = \infty\} \\
&B := \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existiert nicht oder } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\},
\end{aligned}$$

so gilt für $Q := A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup B$ nach Voraussetzung $\mu(Q) = 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir zusätzlich

$$E_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \geq \varepsilon), \qquad R_n(\varepsilon) := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon), \qquad M(\varepsilon) := \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n(\varepsilon).$$

Die Mengen $E_n(\varepsilon)$, $R_n(\varepsilon)$ und $M(\varepsilon)$ sind dann messbar und es gilt $R_1(\varepsilon) \supseteq R_2(\varepsilon) \supseteq \ldots$. Wegen $\mu(X) < \infty$ ist Satz 2.7 anwendbar, d.h. es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\varepsilon)) = \mu(M(\varepsilon)).$$

Wenn nun $M(\varepsilon) \subseteq Q$ gilt, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n(\varepsilon)) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(R_n(\varepsilon)) = \mu(M(\varepsilon)) \leq \mu(Q) = 0.$$

Wir nehmen also an, es würde ein $x \in M(\varepsilon)$ mit $x \notin Q$ existieren. Dann gilt $f(x) < \infty$, $f_n(x) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, d.h. $|f_n(x) - f(x)| \to 0$. Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin R_{n_0}(\varepsilon)$, also folgt der Widerspruch $x \notin M(\varepsilon)$, womit $M(\varepsilon) \subseteq Q$ gezeigt ist.

Sei nun f beliebig (d.h. nicht notwendig $f \geq 0$). Schreiben wir $f = f_+ - f_-$ und $f_n = (f_n)_+ - (f_n)_-$, so folgt aus dem bereits bewiesenen $(f_n)_+ \xrightarrow{\mu} f_+$ und $(f_n)_- \xrightarrow{\mu} f_-$. Aus

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &\leq |(f_n)_+(x) - f_+(x)| + |(f_n)_-(x) - f_-(x)| \\
&\leq 2\max\{|(f_n)_+(x) - f_+(x)|, |(f_n)_-(x) - f_-(x)|\}
\end{aligned}$$

für $x \in X$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
X(|f_n - f| \geq \varepsilon) &\subseteq X\left(\max\{|(f_n)_+ - f_+|, |(f_n)_- - f_-|\} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= X\left(|(f_n)_+ - f_+| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup X\left(|(f_n)_- - f_-| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned}$$

Dies liefert

$$\mu(X(|f_n - f| \geq \varepsilon)) \leq \mu\left(X\left(|(f_n)_+ - f_+| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) + \mu\left(X\left(|(f_n)_- - f_-| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$\square$

Bemerkung. Ohne die Forderung $\mu(X) < \infty$ gilt Satz 4.20 im Allgemeinen nicht. Beispiel:

Wir betrachten $X = [0, \infty)$ mit dem Lebesgue-Maß μ. Seien

$$f_n(x) := (x + \tfrac{1}{n})^2 \qquad \text{und} \qquad f(x) = x^2.$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in X$, aber

$$\mu(X(|f_n - f| \geq \varepsilon)) = \mu(\{x \in X : \tfrac{2x}{n} + \tfrac{1}{n^2} \geq \varepsilon\}) = +\infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. Anstelle der Vollständigkeit von μ kann in Satz 4.20 auch die Messbarkeit von f vorausgesetzt werden (dies sieht man sofort anhand des Beweises).

Bemerkung. Die Umkehrung von Satz 4.20 gilt im Allgemeinen nicht, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt: Wir betrachten $X = (0, 1]$ mit dem Lebesgue-Maß μ. Das Lebesgue-Maß $\mu(X) = 1$ des Raumes X ist also hier endlich. Wir betrachten die halboffenen Intervalle $E_k^m := ((k-1) \cdot 2^{-m}, k \cdot 2^{-m}]$ für $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, 2, 3, ..., 2^m\}$. Weiter sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt definiert:

$$f_{2^m+k-1}(x) := \chi_{((k-1)\cdot 2^{-m}, k\cdot 2^{-m}]}(x) \quad \text{für } x \in (0, 1],\ m \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, 2^m.$$

Für $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt dann

$$\mu\big(X(|f_{2^m+k-1}| \geq \varepsilon)\big) = \mu\left(E_k^m\right) = 2^{-m} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu\big(X(|f_n| \geq \varepsilon)\big) = 0\,,$$

also konvergiert die Funktionenfolge dem Maße nach gegen die Nullfunktion. Jedoch konvergiert diese Funktionenfolge für gar keinen Punkt $x_0 \in (0, 1]$ (also gewiss nicht fast überall) gegen die Nullfunktion, denn für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k_m = k_m(m) \in \{1, 2, ..., 2^m\}$ mit $f_{2^m+k_m-1}(x_0) = 1$, nämlich gerade so, dass $x_0 \in E_{k_m}^m$ gilt. Diese Teilfolge verhindert nun eine Konvergenz der Folge $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null.

5 Das Lebesgue-Integral

Definition 5.1. Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$, $f : X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative messbare Funktion und

$$T_f^E := \left\{ \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} : n \in \mathbb{N},\ c_i \geq 0,\ E_i \in \mathcal{M},\ \varphi(x) \leq f(x)\ \forall x \in E \right\}$$

die Menge aller nichtnegativen messbaren Treppenfunktionen, die auf E punktweise Minoranten von f sind. Dann heißt die Zahl

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \sup_{\varphi \in T_f^E} \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i)$$

Lebesgue-Integral von f auf E.

Bemerkung. Das Lebesgue-Integral einer nichtnegativen Funktion kann den Wert $+\infty$ annehmen. Die Definition ist sinnvoll, da nach Satz 4.16 jede nichtnegative, messbare Funktion beliebig genau von unten durch Treppenfunktionen angenähert werden kann.

Definition 5.2. Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Gilt $\int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ oder $\int_E f_- \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, so heißt

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu := \int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f_- \, \mathrm{d}\mu$$

Lebesgue-Integral von f auf E (mit f_+ und f_- wie in Folgerung 4.12). Die Funktion f heißt *summierbar* auf E, wenn $\int_E f_+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ und $\int_E f_- \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ gilt. Mit $\mathcal{L}(E, \mu)$ bezeichnen wir die Menge der bezüglich μ auf E summierbaren Funktionen.

Bemerkung (Alternative Definition des Lebesgue-Integrals für *beschränkte* Funktionen).
Im Falle beschränkter, messbarer Funktionen kann das Lebesgue-Integral äquivalent wie folgt definiert werden: Für

$$m := \inf_{x \in E} f(x) > -\infty \qquad \text{und} \qquad M := \sup_{x \in E} f(x) < +\infty$$

bezeichne

$$\mathcal{Z} := \big\{ \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} : m = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M,\ n \in \mathbb{N} \big\}$$

die Familie aller endlichen Zerlegungen von $[m, M]$ und für $Z = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in \mathcal{Z}$ setzen wir $E_i(Z) := \{x \in E : y_i \leq f(x) < y_{i+1}\}$, wenn $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, und $E_n(Z) := \{x \in E : f(x) = y_n\}$. Dann kann man

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(E_i(Z))$$

zeigen.

Beispiel 5.3. Wir betrachten $X = \mathbb{R}$ mit dem Lebesgue-Maß μ und wählen $E := [0, 1]$ sowie

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(die so genannte *Dirichlet-Funktion*). Da $\mu(\mathbb{Q}) = 0$ gilt, ist f messbar. Für f ist das Riemann-Integral nicht definiert, weil die Funktion in keinem Punkt stetig ist. Jedoch existiert das Lebesgue-Integral. Wir zeigen

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Sei also $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ eine Zerlegung von $[0, 1]$ (vgl. vorhergehende Bemerkung). Dann gilt

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in E : 0 = y_1 \leq f(x) < y_2\} = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ E_i &:= \{x \in E : 0 < y_i \leq f(x) < y_{i+1} \leq 1\} = \emptyset \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, n-1, \\ E_n &:= \{x \in E : f(x) = y_n = 1\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \mu(E_i) = 0 \cdot \mu([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) + 1 \cdot \underbrace{\mu([0, 1] \cap \mathbb{Q})}_{\leq \mu(\mathbb{Q}) = 0} = 0.$$

Beachte: Das gleiche Ergebnis folgt auch unmittelbar aus Definition 5.1, weil f selbst eine Treppenfunktion ist.

Lemma 5.4. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Treppenfunktion. Dann gilt*

$$\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i).$$

Beweis. Setzen wir $I_+ := \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n,\ c_i > 0\}$ und $I_- := \{i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n,\ c_i < 0\}$, so gilt $\varphi_+ = \sum_{i \in I_+} c_i \chi_{E_i}$ und $\varphi_- = -\sum_{i \in I_-} c_i \chi_{E_i}$. Aus Definition 5.1 folgt nun sofort

$$\int_E \varphi_+ \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i \in I_+} c_i \mu(E \cap E_i) \qquad \text{und} \qquad \int_E \varphi_- \,\mathrm{d}\mu = -\sum_{i \in I_-} c_i \mu(E \cap E_i).$$

Nach Definition 5.2 gilt somit

$$\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_E \varphi_+ \,\mathrm{d}\mu - \int_E \varphi_- \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i).$$

$\square$

Satz 5.5 (Eigenschaften des Lebesgue-Integrals)**.** *Seien* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{M}$ *sowie* $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar.*

(i) Gilt $m \leq f(x) \leq M$ *für alle* $x \in E$ *mit Konstanten* $m, M \in \mathbb{R}$*, so folgt*

$$m\mu(E) \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq M\mu(E).$$

(ii) [1] *Mit* $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *und* $c \in \mathbb{R}$ *gilt* $f + g, cf \in \mathcal{L}(E, \mu)$ *und*

$$\int_E (f+g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_E g \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{sowie} \qquad \int_E cf \,\mathrm{d}\mu = c \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

(iii) Ist $A \subseteq E$ *messbar (d.h.* $A \in \mathcal{M}$*) und gilt* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in E$*, so folgt*

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

(iv) Gilt $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in E$*, so folgt*

$$0 \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

(v) Aus $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in E$ *folgt die Äquivalenz*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \textit{ für fast alle } x \in E.$$

Beweis. (i) Man überlegt sich leicht, dass

$$\max\{0, m\} \leq f_+(x) \leq \max\{0, M\} \quad \text{und} \quad -\min\{0, M\} \leq f_-(x) \leq -\min\{0, m\}$$

für alle $x \in E$ gilt. Da somit $\max\{0, m\}\chi_E$ bzw. $-\min\{0, M\}\chi_E$ am Supremum in der

[1] Diese Aussage kann erst später mit Mitteln des Kapitels 6 bewiesen werden.

Definition von $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu$ bzw. $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu$ teilnehmen (vgl. Definition 5.1), folgt

$$\max\{0, m\}\mu(E) \leq \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{bzw.} \qquad -\min\{0, M\}\mu(E) \leq \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu.$$

Andererseits gilt für jede Treppenfunktion φ, die am Supremum in der Definition von $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu$ bzw. $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu$ teilnimmt, $\varphi \leq \max\{0, M\}\chi_E$ bzw. $\varphi \leq -\min\{0, m\}\chi_E$, also

$$\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu \leq \max\{0, M\}\mu(E) \qquad \text{bzw.} \qquad \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu \leq -\min\{0, m\}\mu(E).$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} m\mu(E) = (\max\{0, m\} + \min\{0, m\})\mu(E) &\leq \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq (\max\{0, M\} + \min\{0, M\})\mu(E) = M\mu(E). \end{aligned}$$

(ii) Für den Beweis der beiden Aussagen benötigen wir Sätze, die wir erst in Kapitel 6 formulieren werden.

(iii) O.B.d.A. gelte $f \geq 0$ (auf E erfüllt, Verhalten auf $X \setminus E$ uninteressant). Wir setzen $T := \{\varphi \in T_f^A : \varphi(x) = 0 \; \forall x \in X \setminus A\}$ (vgl. Definition 5.1). Zu jedem $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \in T_f^A$ existiert dann ein $\psi = \sum_{i=1}^m d_i \chi_{F_i} \in T$ mit $\sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^m d_i \mu(A \cap F_i)$; man setze einfach $m := n$, $d_i := c_i$ und $F_i := E_i \cap A$. Somit gilt

$$\sup_{\varphi \in T_f^A} \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) \leq \sup_{\varphi \in T} \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i)$$

und aus $T \subseteq T_f^E$ folgt

$$\sup_{\varphi \in T} \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i) \leq \sup_{\varphi \in T_f^E} \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i).$$

Wegen $A \subseteq E$, d.h. $\mu(A \cap E_i) \leq \mu(E \cap E_i)$ für $E_i \in \mathcal{M}$, folgt die Behauptung.

(iv) Die Behauptung folgt wegen $T_f^E \subseteq T_g^E$ sofort aus Definition 5.1.

(v) „$\Rightarrow$“: Setzen wir

$$F := \{x \in E : f(x) > 0\} \in \mathcal{M} \qquad \text{und} \qquad E_n := \{x \in E : f(x) > \tfrac{1}{n}\},$$

so gilt $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $F = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Zu zeigen ist $\mu(F) = 0$. Wir nehmen also an, es würde $\mu(F) > 0$ gelten. Nach Satz 2.6 gilt $\mu(E_n) \to \mu(F)$ für

$n \to \infty$, sodass dann ein $\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(E_{n_0}) > \varepsilon$ existieren. Aus (iii) und (i) des Satzes folgt nun

$$0 = \int_E f \,\mathrm{d}\mu > \int_{E_{n_0}} f \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_{n_0}) > \frac{\varepsilon}{n} > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, d.h. $\mu(F) = 0$ ist gezeigt.

„$\Leftarrow$“: O.B.d.A. gelte $f \geq 0$ (auf E erfüllt, Verhalten auf $X \setminus E$ uninteressant). Sei $N \in \mathcal{M}$ eine Menge mit $\mu(N) = 0$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in E \setminus N$. Für jede Treppenfunktion $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$, die am Supremum in der Definition von $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ teilnimmt, muss dann ($c_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ vorausgesetzt) $E \cap E_i \subseteq F$ und somit $\mu(E \cap E_i) \leq \mu(F) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gelten. Also folgt $\sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i) = 0$ und damit $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

□

Satz 5.6. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar sowie $\nu : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ die durch*

$$\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu, \quad A \in \mathcal{M},$$

definierte Mengenfunktion.

(i) Gilt $f \geq 0$, so ist ν volladditiv.

(ii) Gilt $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$, so ist ν volladditiv.

Beweis. Wir zeigen (i). Seien zunächst $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt und sei $A := \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Für alle $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i} \in T_f^A$ (vgl. Definition 5.1) gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) &= \sum_{i=1}^n c_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty (A_j \cap E_i)\right) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_j \cap E_i) \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j) \end{aligned}$$

und der Übergang zum Supremum liefert

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{\varphi \in T_f^A} \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap E_i) \leq \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).$$

Hieraus werden wir weiter unten die Subvolladditivität folgern; dazu benötigen wir jedoch die Additivität von ν.

Seien also $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ disjunkt. Nach dem schon Bewiesenen gilt mit $A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$

$$\nu(A_1 \cup A_2) \leq \nu(A_1) + \nu(A_2).$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existieren $\varphi_1 \in T_f^{A_1}$ und $\varphi_2 \in T_f^{A_2}$ mit

$$\int\limits_{A_1} f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{A_1} \varphi_1 \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{A_2} f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{A_2} \varphi_2 \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon.$$

Setzen wir $\quad \varphi(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{falls } x \in A_1 \\ \varphi_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad$ so gilt $\varphi \in T_f^{A_1 \cup A_2}$, und es folgt

$$\begin{aligned} \nu(A_1) + \nu(A_2) &= \int\limits_{A_1} f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{A_1} \varphi_1 \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} \varphi_2 \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \\ &= \int\limits_{A_1} \varphi \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{A_2} \varphi \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \overset{(*)}{=} \int\limits_{A_1 \cup A_2} \varphi \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon \\ &\leq \int\limits_{A_1 \cup A_2} f \,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon = \nu(A_1 \cup A_2) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei man sich die Gleichheit $(*)$ als Eigenschaft von Treppenfunktionen leicht überlegen kann. Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert die Additivität von ν.

Zurück zum Beweis der Subvolladditivität. Seien nun $B, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty B_i$. Setzen wir $A_1 := B \cap B_1$ und $A_i := (B \cap B_i) \setminus (\bigcup_{j=1}^{i-1} B_j)$, so gilt $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ sowie $A_i \subseteq B_i$. Also folgt

$$\nu(B) \leq \sum_{i=1}^\infty \nu(A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \nu(B_i),$$

d.h. ν ist subvolladditiv (die Additivität haben wir dabei zur Anwendung von Satz 2.5 (v) benötigt). Aus Satz 2.5 (vii) folgt nun die Volladditivität von ν.

Wie zeigen noch (ii). Wegen $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ sind die durch

$$\nu_+(A) := \int\limits_A f_+ \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{und} \qquad \nu_-(A) := \int\limits_A f_- \,\mathrm{d}\mu$$

definierten nichtnegativen Mengenfunktionen endlich, d.h. für alle $A \in \mathcal{M}$ gilt $\nu_+(A) < \infty$

und $\nu_-(A) < \infty$. Nach (i) sind ν_+ und ν_- volladditiv. Wegen

$$\nu(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_A f_- \,\mathrm{d}\mu = \nu_+(A) - \nu_-(A)$$

sieht man die Volladditivität von ν nun leicht ein. □

Folgerung 5.7. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative, messbare Funktion und $A, B \in \mathcal{M}$ mit $B \subseteq A$ und $\mu(A \setminus B) = 0$. Gilt $\int_A f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ oder $\int_B f \,\mathrm{d}\mu < \infty$, so ist auch das jeweils andere Integral endlich und die Werte der beiden Integrale stimmen überein.*

Beweis. Nach Satz 5.6 (i) (benötigen hier nur die Additivität) gilt

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \underbrace{\int\limits_{A\setminus B} f \,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_B f \,\mathrm{d}\mu,$$

wobei man sich das Verschwinden des ersten Summanden leicht anhand der Definition des Integrals überlegen kann. □

Definition 5.8. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $E \in \mathcal{M}$. Zwei messbare Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir als *äquivalent* auf E und schreiben $f \overset{E}{\sim} g$, wenn $\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) = 0$ gilt, d.h. wenn f und g fast überall auf E übereinstimmen.

Bemerkung. Man zeigt leicht, dass $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{M}$ gilt und dass $\overset{E}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller messbaren Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist.

Bemerkung. Aus Folgerung 5.7 erhält man, dass für $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ mit $f \overset{E}{\sim} g$ die Gleichheit

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu$$

gilt.

Satz 5.9. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ genau dann , wenn $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$ erfüllt ist. Dabei ist für alle $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ die Ungleichung*

$$\left|\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu$$

gültig.

Beweis. Sei $A := \{x \in E : f(x) \geq 0\}$. Dann gilt

$$\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A |f| \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus A} |f| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_{E\setminus A} f_- \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu$$

(bei der ersten Gleichheit haben wir Satz 5.6 (i) verwendet), d.h. $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ gilt genau dann, wenn $\int_E f_+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und $\int_E f_- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Die im Satz formulierte Ungleichung ergibt sich wegen der Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$ direkt aus der Abschätzung

$$\left|\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \left|\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu\right| = \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Satz 5.10. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in E$. Aus $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ folgt dann $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und*

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $T^E_{|f|} \subseteq T^E_g$ folgt aus Definition 5.1

$$\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu,$$

d.h. $|f| \in \mathcal{L}(E, \mu)$. Nach Satz 5.9 gilt dann auch $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und mit dem Beweis zu Satz 5.9 erhalten wir

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

□

6 Grenzwertsätze für Integrale

Satz 6.1 (Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz)**.** *Seien* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *ein Maßraum,* $E \in \mathcal{M}$ *und* $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *messbare Funktionen mit* $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ *für alle* $x \in E$ *und* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *für alle* $x \in E$*. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $f_n(x) \leq f(x)$ für $x \in E$ folgt $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Insbesondere ist die Behauptung also für $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ gezeigt. Für $n \in \mathbb{N}$, $c \in (0, 1)$ und $\varphi \in T_f^E$ (vgl. Definition 5.1) definieren wir

$$E_n(\varphi, c) := \{x \in E : f_n(x) \geq c\varphi(x)\}.$$

Dann gilt $E_n(\varphi, c) \in \mathcal{M}$ sowie $E_1(\varphi, c) \subseteq E_2(\varphi, c) \subseteq \cdots \subseteq E$. Wegen $f(x) \geq \varphi(x)$ für alle $x \in E$ existiert zu jedem $x \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) \geq c\varphi(x)$, d.h. es folgt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(\varphi, c)$. Weiter gilt

$$\int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{E_n(\varphi,c)} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{E_n(\varphi,c)} c\varphi \,\mathrm{d}\mu = c \int\limits_{E_n(\varphi,c)} \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $\varphi \in T_f^E$ und alle $c \in (0, 1)$, wobei die letzte Gleichheit leicht aus Lemma 5.4 als Eigenschaft aller Treppenfunktionen folgt. Bei Grenzübergang für $n \to \infty$ ergibt sich daraus wegen Satz 5.6 (i) in Verbindung mit Satz 2.6

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n(\varphi,c)} \varphi \,\mathrm{d}\mu = c \int\limits_E \varphi \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Durch Übergang zum Supremum über alle $\varphi \in T_f^E$ erhält man schließlich entsprechend der Definition des Integrals über Treppenfunktionen

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geq c \sup_{\varphi\in T_f^E} \int\limits_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = c \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Der Grenzübergang $c \to 1$ liefert dann die Behauptung. □

Mit Satz 6.1 können wir nun auch den folgenden wichtigen Satz beweisen.

Satz 6.2. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $c \in \mathbb{R}$ und $f, g : X \to [0, \infty]$ zwei nichtnegative, messbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{und} \qquad \int_E cf\,\mathrm{d}\mu = c\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

für alle $E \in \mathcal{M}$.

Beweis. Wir zeigen die Additivität zunächst für zwei messbare Treppenfunktionen $\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ und $\psi = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{F_j}$ (o.B.d.A. gelte $\bigcup_{i=1}^n E_i = X = \bigcup_{j=1}^m F_j$). Es gilt

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m \chi_{E_i \cap F_j} + \sum_{j=1}^m d_j \sum_{i=1}^n \chi_{E_i \cap F_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i + d_j)\chi_{E_i \cap F_j}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_E (\varphi+\psi)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (c_i+d_j)\mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^m \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^m d_j \sum_{i=1}^n \mu(E_i \cap F_j)\\ &= \sum_{i=1}^n c_i\mu(E_i) + \sum_{j=1}^m d_j \mu(F_j) = \int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_E \psi\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Zu f und g existieren nach Satz 4.16 Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer (vgl. Beweis zu 4.16), messbarer Treppenfunktionen auf X mit $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots$ bzw. $0 \le \psi_1 \le \psi_2 \le \dots$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ bzw. $g(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$ für alle $x \in X$. Außerdem gilt $0 \le \varphi_1 + \psi_1 \le \varphi_2 + \psi_2 \le \dots$ und $(f+g)(x) = \lim_{n\to\infty}(\varphi_n + \psi_n)(x)$ für alle $x \in X$. Mit Satz 6.1 folgt nun

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n + \psi_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E \varphi_n\,\mathrm{d}\mu + \lim_{n\to\infty}\int_E \psi_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Die Homogenität folgt für nichtnegative, messbare Treppenfunktionen sofort aus Lemma 5.4. Zu f wählen wir nun wieder eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer, messbarer Treppenfunktionen mit $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt für $c \ge 0$ auch $0 \le c\varphi_1 \le c\varphi_2 \le \dots$ und $(cf)(x) = \lim_{n\to\infty}(c\varphi_n)(x)$ für alle $x \in X$, sodass aus Satz 6.1

$$\int_E cf\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E c\varphi_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} c\int_E \varphi_n\,\mathrm{d}\mu = c\int_E f\,\mathrm{d}\mu$$

folgt. Für $c \leq 0$ gilt nun (vgl. Definition 5.2)

$$\int\limits_E cf \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \underbrace{(cf)_+}_{=0} \mathrm{d}\mu - \int\limits_E \underbrace{(cf)_-}_{=-cf} \mathrm{d}\mu = -\int\limits_E (-c)f \,\mathrm{d}\mu = -(-c)\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = c\int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Satz 6.3. *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Gilt $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$, so ist f für fast alle $x \in E$ endlich.*

Beweis. Sei $A^+ := \{x \in E : f(x) = +\infty\}$ und sei $A_n^+ := \{x \in E : f(x) > n\}$ für $n = 1, 2, \ldots$. Dann gilt $A^+ \subseteq A_n^+$ für $n = 1, 2, \ldots$ und somit

$$0 \leq \mu(A^+) \leq \mu(A_n^+) = \int_{A_n^+} 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{A_n^+} \frac{1}{n} f \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\int\limits_{A_n^+} f_+ \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{n}\underbrace{\int\limits_E f_+ \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty},$$

d.h. $\mu(A^+) = 0$. Für $A^- := \{x \in E : f(x) = -\infty\}$ und $A_n^- := \{x \in E : f(x) < -n\}$ erhalten wir analog

$$0 \leq \mu(A^-) \leq \mu(A_n^-) \leq \int\limits_{A_n^-} 1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{A_n^-} \frac{1}{n}(-f) \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{n}\int\limits_{A_n^-} f_- \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{n}\underbrace{\int\limits_E f_- \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty},$$

d.h. $\mu(A^-) = 0$. □

Satz 6.4 (Satz von Lebesgue über monotone Konvergenz)**.** *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen mit $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in E$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in E$. Existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f_m \in \mathcal{L}(E, \mu)$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. O.B.d.A. gelte $m = 1$ (sonst die ersten $m-1$ Folgenelemente verwerfen und den Rest neu nummerieren). Nach Satz 6.3 ist f_1 dann fast überall auf E endlich. O.B.d.A. können wir annehmen, dass f_1 auf ganz E endlich ist (sonst f_1 durch äquivalente, auf E endliche Funktion ersetzen). Definieren wir $g_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) - f_1(x), & x \in E, \\ 0, & x \in X \setminus E, \end{cases}$$

so ist g_n messbar und es gilt $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$. Außerdem setzen wir $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$

für $x \in X$. Die so definierte Funktion $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist ebenfalls messbar. Satz 6.1 liefert nun

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n - f_1 \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f - f_1 \,\mathrm{d}\mu,$$

und somit die Behauptung (unter Verwendung von Satz 5.5 (ii)). □

Satz 6.5 (Lemma von Fatou)**.** *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen.*

(i) Gilt $f_n \geq 0$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\int\limits_E \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

(ii) Gilt $f_n(x) \leq 0$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\int\limits_E \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir zeigen (i). Setzen wir $g_n := \inf_{k\geq n} f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt $g_n(x) \geq 0$ sowie $0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots$ für alle $x \in E$. Es folgt $0 \leq \int_E g_1 \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E g_2 \,\mathrm{d}\mu \leq \ldots$ und damit die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$. Außerdem gilt $g_n \leq f_n$, also $\int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. Wir erhalten hieraus zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Setzen wir nun $g := \lim_{n\to\infty} g_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ und wenden Satz 6.1 auf g und g_n an, so erhalten wir außerdem

$$\int\limits_E \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Damit ist (i) gezeigt. Punkt (ii) folgt nun direkt aus (i), da

$$\int\limits_E \limsup_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = -\int\limits_E \liminf_{n\to\infty} \underbrace{(-f_n)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\mu \geq -\liminf_{n\to\infty} \int\limits_E -f_n \,\mathrm{d}\mu = \limsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu$$

gilt. □

Satz 6.6 (Satz von Lebesgue über dominante Konvergenz)**.** *Seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum, $E \in \mathcal{M}$ und $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für* *alle $x \in E$. Existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ mit*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in E,$$

so gilt $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in E$, sodass aus Satz 5.10 $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ folgt. Nach Satz 6.5 gilt dann

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_E \underbrace{f_n - g}_{\leq 0} \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E \limsup_{n\to\infty}(f_n - g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f - g \,\mathrm{d}\mu,$$

sowie

$$\int\limits_E (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \liminf_{n\to\infty} \underbrace{(f_n + g)}_{\geq 0} \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n + g \,\mathrm{d}\mu.$$

Zusammen liefert dies

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$ existiert und ist gleich $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$. □

Bemerkung. Satz 6.6 liefert eine hinreichende Bedingung für die Summierbarkeit einer messbaren Funktion. Wir wollen zusätzlich eine notwendige und zugleich hinreichende Bedingung formulieren:

Gilt für messbare Funktionen $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{M}, \mu)$ die Eigenschaft $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots$ sowie $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in E \in \mathcal{M}$, so ist $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ genau dann erfüllt, wenn eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\int_E f_{n_k} \,\mathrm{d}\mu \leq C < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert, was äquivalent ist zur Bedingung $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Mit $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$ gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu := C < \infty.$$

Existiert umgekehrt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit der geforderten Eigenschaft für ein $C \geq 0$, so gilt die Eigenschaft aufgrund der Monotonie der Folge (f_n) für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Satz 6.5 folgt nun

$$0 \leq \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq C,$$

d.h. $f \in \mathcal{L}(E, \mu)$.

Als Gegenbeispiel kann man betrachten

$$\mu(E) = m < \infty, \qquad f_n(x) \equiv n, \qquad \lim_{n\to\infty} f_n = f \equiv +\infty, \qquad \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = n\,m < \infty$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\mu = \infty.$$

Es gibt also keine Konstante $C > 0$ mit $\int\limits_E f_n \,\mathrm{d}\mu < C \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Wir haben dann zwar $f_n \in \mathcal{L}(E,\mu) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, aber $f \notin \mathcal{L}(E,\mu)$.

7 Vergleich von Lebesgue-Integral und Riemann-Integral

In diesem Kapitel betrachten wir ausschließlich den Lebesgue'schen Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \mu)$, d.h. μ ist das Lebesgue-Maß auf der Lebesgue'schen σ-Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Weiter betrachten wir messbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d.h. die Urbilder $f^{-1}(B)$ von Borel-Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind selbst Borel-Mengen und gehören damit zu $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. Im Mittelpunkt stehen in diesem Kapitel Funktionen f, die nur auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < +\infty$ zu definieren sind. Dann kann man sich f als mit Null auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt betrachten. Eine alternative Betrachtungsweise besteht darin, gleich den Maßraum $([a, b], \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap [a, b], \mu)$ anzusehen, wobei dann unter $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$ die so genannte Spur-σ-Algebra von $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ eingeschränkt auf das Intervall $[a, b]$ zu vestehen ist. Beides führt in der Regel zum gleichen Ergebnis.

Es sollen im Weiteren

$$(\mathrm{R}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad (\mathrm{L}) \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu$$

das Riemann- bzw. Lebesgue-Integral von f auf $[a, b]$ bezeichnen. Während der Begriff des Lebesgue-Integrals aus Kapitel 5 hinreichend gut bekannt ist, wollen wir den Begriff des Riemann-Integrals hier noch einmal wiederholen und im Lichte von Treppenfunktionen etwas anders interpretieren.

Dazu betrachten wir eine Folge von Zerlegungen $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des Intervalls $[a, b]$ mit $Z_k = \{x_0^k, x_1^k, \ldots, x_k^k\}$ und $a = x_0^k < x_1^k < \cdots < x_k^k = b$ sowie $\Delta Z_k := \max_{1\le i\le k} |x_i^k - x_{i-1}^k|$. Wir nehmen an, dass aufeinanderfolgende Zerlegungen Z_k und Z_{k+1} durch Einfügung eines zusätzlichen Punktes erfolgen, sodass $Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots Z_k \subset Z_{k+1} \subset \ldots$ gilt, und die maximalen Längen von Teilintervallen in der Zerlegung asymptotisch für $k \to \infty$ gegen Null gehen, d.h. $\lim_{k\to\infty} \Delta Z_k = 0$ gilt. Solche Zerlegungsfolgen nennen wir regulär.

Für beschränkte Funktionen f betrachtet man nun die auf ganz $\mathbb{R}$ definierten reellen Unterfunktionen $L(x)$ und Oberfunktionen $U(x)$, die über die Zuordnungen

$$U_k(a) := L_k(a) := f(a), \qquad U_k(x) := L_k(x) := 0 \;\text{ für }\; x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$$

und für $x \in (x_{i-1}^k, x_i^k]$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

$$U_k(x) := M_i := \sup_{\xi\in(x_{i-1}^k, x_i^k]} f(\xi) \qquad \text{bzw.} \qquad L_k(x) := m_i := \inf_{\xi\in(x_{i-1}^k, x_i^k]} f(\xi)$$

definiert sind. Diese Funktionen sind offenbar messbare Treppenfunktionen, und es gilt

$$(\mathrm{L})\int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^k m_i(x_i^k - x_{i-1}^k) =: s(Z_k, f)$$

bzw.

$$(\mathrm{L})\int_a^b U_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^k M_i(x_i^k - x_{i-1}^k) =: S(Z_k, f).$$

Wir haben dabei die Untersummen $s(Z_k, f)$ und die Obersummen $S(Z_k, f)$ der Zerlegung Z_k ins Spiel gebracht. Wegen $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots$ erhalten wir

$$U_1(x) \geq U_2(x) \geq \cdots \geq f(x) \geq \cdots \geq L_2(x) \geq L_1(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Wir setzen

$$U(x) := \lim_{k\to\infty} U_k(x) \qquad \text{und} \qquad L(x) := \lim_{k\to\infty} L_k(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Definition 7.1. Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und für jede reguläre Zerlegungsfolge gilt

$$\lim_{k\to\infty} s(Z_k, f) = \lim_{k\to\infty} S(Z_k, f),$$

wobei wir diesen dann von der konkreten Zerlegungsfolge unabhängigen Grenzwert Riemann-Integral von f über $[a, b]$ nennen und mit dem Symbol $(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnen.

Eine äquivalente Definition der Riemann-Integrierbarkeit auf der Basis von dem Riemann-Integral angepassten Treppenfunktionen (wir nennen sie hier (R)-Treppenfunktionen) soll im Folgenden noch erwähnt werden (vgl. ▷ K. D. Schmidt: *Maß und Wahrscheinlichkeit*, S.181f). Mit Blick auf das Intervall $[a, b]$ werde dabei eine Treppenfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als (R)-Treppenfunktion bezeichnet, wenn sie die spezielle Gestalt $f(x) = c_i$ mit $x_{i-1} < x < x_i$ $(i = 1, 2, ..., k)$ für eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} < x_k = b$ des Intervalls $[a, b]$ besitzt. Es gilt dann offensichtlich $(\mathrm{L})\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^k c_i(x_i - x_{i-1})$.

Definition 7.2. Eine auf $[a, b]$ definierte reelle Funktion f heißt Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und die reellen Zahlen

$$s := \sup\left\{ (\mathrm{L})\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \ \ \varphi \text{ ist (R)-Treppenfunktion mit } \varphi(x) \leq f(x) \ \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

und

$$S := \inf \left\{ (\mathrm{L}) \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x : \quad \varphi \text{ ist (R)-Treppenfunktion mit } f(x) \leq \varphi(x) \ \ \forall x \in [a,b] \right\}$$

übereinstimmen, wobei dann als Riemann-Integral (R) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := s = S$ bezeichnet wird.

Wir werden uns aber auf die erste Version der Definition konzentrieren und können nun auf der Grundlage der oben durchgeführten Überlegungen leicht den folgenden Satz beweisen.

Satz 7.3. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und es gelte $-\infty < a < b < +\infty$.*

(i) Ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, so gilt $f \in \mathcal{L}([a,b],\mu)$ und

$$(\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(ii) Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, wenn sie auf $[a,b]$ beschränkt und fast überall auf $[a,b]$ stetig ist.

Beweis. Wir beweisen (i). Da f Riemann-integrierbar ist, ist f beschränkt. Aus der Riemann-Integrierbarkeit von f folgt für eine reguläre Zerlegungsfolge

$$\lim_{k\to\infty} s(Z_k, f) = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} S(Z_k, f).$$

Andererseits folgt aus Satz 6.6 (Satz von Lebesgue über dominante Konvergenz)

$$\lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b U_k(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_a^b U(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x,$$

zusammen also

$$(\mathrm{L}) \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_a^b U(x)\,\mathrm{d}x.$$

Schließlich folgt mit Satz 5.5 (v) aus $L(x) \leq f(x) \leq U(x)$ für $x \in [a,b]$, d.h. $U(x) - L(x) \geq 0$, und (L) $\int_a^b [U(x) - L(x)]\,\mathrm{d}x = 0$, dass $U(x) = f(x) = L(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$ gilt. Somit erhalten wir $f \in \mathcal{L}([a,b],\mu)$ und

$$(\mathrm{L}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir beweisen nun noch (ii). Seien die Bezeichnungen wie im Beweis zu (i). Mit $Z := \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ gilt dann $\mu(Z) = 0$ (da Z abzählbar ist). Wir zeigen zunächst als wichtige Hilfsaussage, dass f genau dann stetig in $x_0 \in [a,b] \setminus Z$ ist, wenn $U(x_0) = L(x_0)$ gilt.

Sei f also stetig in $x_0 \in [a,b] \setminus Z$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Wegen $\Delta Z_k \to 0$ existiert ein $K \in \mathbb{N}$ mit $\Delta Z_k < \delta$ für alle $k \geq K$. Für $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ mit $x_0 \in (x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ gilt folglich

$$U_k(x_0) - L_k(x_0) = M_{i_0} - m_{i_0} = (M_{i_0} - f(x_0)) + (f(x_0) - m_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und aus $\varepsilon \to 0$ folgt somit $U(x_0) = L(x_0)$. Es gelte nun $U(x_0) = L(x_0)$ für $x_0 \in [a,b] \setminus Z$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es wegen $U(x_0) = f(x_0) = L(x_0)$ dann ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$U_K(x_0) - f(x_0) < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad f(x_0) - L_K(x_0) < \varepsilon.$$

Setzen wir $\delta := \min_{x \in Z_k} |x_0 - x|$, so gilt außerdem

$$L_K(x_0) \leq f(x) \leq U_K(x_0) \qquad \text{für alle } x \in [a,b] \setminus Z \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Zusammen erhalten wir $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$, d.h. f ist stetig in x_0. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Ist f nun Riemann-integrierbar, so ist f beschränkt und aus dem Beweis zu (i) folgt, dass $U(x) = f(x) = L(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$ und damit auch für fast alle $x \in [a,b] \setminus Z$ gilt. Wegen der Hilfsaussage ist f dann für fast alle $x \in [a,b] \setminus Z$ stetig und folglich fast überall auf $[a,b]$ stetig. Ist umgekehrt f beschränkt und fast überall stetig auf $[a,b]$, so gilt wegen der Hilfsaussage $U(x) = f(x) = L(x)$ fast überall auf $[a,b] \setminus Z$ und damit auch fast überall auf $[a,b]$. Es folgt

$$(\mathrm{L}) \int_a^b U(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{L}) \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x$$

und mit Satz 6.6 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \big(S(Z_k, f) - s(Z_k, f)\big) &= \lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b U_k(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty} (\mathrm{L}) \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (\mathrm{L}) \int_a^b U(x)\,\mathrm{d}x - (\mathrm{L}) \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x = 0,
\end{aligned}$$

d.h. f ist Riemann-integrierbar auf $[a,b]$. $\square$

Beispiel 7.4. Die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$ aus Beispiel 5.3 ist beschränkt, aber nirgends stetig. Nach Satz 7.3 (ii) ist sie also nicht Riemann-integrierbar.

Beispiel 7.5. Wir ändern die Dirichlet-Funktion auf $[0,1]$ aus Beispiel 5.3 wie folgt:

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ x^2, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist messbar und nach Satz 7.3 (i) gilt

$$(\mathrm{L}) \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} f\,\mathrm{d}\mu}_{=0} + \int_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} f\,\mathrm{d}\mu = (\mathrm{L}) \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

weil wir den Integranden auf einer Menge vom Maß Null beliebig ändern dürfen. Da f in keinem Punkt stetig ist, ist f nicht Riemann-integrierbar auf $[0,1]$, jedoch gibt es eine äquivalente Riemann-integrierbare Funktion, nämlich $x \mapsto x^2$.

Beispiel 7.6. Ein ähnliches, aber doch anders geartetes Beispiel liefert die Thomae-Funktion auf $[0,1]$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \ (m,n \text{ teilerfremd}), \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese ist genau in allen irrationalen Punkten des Intervalls $[0,1]$ stetig und somit nur auf einer Menge vom Maße Null unstetig. Damit ist die Funktion Riemann-integrierbar und das Riemann-Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein, welches offensichtlich den Wert Null besitzt.

Beispiel 7.7. Wir betrachten die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

gegebene Funktion. Diese ist auf $[0,T]$ stetig für alle $T > 0$ und damit auf jedem solchen beschränkten Intervall Riemann-integrierbar. Im Sinne eines uneigentlichen Riemann-Integrals gilt

$$(\mathrm{R}) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} (\mathrm{R}) \int_0^T \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Wegen $\int_{[0,\infty)} |f|\,\mathrm{d}\mu = +\infty$, d.h. $|f| \notin \mathcal{L}([0,\infty),\mu)$, gilt aber $f \notin \mathcal{L}([0,\infty),\mu)$. Wegen der Endlichkeit des uneigentlichen Integrals $(\mathrm{R}) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x < \infty$ müssen dann aber beide Integrale $\int_{[0,\infty)} f_+\,\mathrm{d}\mu$ und $\int_{[0,\infty)} f_-\,\mathrm{d}\mu$ gleich $+\infty$ sein, denn es können nicht beide gleichzeitig endlich sein und eines davon endlich und das andere $+\infty$ würde dem widersprechen.

Beispiel 7.8. Wir betrachten eine fast überall stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$, $f(x) \geq 0$ für $x \geq 0$ und (R) $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$ für alle $T > 0$. Setzen wir

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & x \leq n, \\ 0, & x > n, \end{cases}$$

so gilt $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ und

$$\int\limits_{[0,\infty)} f_n \,\mathrm{d}\mu = (\mathrm{L}) \int\limits_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_0^n f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Wegen $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt aus Satz 6.1

$$\int\limits_{[0,\infty)} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,\infty)} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{R}) \int\limits_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R}) \int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := I.$$

Somit gilt $f \in \mathcal{L}([0,\infty), \mu)$ genau dann, wenn $I < \infty$ gilt.

8 L^p-Räume und Ausblick auf Soboleväume

Definition 8.1. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$.

(i) Mit $[f] := \{g : X \to \overline{\mathbb{R}} : g \text{ messbar}, \; g \overset{X}{\sim} f\}$ (vgl. Definition 5.8) bezeichnen wir die Äquivalenzklasse aller fast überall mit f identischen, messbaren Funktionen auf X. Die Funktion f heißt dabei Repräsentant der Äquivalenzklasse.

(ii) Für $p \in [1, \infty)$ setzen wir

$$\|[f]\|_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

und wir setzen

$$\|[f]\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_X |f| := \inf\{c \in \overline{\mathbb{R}} : |f(x)| \leq c \text{ für fast alle } x \in X\}.$$

(iii) Für $p \in [1, \infty]$ setzen wir

$$L^p(X, \mu) := \{[g] : g : X \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar } \|[g]\|_p < \infty\}.$$

Das Paar $(L^p(X, \mu), \|\bullet\|_p)$ bezeichnen wir als L^p-Raum.

Bemerkung. Der Kürze halber schreiben wir statt $\|[f]\|_p$ stets $\|f\|_p$ und statt $[f] \in L^p(X, \mu)$ nur $f \in L^p(X, \mu)$. Es erweist sich, dass die Zuordnung $\|[f]\|_p$ für alle $p \in [1, \infty]$ die drei Normaxiome erfüllt und dass die Paare $(L^p(X, \mu), \|\bullet\|_p)$ lineare normierte Räume repräsentieren. Die Größe $\operatorname{ess\,sup}_X f$ heißt *wesentliches Supremum* einer Funktion f auf X.

Beispiel 8.2. Sei $X := (0, 1)$, μ das Lebesguemaß und wir schreiben kurz $L^p(0, 1)$.

(a) Für die Funktion $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ gilt $x \in L^p(0, 1)$ genau dann, wenn $p < 2$ ist.

(b) Für die Funktion $x(t) = \frac{1}{t}$ gilt $x \notin L^\infty(0, 1)$.

(c) Für die Funktion $x(t) = \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ gilt $x \in L^\infty(0, 1)$.

Definition 8.3. Für $p \in (1, \infty)$ heißt der durch $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eindeutig bestimmte Wert $q \in (1, \infty)$ der zu p *konjugierte Wert*. Statt q schreibt man auch p^*. Für $p = 1$ bezeichnen wir $q = \infty$ als konjugierten Wert und für $p = \infty$ setzen wir $q = 1$.

Bemerkung. Offensichtlich gilt $(p^*)^* = p$.

Lemma 8.4 (Young'sche Ungleichung). *Für konjugierte Werte $p, q \in (1, \infty)$ gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \textit{für alle } a, b \geq 0.$$

Beweis. Die zu zeigende Ungleichung ist offensichtlich äquivalent zu $c^{\frac{1}{p}} d^{\frac{1}{q}} \leq \frac{c}{p} + \frac{d}{q}$ für $c, d \geq 0$. O.B.d.A. nehmen wir $c \geq d > 0$ an (für $c = d = 0$ ist die Behauptung trivial). Mit $t := \frac{c}{d} \geq 1$ und Division durch d erhalten wir die äquivalente Ungleichung $t^{\frac{1}{p}} \leq \frac{t}{p} + \frac{1}{q}$. Setzen wir $g(t) := t^{\frac{1}{p}}$ und $h(t) := \frac{t}{p} + \frac{1}{q}$, so müssen wir also $g(t) \leq h(t)$ für $t \geq 1$ zeigen. Aus

$$g'(t) = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p} - 1} = \frac{1}{p} t^{-\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} = h'(t) \quad \text{für } t \geq 1$$

folgt, dass h stärker wächst als g, und zusammen mit $g(1) = h(1) = 1$ liefert dies die Behauptung. ☐

Satz 8.5 (Hölder- und Minkowski-Ungleichung). *Seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten. Dann gelten*

(i) die Hölder-Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \textit{für} \quad f \in L^p(X, \mu),\ g \in L^q(X, \mu)$$

und

(ii) die Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \textit{für} \quad f, g \in L^p(X, \mu)\,.$$

Beweis. Wir zeigen (i). Seien zunächst $p, q \in (1, \infty)$ und o.B.d.A. gelte $\|f\|_p \neq 0$ sowie $\|g\|_q \neq 0$ (sonst $fg = 0$ fast überall). Mit

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \qquad \text{und} \qquad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

liefert Lemma 8.4

$$0 \leq \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

und Integration über X ergibt

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p\|f\|_p^p} \underbrace{\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \underbrace{\int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu}_{=\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Daraus folgt nun sofort die Behauptung.

Wir zeigen die Behauptung für $p = \infty$ und $q = 1$ (für $p = 1$ und $q = \infty$ analog). Nach Definition des wesentlichen Supremums von $|f|$ existiert ein $\tilde{f} \in [f]$ mit

$$\operatorname*{ess\,sup}_X |f| = \sup_X |\tilde{f}|.$$

Mit Satz 5.5 (i) gilt also

$$\int\limits_X |fg| \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_X |\tilde{f}||g| \,\mathrm{d}\mu \leq \operatorname*{ess\,sup}_X |f| \int\limits_X |g| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Wir zeigen nun (ii). Seien zunächst $p, q \in (1, \infty)$. Für alle $x \in X$ gilt

$$|f(x) + g(x)|^p = |f(x) + g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \leq (|f(x)| + |g(x)|)|f(x) + g(x)|^{p-1}.$$

Integration über X liefert

$$\|f + g\|_p^p \leq \int\limits_X |f||f + g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_X |g||f + g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu$$

und mit $q := \frac{p}{p-1}$ erhalten wir aus (i)

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &\leq \|f\|_p \|(f + g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f + g)^{p-1}\|_q = (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int\limits_X (f + g)^p \,\mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{\frac{p}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Für $p = 1$ folgt die Behauptung durch Integrieren über X von

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

und für $p = \infty$ folgt die Behauptung aus der Definition des wesentlichen Supremums. □

Bemerkung. Nach Satz 8.5 (i) gilt für konjugierte Werte $p, q \in [1, \infty]$ stets

$$f \in L^p(X, \mu),\ g \in L^q(X, \mu) \quad \Rightarrow \quad fg \in L^1(X, \mu).$$

Satz 8.6. *Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(X, \mu)$ mit der Norm $\|\bullet\|_p$ ein reeller Banach-Raum.*

Beweis. Sei zunächst $1 \leq p < \infty$. Offensichtlich gilt für $f \in L^p(X, \mu)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ stets $\lambda f \in L^p(X, \mu)$ und wegen Satz 8.5 (ii) folgt aus $f, g \in L^p(X, \mu)$ auch $f + g \in L^p(X, \mu)$ (da es sich bei $L^p(X, \mu)$ eigentlich um Äquivalenzklassen handelt, müssen wir $[f] + [g] := [f + g]$ und $\lambda[f] := [\lambda f]$ definieren; man überlegt sich leicht, dass diese Definition korrekt ist). Die

Axiome des linearen Raumes kann man leicht zeigen. Ebenso sieht man leicht, dass $\|\bullet\|_p$ eine Norm ist. Es verbleibt also nur noch der Beweis der Vollständigkeit des normierten linearen Raumes $L^p(X,\mu)$.

Sei also $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Cauchy-Folge in $L^p(X,\mu)$. Zu jedem $n\in\mathbb{N}$ existiert dann ein $N(n)\in\mathbb{N}$ mit

$$\|f_k - f_l\|_p^p \leq \frac{1}{2^{2n}} \quad \text{für alle } k,l \geq N(n),$$

wobei wir o.B.d.A. $N(1) < N(2) < \ldots$ annehmen können. Konvergiert nun die durch $g_n := f_{N(n)}$ definierte Teilfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von (f_k) gegen ein $g \in L^p(X,\mu)$, d.h. $\|g_n - g\|_p \to 0$, so folgt

$$\|f_k - g\|_p \leq \|f_k - g_n\|_p + \|g_n - g\|_p = \|f_k - f_{N(n)}\|_p + \|g_n - g\|_p \leq \frac{1}{2^{\frac{2n}{p}}} + \|g_n - g\|_p$$

für $k \geq N(n)$. Da die rechte Seite für großes n beliebig klein wird, folgt $\|f_k - g\|_p \to 0$, d.h. $L^p(X,\mu)$ ist vollständig. Wir zeigen also die Konvergenz der Folge (g_n). Dazu setzen wir für $n\in\mathbb{N}$

$$Y_n := \left\{x \in X : |g_{n+1}(x) - g_n(x)|^p \geq \frac{1}{2^n}\right\}$$

sowie

$$Z_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} Y_k \qquad \text{und} \qquad Z := \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mu(Y_n) &= \int\limits_{Y_n} 1\,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{Y_n} 2^n |g_{n+1} - g_n|^p\,\mathrm{d}\mu \leq 2^n \int\limits_X |g_{n+1} - g_n|^p\,\mathrm{d}\mu \\
&= 2^n \|g_{n+1} - g_n\|_p^p \leq \frac{2^n}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
0 \leq \mu(Z) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k\right) &\leq \mu(Z_n) = \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} Y_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(Y_k) \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}},
\end{aligned}$$

d.h. $\mu(Z) = 0$ (da $n\in\mathbb{N}$ beliebig). Wir setzen nun

$$g(x) := \begin{cases} g_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_{n+1}(x) - g_n(x)), & x \in X \setminus Z, \\ 0, & x \in Z. \end{cases}$$

Die auftretende Reihe konvergiert, da zu $x \in X \setminus Z$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \notin Y_k$ für $k \geq n$ existiert.

Wir haben dann für solche x

$$\sum_{k=n}^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{k}{p}}} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{p}}},$$

d.h. die Reihe ist absolut konvergent. Man sieht leicht, dass g messbar ist. Mit Satz 6.1 folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_X |g - g_n|^p \, \mathrm{d}\mu &= \int_{X \setminus Z} |g - g_n|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus Z} \left| \sum_{k=n}^{\infty} (g_{k+1} - g_k) \right|^p \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_{X \setminus Z} \left(\sum_{k=n}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \right)^p \mathrm{d}\mu = \int_{X \setminus Z} \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=n}^{m} |g_{k+1} - g_k| \right)^p \mathrm{d}\mu \\
&= \lim_{m \to \infty} \int_{X \setminus Z} \left(\sum_{k=n}^{m} |g_{k+1} - g_k| \right)^p \mathrm{d}\mu = \lim_{m \to \infty} \left\| \sum_{k=n}^{m} |g_{k+1} - g_k| \right\|_p^p \\
&\leq \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=n}^{m} \|g_{k+1} - g_k\|_p \right)^p = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \|f_{N(k+1)} - f_{N(k)}\|_p \right)^p \\
&\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{2k}{p}}} \right)^p = \left(\frac{1}{2^{\frac{2(n-1)}{p}}} \right)^p = \frac{1}{2^{2(n-1)}} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

d.h. $g - g_n \in L^p(X, \mu)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\|g - g_n\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Außerdem folgt $g = (g - g_1) + g_1 \in L^p(X, \mu)$.

Sei nun $p = \infty$. Man zeigt leicht, dass mit $f, g \in L^\infty(X, \mu)$ auch $f + g \in L^\infty(X, \mu)$ gilt. Ebenso gilt $\lambda f \in L^\infty(X, \mu)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in L(X, \mu)$. Zum Beweis der Normaxiome (die des linearen Raums sind leicht zu prüfen) bedarf nur die Homogenität näherer Ausführungen. Seien also $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in L^\infty(X, \mu)$. Dann gilt offensichtlich $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \|f\|_\infty$. Für die Umkehrung sei $t \in (0, 1)$ beliebig. Dann gilt $t\|f\|_\infty < \|f\|_\infty$ (o.B.d.A. sei $f \neq 0$), d.h. $|f(x)| \leq t\|f\|_\infty$ gilt nicht für fast alle $x \in X$, also $\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\|f\|_\infty\}) > 0$. Somit folgt $\mu(\{x \in X : |\lambda f(x)| > t|\lambda| \|f\|_\infty\}) > 0$ und daher $\|\lambda f\|_\infty \geq t|\lambda| \|f\|_\infty$ für alle $t \in (0, 1)$. Der Grenzübergang $t \to 1$ liefert $\|\lambda f\|_\infty \geq |\lambda| \|f\|_\infty$ und damit die Homogenität von $\|\bullet\|_\infty$. Es verbleibt die Vollständigkeit von $L^\infty(X, \mu)$ zu zeigen.

Sei also $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^\infty(X, \mu)$. Wir setzen $K := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ sowie für $k, n, m \in \mathbb{N}$

$$F_k := \{x \in X : |f_k(x)| > K\} \quad \text{und} \quad E_{n,m} := \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}.$$

Offensichtlich gilt $\mu(F_k) = 0$ und $\mu(E_{n,m}) = 0$. Setzen wir $E := (\bigcup_{k=1}^\infty F_k) \cup (\bigcup_{m=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty E_{n,m})$, so gilt daher auch $\mu(E) = 0$. Jedes $x \in X \setminus E$ erfüllt nun

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \to 0 \quad \text{für } m, n \to \infty$$

sowie $|f_n(x)| \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X \setminus E$. Mit $f(x) := 0$ für $x \in E$ folgt $|f(x)| \le K$ für alle $x \in X$ und f ist eine messbare Funktion, d.h. $f \in L^\infty(X,\mu)$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \text{für alle } m,n \ge N \text{ und alle } x \in X \setminus E.$$

Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ und alle $x \in X \setminus E$, d.h. $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ (da $\mu(E) = 0$). Damit ist $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ gezeigt. □

Satz 8.7. *In $L^2(X,\mu)$ kann mittels*

$$\langle f,g\rangle_{L^2(X,\mu)} := \int\limits_X fg \,\mathrm{d}\mu \quad \textit{für } f,g \in L^2(X,\mu)$$

ein Skalarprodukt eingeführt werden, sodass

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle_{L^2(X,\mu)}} \quad \textit{für } f \in L^2(X,\mu)$$

gilt. Mit diesem Skalarprodukt ist $L^2(X,\mu)$ also ein Hilbertraum.

Beweis. Nach Satz 8.5 (i) gilt

$$\int\limits_X |fg| \,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_2\|g\|_2 < \infty$$

und mit Satz 5.9 folgt daraus, dass $\langle f,g\rangle_{L^2(X,\mu)}$ als reelle Zahl wohldefiniert ist. Die Gültigkeit der Axiome des Skalarprodukts lässt sich leicht nachprüfen. Offensichtlich gilt auch $\langle f,f\rangle_{L^2(X,\mu)} = \|f\|_2^2$. □

Im restlichen Teil dieses Kapitels betrachten wir als Grundmenge X ausschließlich $X = (a,b)$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Als σ-Algebra wählen wir die Spur-σ-Algebra $\mathcal{M} = \mathcal{L}(\mathbb{R}) \cap (a,b) := \{A \cap (a,b) : A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$, wobei $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ die Lebesgue'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Als Maß verwenden wir das Lebesgue-Maß auf (a,b), d.h. die Einschränkung $\mu|_\mathcal{M}$ auf $\mathcal{M}$ des Lebesgue-Maßes μ auf $\mathbb{R}$. Wir setzen $\int_a^b f\,\mathrm{d}\mu := \int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}\mu$ und bezeichnen das Riemann-Integral einer Funktion f auf $[a,b]$ mit (R) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Weiter setzen wir $L^p(a,b) := L^p((a,b),\mu|_\mathcal{M})$ für $p \in [1,\infty]$. An dieser Stelle sei angemerkt, dass es wegen $\mu(\{a,b\}) = 0$ egal ist, ob wir $X = (a,b)$ oder $X = [a,b]$ betrachten, d.h. die entsprechend definierten L^p-Räume sind identisch (genauer: isometrisch isomorph). Man zeigt leicht, dass $L^{p_1}(a,b) \supseteq L^{p_2}(a,b)$ für $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ gilt (Satz 8.5 (i) mit $p := \frac{p_2}{p_1}$ und $q := \frac{p_2}{p_2-p_1}$ auf $|f|^{p_1}$ und 1 anwenden).

Mit $\mathring{C}^\infty(a,b)$ bezeichnen wir im Folgenden die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \ne 0\}} \subset (a,b)$, d.h. mit in (a,b) enthaltenem Träger. Die Elemente von $\mathring{C}^\infty(a,b)$ heißen auch *Testfunktionen*.

Definition 8.8. Sei $f \in L^1(a,b)$. Eine Funktion $g \in L^1(a,b)$ heißt *(erste) verallgemeinerte Ableitung* von f (Schreibweise: $f' := g$), wenn

$$\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\mu = -\int_a^b g\varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \text{für alle } \varphi \in \mathring{C}^\infty(a,b)$$

gilt. Entsprechend definiert man die zweite verallgemeinerte Ableitung als verallgemeinerte Ableitung von g usw.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass die verallgemeinerte Ableitung g eindeutig bestimmt ist (im Sinne der Äquivalenzklasse $[g]$).

Bemerkung. Für $f \in C^1[a,b]$, d.h. f ist stetig differenzierbar auf $[a,b]$ (wobei an den Rändern nur einseitige Differenzierbarkeit bzw. Stetigkeit betrachtet wird), stimmen klassische und verallgemeinerte Ableitung überein. Denn für $\varphi \in \mathring{C}^\infty(a,b)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [c,d] \subseteq (a,b)$, d.h. $\varphi(x) = 0$ für $x \in (a,c) \cup (d,b)$ und somit $\varphi'(x) = 0$ für $x \in (a,c] \cup [d,b)$, folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\mu &= \int_c^d f\varphi' \,\mathrm{d}\mu = (\mathrm{R})\int_c^d f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{[f(x)\varphi(x)]_{x=c}^{x=d}}_{=0} - (\mathrm{R})\int_c^d f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_c^d f'\varphi \,\mathrm{d}\mu = -\int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Die Definition der verallgemeinerten Ableitung entspricht also der bekannten Regel der partiellen Integration.

Beispiel 8.9. Seien $a = -1$, $b = 1$ und $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-1,0], \\ x, & x \in (0,1) \end{cases}$$

gegeben. Dann ist f in $(-1,0) \cup (0,1)$ differenzierbar, jedoch nicht in $x = 0$. Wir zeigen, dass die durch

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-1,0], \\ 1, & x \in (0,1) \end{cases}$$

definierte Funktion $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ die verallgemeinerte Ableitung von f ist. Für $\varphi \in$

$\mathring{C}^\infty(-1,1)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [c,d] \subseteq (-1,1)$ gilt

$$\int_{-1}^{1} f\varphi' \,\mathrm{d}\mu = \int_{c}^{d} f\varphi' \,\mathrm{d}\mu = (\mathrm{R})\int_{c}^{d} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R})\int_{0}^{d} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{[x\varphi(x)]_{x=0}^{x=d}}_{=0} - (\mathrm{R})\int_0^d \varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^d \varphi\,\mathrm{d}\mu = -\int_{-1}^{1} g\varphi\,\mathrm{d}\mu.$$

Beispiel 8.10. Seien $a = -1$, $b = 1$ und $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ die *Heaviside-Funktion*, d.h.

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in (-1,0), \\ 1, & x \in [0,1). \end{cases}$$

Für $\varphi \in \mathring{C}^\infty(-1,1)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [c,d] \subseteq (-1,1)$ gilt

$$\int_{-1}^{1} f\varphi' \,\mathrm{d}\mu = \int_{c}^{d} f\varphi' \,\mathrm{d}\mu = (\mathrm{R})\int_{c}^{d} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = (\mathrm{R})\int_{0}^{d} 1\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{[\varphi(x)]_{x=0}^{x=d}}_{=-\varphi(0)} - \underbrace{(\mathrm{R})\int_0^d 0\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} = -\varphi(0).$$

Wenn f also eine verallgemeinerte Ableitung $g \in L^1(-1,1)$ besitzt, so muss

$$\int_{-1}^{1} g\varphi\,\mathrm{d}\mu = \varphi(0) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathring{C}^\infty(-1,1)$$

gelten. Man kann zeigen, dass dies für kein $g \in L^1(-1,1)$ erfüllt ist. Der Ableitungsbegriff kann allerdings noch weiter verallgemeinert werden, sodass dann auch die Heaviside-Funktion eine Ableitung besitzt, und zwar die in Null konzentrierte *Dirac'sche Deltadistribution* (siehe Distributionentheorie).

Definition 8.11. Mit $W^{k,p}(a,b)$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \le p < \infty$, bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f \in L^p(a,b)$, die k verallgemeinerte Ableitungen $f', f'', \dots, f^{(k)} \in L^p(a,b)$ besitzen. Für $f \in W^{k,p}(a,b)$ führen wir unter Verwendung der L^p-Norm $\|\bullet\|_p$ die Norm

$$\|f\|_{W^{k,p}(a,b)} := \left(\sum_{l=0}^{k} \|f^{(l)}\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ein. Der Raum $W^{k,p}(a,b)$ mit dieser Norm heißt für alle p *Sobolevraum* der Ordnung k. Im

Falle $p = 2$ bezeichnen wir diesen Raum mit $H^k(a,b)$ und können für $f, g \in H^k(a,b)$ ein Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{H^k(a,b)} := \sum_{l=0}^{k} \langle f^{(l)}, g^{(l)}\rangle_{L^2(a,b)}$$

einführen, wobei gilt

$$\|f\|_{H^k(a,b)} := \sqrt{\langle f, f\rangle_{H^k(a,b)}} = \|f\|_{W^{k,2}(a,b)} = \left(\sum_{l=0}^{k} \|f^{(l)}\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Auf der Grundlage der L^∞-Norm $\|\bullet\|_\infty$ kann analog auch der Raum $W^{k,\infty}(a,b)$ mit der Norm

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(a,b)} := \sum_{l=0}^{k} \|f^{(l)}\|_\infty$$

eingeführt werden.

Bemerkung. Natürlich handelt es sich bei den Elementen der Sobolevräume wieder um Klassen äquivalenter Funktionen, die sich nur auf Mengen vom Maß Null unterscheiden.

Satz 8.12. *Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $W^{k,p}(a,b)$ für alle $1 \le p \le \infty$ ein Banachraum, $H^k(a,b)$ sogar ein Hilbertraum. Insbesondere gilt $W^{0,p}(a,b) = L^p(a,b)$ und $H^0(a,b) = L^2(a,b)$.*

Beweis. Der Beweis der Vollständigkeit macht einige Arbeit und entfällt deshalb. Alle anderen Eigenschaften können leicht nachgeprüft werden. □

Wir betrachten im Weiteren noch etwas genauer die Sobolevräume $H^k(a,b)$ vom Hilbertraumtyp.

Bemerkung. Offensichtlich gilt $H^0(a,b) \supseteq H^1(a,b) \supseteq \ldots$, d.h. die Räume $H^k(a,b)$ bilden eine Skala von Hilberträumen.

Satz 8.13 (Sobolev'scher Einbettungssatz)**.** *Für $m \ge k+1 \ge 1$ ist $H^m(a,b)$ stetig eingebettet in $C^k[a,b]$, d.h. zu jedem $f \in H^m(a,b)$ existiert ein $\tilde{f} \in C^k[a,b]$ mit $\tilde{f}|_{(a,b)} \in [f]$ und*

$$\|\tilde{f}\|_{C^k[a,b]} \le K\|f\|_{H^m(a,b)}$$

für eine von f unabhängige Konstante $K \ge 0$.

Beweis. Der nicht ganz einfache Beweis entfällt. □

Bemerkung. Der Begriff der Einbettung wird in der Literatur selten exakt definiert und oft missverständlich verwendet. Deshalb: Ein normierter linearer Raum $(U, \|\bullet\|_U)$ heißt *eingebettet* in einen normierten linearen Raum $(V, \|\bullet\|_V)$, wenn es eine injektive, lineare Abbildung

$E : U \to V$ gibt. U heißt *stetig eingebettet* in V, wenn E stetig ist (dies ist äquivalent zur Beschränktheit von E), d.h. wenn eine Konstante $K \geq 0$ mit

$$\|Eu\|_V \leq K\|u\|_U \quad \text{für alle } u \in U$$

existiert. Im Falle einer stetigen Einbettung schreiben wir auch $U \hookrightarrow V$ (oft wird verwirrenderweise auch „$\subseteq$“ statt „$\hookrightarrow$“ geschrieben).

Bemerkung. Wir betrachten Satz 8.13 für den Spezialfall $m = 1$ und $k = 0$. Es gilt also $H^1(a,b) \hookrightarrow C[a,b]$, d.h. zu $f \in H^1(a,b)$ existiert ein $\tilde{f} \in C[a,b]$ mit $f(x) = \tilde{f}(x)$ für fast alle $x \in (a,b)$ und

$$\max_{x\in[a,b]} |\tilde{f}(x)| \leq K \left(\int_a^b f^2 \, \mathrm{d}\mu + \int_a^b (f')^2 \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir können die Konstante $K \geq 0$ sogar konkret angeben: Dazu nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in (a,b)$ an (Repräsentant geeignet wählen). Zunächst kann man

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f' \, \mathrm{d}\mu$$

für $x \in (a,b)$ zeigen. Daraus folgt unter Benutzung der in Satz 5.9 formulierten Ungleichung

$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(a)| + \left| \int_a^x f' \, \mathrm{d}\mu \right| \leq |f(a)| + \int_a^x |f'| \cdot 1 \, \mathrm{d}\mu \leq |f(a)| + \sqrt{\int_a^x (f')^2 \, \mathrm{d}\mu} \sqrt{\int_a^x 1^2 \, \mathrm{d}\mu} \\ &\leq |f(a)| + \sqrt{b-a} \|f'\|_{L^2(a,b)}. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt (wegen $(c \pm d)^2 \leq 2c^2 + 2d^2$)

$$\begin{aligned} f(a)^2 &\leq \left(f(x) - \int_a^x f' \, \mathrm{d}\mu \right)^2 \leq 2f(x)^2 + 2 \left(\int_a^x f' \, \mathrm{d}\mu \right)^2 \\ &\leq 2f(x)^2 + 2 \left(\int_a^x |f'| \cdot 1 \, \mathrm{d}\mu \right)^2 \leq 2f(x)^2 + 2(b-a)\|f'\|^2_{L^2(a,b)} \end{aligned}$$

und Integration über (a,b) liefert

$$(b-a)f(a)^2 \leq 2\|f\|^2_{L^2(a,b)} + 2(b-a)^2\|f'\|^2_{L^2(a,b)}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\left(\max_{x\in[a,b]}|\tilde{f}(x)|\right)^2 &= \sup_{x\in(a,b)} f(x)^2 \leq (|f(a)| + \sqrt{b-a}\|f'\|_{L^2(a,b)})^2 \\ &\leq 2f(a)^2 + 2(b-a)\|f'\|^2_{L^2(a,b)} \leq \frac{4}{b-a}\|f\|^2_{L^2(a,b)} + 4(b-a)\|f'\|^2_{L^2(a,b)} + 2(b-a)\|f'\|^2_{L^2(a,b)} \\ &\leq \max\left\{\frac{4}{b-a}, 6(b-a)\right\}\|f\|^2_{H^1(a,b)},\end{aligned}$$

d.h.

$$K = \max\left\{\frac{2}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{6(b-a)}\right\}.$$

9 Integration in Produkträumen

Wir verzichten in diesem Kapitel auf die Beweise und bitten den Leser, diese bei Bedarf aus den entsprechenden Kapiteln zu Produkmaßen und dem Satz von Fubini aus den empfohlenen Lehrbüchern zu entnehmen.

Definition 9.1. Seien $(X_1, \mathcal{M}_1)$ und $(X_2, \mathcal{M}_2)$ zwei messbare Räume. Als *Produkt-σ-Algebra* $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ bezeichnen wir die durch das Mengensystem

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{M}_1,\ A_2 \in \mathcal{M}_2\}$$

in $X_1 \times X_2$ erzeugte σ-Algebra.

Lemma 9.2. *Das Mengensystem $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ aus Definition 9.1 ist ein Semiring und $\mathcal{R}(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$ ist eine Algebra.*

Lemma 9.3. *Seien $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume mit σ-endlichen Maßen. Dann ist die auf $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ durch*

$$\varphi(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2) \qquad \textit{für} \quad A_1 \times A_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$$

definierte Mengenfunktion nichtnegativ, additiv und subvolladditiv mit $\varphi(\emptyset) = 0$, falls wir $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ setzen. Diese kann eindeutig zu einem Maß $\mu : \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ auf der σ-Algebra $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ fortgesetzt werden.

Bemerkung. Das Maß μ aus Lemma 9.3 wird als *Produktmaß* bezeichnet (Schreibweise: $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$). Die Fortsetzbarkeit von φ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ ist eine unmittelbare Folgerung aus den Ergebnissen von Kapitel 3 rund um den Fortsetzungssatz von Hahn.

Beispiel 9.4. Seien $X_1 := \mathbb{R}^n$, $X_2 := \mathbb{R}^m$, $\mathcal{M}_1 := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{M}_2 := \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ sowie μ_1 und μ_2 die entsprechenden Lebesgue-Maße. Dann kann man $X_1 \times X_2 = \mathbb{R}^{n+m}$ sowie $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 = \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+m})$ zeigen und $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist das Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^{n+m}$.

Definition 9.5. Seien X_1 und X_2 nichtleere Mengen. Für $A \subseteq X_1 \times X_2$, $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ heißen die Mengen

$$A_2(x_1) := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\} \subseteq X_2 \quad \text{und} \quad A_1(x_2) := \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in A\} \subseteq X_1$$

Schnitte von A.

Lemma 9.6. *Seien* $(X_1, \mathcal{M}_1)$ *und* $(X_2, \mathcal{M}_2)$ *messbare Räume. Für* $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ *sowie* $x_1 \in X_1$ *und* $x_2 \in X_2$ *gelten für die Schnitte von* A *die Beziehungen* $A_2(x_1) \in \mathcal{M}_2$ *und* $A_1(x_2) \in \mathcal{M}_1$.

Lemma 9.7. *Ist* $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar bezüglich der* σ*-Algebra* $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$*, so sind für* $x_1 \in X_1$ *und* $x_2 \in X_2$ *auch* $f(x_1, \bullet) : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *sowie* $f(\bullet, x_2) : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar.*

Lemma 9.8. *Seien* $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ *und* $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ *Maßräume mit* σ*-endlichen Maßen. Definieren wir für* $A \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ *Funktionen* $\eta_A : X_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ *und* $\xi_A : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ *mittels der Vorschriften*

$$\eta_A(x_1) := \mu_2(A_2(x_1)) \qquad \text{und} \qquad \xi_A(x_2) := \mu_1(A_1(x_2)),$$

so sind diese Funktionen messbar und es gilt

$$\int\limits_{X_2} \xi_A \, \mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{X_1} \eta_A \, \mathrm{d}\mu_1.$$

Wichtig sind für messbare Funktionen $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ zweier Veränderlicher $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ Fragen der Existenz von Doppelintegral und iterierten Integralen und deren Zusammenhänge. Der folgende Satz liefert dabei entscheidende Aussagen.

Satz 9.9 (Satz von Fubini)**.** *Seien* $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ *und* $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ *zwei Maßräume mit* σ*-endlichen Maßen. Falls* $f \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ *gilt, d.h.* f *summierbar auf dem Produktraum im Sinne des Produktmaßes ist, so gelten die beiden folgenden Aussagen:*

(i) *Es ist* $f(\bullet, x_2) \in \mathcal{L}(X_1, \mu_1)$ *für fast alle* $x_2 \in X_2$ *und* $f(x_1, \bullet) \in \mathcal{L}(X_2, \mu_2)$ *für fast alle* $x_1 \in X_1$. *Mit*

$$F_1(x_2) := \int\limits_{X_1} f(\bullet, x_2) \, \mathrm{d}\mu_1 \qquad \text{bzw.} \qquad F_2(x_1) := \int\limits_{X_2} f(x_1, \bullet) \, \mathrm{d}\mu_2$$

gilt $F_1 \in \mathcal{L}(X_2, \mu_2)$ *und* $F_2 \in \mathcal{L}(X_1, \mu_1)$.

(ii) *Wir haben Gleichheit*

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{X_2} F_1 \, \mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{X_1} F_2 \, \mathrm{d}\mu_1$$

zwischen den drei auftretenden Lebesgue-Integralen.

Bemerkung. Durch dem Satz 9.9 von Fubini wird gezeigt, dass unter den formulierten Voraussetzungen aus der Existenz des Doppelintegrals ($\int_{X_1 \times X_2}$) die Existenz der iterierten Integrale ($\int_{X_1} \int_{X_2}$ und $\int_{X_2} \int_{X_1}$) folgt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, d.h. aus der Existenz der iterierten Integrale kann man nicht auf das Doppelintegral schließen. Sehr wohl gibt es aber eine Umkehrung im schwächeren Sinne, wenn man statt der Funktion deren Betrag im

Integranden der iterierten Integrale stehen hat. Man kann nämlich Folgendes zeigen:
Ist $f : X_1 \times X_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und gilt $|f(\bullet, x_2)| \in \mathcal{L}(X_1, \mu_1)$ für fast alle $x_2 \in X_2$ sowie $F_1 \in \mathcal{L}(X_2, \mu_2)$ für $F_1(x_2) := \int_{X_1} |f(\bullet, x_2)| \, \mathrm{d}\mu_1$, so bekommt man $f \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ und Doppelintegral und iteriertes Integral stimmen überein. Analoges gilt bei Vertauschung der Indizes 1 und 2.

10 Der Satz von Radon-Nikodym

Auch im Sinne einer Vorabinformation vor der Stochastik-Vorlesung wollen wir abschließend kurz absolut stetige Maße und den Satz von Radon-Nikodym streifen.

Definition 10.1. Seien $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum sowie μ und ν zwei σ-endliche Maße in X. Das Maß ν heißt *absolut stetig bezüglich* μ (Schreibweise: $\nu \ll \mu$), wenn für jedes $A \in \mathcal{M}$

$$\mu(A) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nu(A) = 0$$

gilt, d.h. μ-Nullmengen sind auch stets ν-Nullmengen.

Bemerkung. Die Relation „$\ll$" ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

Satz 10.2. *Für endliche zum messbaren Raum $(X, \mathcal{M})$ gehörende Maße μ und ν gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass für alle $A \in \mathcal{M}$ die Beziehung $\mu(A) < \delta$ die Ungleichung $\nu(A) < \varepsilon$ nach sich zieht.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die ε-δ-Bedingung verletzt ist. Dann findet man ein $\varepsilon > 0$ und für $n = 1, 2, ...$ Mengen $A_n \in \mathcal{M}$ mit $\mu(A_n) < 2^{-n}$ und $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Die Betrachtung der Werte $\mu(A)$ und $\nu(A)$ für die Menge $A = \bigcap_{n \geq 1} \left(\bigcup_{i \geq n} A_i \right)$ liefert einen Widerspruch. $\square$

Bemerkung. Das obige Lemma begründet die Bezeichnung *absolut stetig*, denn eine analoge ε-δ-Bedingung findet man im Zusammenhang mit der absoluten Stetigkeit einer reellen Funktion $x(t),\ t \in [a, b]$. Eine solche Funktion heißt absolut stetig, wenn wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass für paarweise disjunkte offene Teilintervalle von $(a_i, b_i),\ i = 1, 2, ..., k$, von $[a, b]$ mit $\sum_{i=1}^{k} (b_i - a_i) < \delta$ die Ungleichung $\sum_{i=1}^{k} |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon$ gilt. Absolut stetige Funktionen sind übrigens gleichmäßig stetig, damit auch stetig und sie sind stets von beschränkter Variation, gehören also zu $BV[a, b]$. Sie besitzen fast überall eine Ableitung, die mit der verallgemeinerten Ableitung übereinstimmt und zu $L^1(a, b)$ gehört. Diese Funktionen gehören also zum Sobolevraum $W^{1,1}(a, b)$. Lipschitz-stetige Funktionen sind stets auch absolut stetig.

Wir betrachten nun speziell integraldefinierte Maße:

Definition 10.3. Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und sei $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Dann heißt die durch

$$\mu_f(A) := \int\limits_A f \, \mathrm{d}\mu$$

gegebene Mengenfunktion $\mu_f : \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ *unbestimmtes Integral von f.*

Lemma 10.4. *Ist $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum und gilt $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ sowie $f \geq 0$, so ist auch μ_f ein Maß und es gilt $\mu_f \ll \mu$.*

Beweis. Nach Satz 5.6 ist die Mengenfunktion μ_f volladditiv und damit wegen der Nichtnegativität auch ein Maß. Die Eigenschaft $\mu_f \ll \mu$ folgt aus der Definition der absoluten Stetigkeit von Maßen unmittelbar mit der Definition des unbestimmten Integrals. □

Von zentraler Bedeutung in der Maßtheorie, speziell in Hinblick auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ist der folgende Satz von Radon-Nikodym.

Satz 10.5 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Seien μ und ν σ-endliche Maße auf dem messbaren Raum $(X, \mathcal{M})$ mit $\nu \ll \mu$. Dann existiert eine bis auf μ-äquivalente Funktionen eindeutig bestimmte nichtnegative Funktion $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$ mit*

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu \qquad \textit{für alle } A \in \mathcal{M}.$$

Definition 10.6. Die Funktion f aus Satz 10.5 heißt *Radon-Nikodym-Ableitung* von ν bezüglich μ (Schreibweise: $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$).

Bemerkung. In der Wahrscheinlichkeitstheorie heißt für ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν die Funktion $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ *Wahrscheinlichkeitsdichte* bezüglich des Maßes μ.

Wir werden vor dem Beweis einige Begriffsstrukturen und Hilfseigenschaften diskutieren, wobei zuerst wir von der Wahrscheinlichkeitssituation $\mu(X) = 1$ ausgehen.

Definition 10.7. Sei $(X, \mathcal{M})$ ein messbarer Raum mit den Maßen μ und ν. Wir sagen, dass das Maß μ das Maß ν dominiert, wenn gilt

$$0 \leq \nu(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}.$$

Offenbar gilt in diesem Falle $\nu \ll \mu$.

Definition 10.8. Wir nennen die $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ eine (endliche) Zerlegung von X, wenn $\mathcal{P}$ aus paarweise disjunkten Elementen aus $\mathcal{M}$ besteht, deren Vereinigung X liefert. Wir nennen eine Zerlegung $\mathcal{P}'$ von X eine Verfeinerung von $\mathcal{P}$, wenn jedes Element aus $\mathcal{P}$ als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{P}'$ dargestellt werden kann.

Der folgende Satz ist eine simplifizierte Version des Satzes von Radon-Nikodym, dessen Beweis unten angegeben wird. Für das Update dieses Beweises Capiński/Kopp hin zum eigentlichen Satz 10.5 sei auf Kapitel 7 in Capiński/Kopp verwiesen.

Satz 10.9. *Sei $\mu(X) = 1$ und gelte $0 \leq \nu(A) \leq \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{M}$. Dann existiert eine nichtnegative messbare Funktion f auf X mit*

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu \qquad \textit{für alle } A \in \mathcal{M}.$$

Beweis. In Schritt 1 definieren wir Treppenfunktionen $\varphi_{\mathcal{P}}$ für Mengen in einer (endlichen) Zerlegung $\mathcal{P}$ and vergleichen die Funktionen $\varphi_{\mathcal{P}_2}$ und $\varphi_{\mathcal{P}_1}$, wenn $\mathcal{P}_2$ eine Verfeinerung von $\mathcal{P}_1$ ist. Dies erlaubt uns zu zeigen, dass die die Integrale $\int_X \varphi_{\mathcal{P}}^2 \,\mathrm{d}\mu$ nichtfallend sind, wenn wir zu zunehmenden Verfeinerungen kommen. Da die Integrale beschränkt sind durch $\mu(X) = 1$, existiert $c = \sup \int_X \varphi_{\mathcal{P}}^2 \,\mathrm{d}\mu$ als endliche reelle Zahl. In Schritt 2 konstruieren wir dann die gewünschte Funktion f mit Hilfe von Grenzwertargumenten, die früher bewiesene Konvergenzsätze nutzen. In Schritt 3 schließlich zeigen wir, dass f die gewünschten Eigenschaften besitzt.

<u>Schritt 1:</u> Konstruktion geeigneter Treppenfunktionen. Sei nun $0 \leq \nu(A) \leq \mu(A) \;\; \forall A \in \mathcal{M}$ und $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ eine (endliche) Zerlegung von X mit Elementen $A_i \in \mathcal{M}$. Wir definieren nun die Treppenfunktionen $\varphi_{\mathcal{P}} : X \to \mathbb{R}$ mittels der Vorschrift

$$\varphi_{\mathcal{P}}(x) = c_i = \frac{\nu(A_i)}{\mu(A_i)} \quad (x \in A_i, \mu(A_i) > 0), \qquad \varphi_{\mathcal{P}}(x) = 0 \quad \text{(sonst)}.$$

Die Treppenfunktion hat die folgenden Eigenschaften:
(i) Es gilt $0 \leq \varphi_{\mathcal{P}}(x) \leq 1$ für alle $x \in X$.
(ii) Wenn $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ für eine Indexteilmenge $J \subset \{1, 2, ..., k\}$, dann gilt $\nu(A) = \int_A \varphi_{\mathcal{P}} \,\mathrm{d}\mu$. Daher ist $\nu(X) = \int_X \varphi_{\mathcal{P}} \,\mathrm{d}\mu$.
(iii) $\mathcal{P}_2$ sei nun Verfeinerung von $\mathcal{P}_1$ und φ_1, φ_2 die entsprechenden Treppenfunktionen. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{P}_1 :\; \int_A \varphi_1 \,\mathrm{d}\mu = \nu(A) = \int_A \varphi_2 \,\mathrm{d}\mu, \quad \int_A \varphi_1 \varphi_2 \,\mathrm{d}\mu = \int_A \varphi_1^2 \,\mathrm{d}\mu$.
(iv) Folglich gilt $\int_X (\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \,\mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \,\mathrm{d}\mu$ und damit

$$\int_X \varphi_2^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi_1^2 \,\mathrm{d}\mu + \int_X (\varphi_2 - \varphi_1)^2 \,\mathrm{d}\mu \geq \int_X \varphi_1^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Diese Funktionen sind nichtfallend, wenn wir die Zerlegung verfeinern.

<u>Schritt 2:</u> Übergang zum Grenzwert und Konstruktion der Funktion f. Wie im Schritt 1 gezeigt wurde, wachsen die Integrale $\int_X \varphi_{\mathcal{P}}^2 \,\mathrm{d}\mu$ höchstens, wenn die Zerlegung verfeinert wird. Wegen (i) haben wir außerdem ein endliches Supremum $0 \leq c = \sup \int_X \varphi_{\mathcal{P}}^2 \,\mathrm{d}\mu \leq 1$ über alle Zerlegungen.
Wir betrachten nun eine Folge von Zerlegungen $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^\infty$ mit $\int_X \varphi_{\mathcal{P}_n}^2 \,\mathrm{d}\mu > c - 4^{-n}$. Dabei bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}_n$ die kleinste gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\mathcal{P}_1, ..., \mathcal{P}_n$. Dann verfeinert $\mathcal{Q}_{n+1}$ die Zerlegung $\mathcal{Q}_n$, weil $\mathcal{Q}_k$ aus allen Schnitten $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ mit $A_i \in \mathcal{P}_i$ $(i \leq k)$ besteht. Folglich ist $\mathcal{Q}_n$ eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{Q}_{n+1}$. Folglich gelten die Ungleichungen:

$$c - 4^{-n} < \int_X \varphi_{\mathcal{P}_n}^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X \varphi_{\mathcal{Q}_n}^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X \varphi_{\mathcal{Q}_{n+1}}^2 \,\mathrm{d}\mu \leq c.$$

Wegen (iv) haben wir dann

$$\int_X (\varphi_{\mathcal{Q}_{n+1}} - \varphi_{\mathcal{Q}_n})^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi_{\mathcal{Q}_{n+1}}^2 - \varphi_{\mathcal{Q}_n}^2) \,\mathrm{d}\mu < 4^{-n}.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert dann für all $n \in \mathbb{N}$

$$\int_X |\varphi_{\mathcal{Q}_{n+1}} - \varphi_{\mathcal{Q}_n}| \,\mathrm{d}\mu < 2^{-n}.$$

Nach Capiński/Kopp, S.95 kann man eine Variante des Lemmas von Beppo Levi wie folgt formulieren: Wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_E |f_k| \,\mathrm{d}\mu$ endlich ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ fast überall auf E und man kann die Grenzwertbildung von Reihe und Integral wie folgt vertauschen:

$$\int\limits_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_E f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Mit diesem Lemma gilt wegen der Endlichkeit von $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |\varphi_{\mathcal{Q}_{n+1}} - \varphi_{\mathcal{Q}_n}| \,\mathrm{d}\mu$, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{\mathcal{Q}_{n+1}} - \varphi_{\mathcal{Q}_n})$ fast überall konvergiert, sodass mit $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}_1$ die Grenzfunktion

$$f = \varphi_{\mathcal{P}_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_{\mathcal{Q}_{n+1}} - \varphi_{\mathcal{Q}_n}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\mathcal{Q}_n}$$

μ-fast überall definiert ist, auf den verbleibenden Nullmengen wird sie zu Null gesetzt.

Schritt 3: Nach Voraussetzung und Konstruktion ist $0 \leq f(x) \leq 1 \;\forall x \in X$ und f messbar. Wir müssen noch zeigen, dass gilt

$$\nu(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{M}.$$

Wir fixieren $A \in \mathcal{M}$ und definieren als $\mathcal{R}_n$ die kleinste gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Q}_n$ und $\{A, \overline{A}\}$. Da A eine endliche disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{R}_n$ ist, haben wir $\nu(A) = \int_A \varphi_{\mathcal{R}_n} \,\mathrm{d}\mu$ aus Schritt 1 (ii). Aus Schritt 2 erhalten wir

$$c - 4^{-n} < \int_X \varphi^2_{\mathcal{Q}_n} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X \varphi^2_{\mathcal{R}_n} \,\mathrm{d}\mu \leq c$$

und wir können wie oben schließen dass $\int_X (\varphi_{\mathcal{R}_n} - \varphi_{\mathcal{Q}_n})^2 \,\mathrm{d}\mu < 4^{-n}$ gilt und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\int_A (\varphi_{\mathcal{R}_n} - \varphi_{\mathcal{Q}_n}) \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_A |\varphi_{\mathcal{R}_n} - \varphi_{\mathcal{Q}_n}| \,\mathrm{d}\mu < 2^{-n}.$$

Für alle $A \in \mathcal{M}$ und $n = 1, 2, ...$ haben wir dann also

$$\nu(A) = \int_A \varphi_{\mathcal{R}_n} \,\mathrm{d}\mu = \int_A (\varphi_{\mathcal{R}_n} - \varphi_{\mathcal{Q}_n}) \,\mathrm{d}\mu + \int_A \varphi_{\mathcal{Q}_n} \,\mathrm{d}\mu.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite konvergiert für $n \to \infty$ gegen Null, während das zweite Integral nach dem Satz von Lebesgue über die dominante Konvergenz gegen $\int_A f\,\mathrm{d}\mu$ konvergiert. Also gilt $\nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$ wie verlangt. $\square$

Satz 10.10 (Kettenregel für Radon-Nikodym-Ableitungen)**.** *Seien μ und ν σ-endliche Maße auf dem messbaren Raum $(X, \mathcal{M})$ mit $\nu \ll \mu$ und sei $f := \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Dann gilt für $g \in \mathcal{L}(X, \nu)$ und $A \in \mathcal{M}$*

$$\int\limits_A g\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_A gf\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Kann wieder mit Hilfe von Treppenfunktionen und unter Verwendung von Grenzwersätzen für Integrale geführt werden. $\square$

Beispiel 10.11. In der Stochastik betrachtet man Wahrscheinlichkeitsmaße ν der Zufallsgrößen Z definiert als $P(Z \in A) = \nu(A)$ mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}$ und $\nu(X) = 1$, wobei der Maßraum $(X, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \nu)$ die σ-Algebra der entsprechenden Lebesgue-messbaren Mengen auf $\mathbb{R}$ als zweite Komponente enthält. Eine solche Zufallsgröße bzw. deren Verteilung heißt absolut stetig, wenn ν absolut stetig bezüglich des Lebesguemaßes μ ist, also $\nu \ll \lambda$ gilt. Dann existieren Dichtefunktionen $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (Radon-Nikodym-Ableitungen des Wahrscheinlichkeitsmaßes bezüglich μ).

Literaturverzeichnis

[1] SCHMIDT, K. D.: *Maß und Wahrscheinlichkeit*. Springer-Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer-Verlag 2009.

[2] CAPIŃSKI, M.; KOPP, E.: *Measure, Integral and Probability*. Springer Undergraduate Mathematics Series (2nd Edition). London: Springer-Verlag 2007.

[3] ELSTRODT, J.: *Maß- und Integrationstheorie* (5. Aufl.). Springer-Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer-Verlag 2007.

[4] RUDIN, W.: *Analysis*. Kapitel 11. München: Oldenbourg Verlag 2009 (4. Auflage).

[5] RUDIN, W.: *Reelle und Komplexe Analysis*. München: Oldenbourg Verlag 2009 (2. Auflage).

[6] HEUSER, H.: *Lehrbuch der Analysis*. Teil 2, Kapitel XXVI. Stuttgart: B.G. Teubner-Verlag 2002 (12. Auflage).

[7] WERNER, D.: *Einführung in die höhere Analysis: Topologische Räume, Funktionentheorie, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis*. Berlin: Springer-Verlag 2006.

[8] BAUER, H.: *Maß- und Integrationstheorie*. Berlin: Walter der Gruyter 1990.

[9] HOLDGRÜN, H.S.: *Analysis*, Band 2, Kapitel 6-7. Göttingen: Leins Verlag 2001.

[10] BRESSOUD, D. M.: *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration*. Cambridge: Cambridge University Press 2008.