

## 5. Übung zur Maßtheorie

1. Wir betrachten den Maßraum  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  mit  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  und Maß  $\mu$  vollständig definiert über die Vorschrift  $\mu(\{n\}) = \frac{1}{n}$ . Welche besonderen Eigenschaften findet man für  $\mu$ ? Weiter sei  $f_n = \chi_{A_n}$  eine Funktionenfolge charakteristischer Funktionen mit Trägermengen  $A_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ . Konvergiert die Funktionenfolge punktweise, fast überall bzw. dem Maße nach gegen eine Funktion  $f$ ?

2. Seien  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$  messbarer Raum,  $\mathcal{B}$ -Borelmenge,  $\mu$ -Lebesguemaß,  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $f, f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  Funktionen.

Konvergieren die Funktionenfolgen  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  punktweise gegen eine Funktion  $f$ ?

$$\text{Gilt } \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu ?$$

Welche Voraussetzungen der Sätze von Bepo Levi, von Lebesgue über monotone bzw. dominante Konvergenz bzw. des Lemmas von Fatou sind erfüllt?

a)  $E = [0, \pi]$ ,  $f_n(x) = \begin{cases} n \sin x & (x \in [0, \frac{\pi}{n}]) \\ 0 & (x \in (\frac{\pi}{n}, \pi]) \end{cases}$ ,

b)  $E = \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{1}{n}$ .

3. Beweisen Sie die folgende Eigenschaft des Lebesgue-Integrals:  
Seien  $f, g \in \mathcal{L}(E, \mu)$  und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt auch  $f + g \in \mathcal{L}(E, \mu)$ ,  $cf \in \mathcal{L}(E, \mu)$ , und wir haben

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu,$$
$$\int_E (cf) d\mu = c \int_E f d\mu.$$

Setzen Sie dabei die offensichtliche Gültigkeit der beiden Gleichungen für Treppenfunktionen  $f$  und  $g$  voraus und nutzen Sie einen geeigneten Grenzwertsatz für Integrale.

4. Wiederholen Sie die Begriffe linearer (Vektor) Raum, normierter Raum, Cauchyfolge, Vollständigkeit, Skalarprodukt, Banachraum, Hilbertraum und überlegen Sie sich Beispiele dazu.
5. Für welche  $p \in \overline{\mathbb{R}}$  bilden die Lebesgueräume  $L^p(X)$  lineare normierte Räume? Für welche  $p$  sind das Banachräume und für welche  $p$  Hilberträume?

Sei  $X = [0, 1]$ . Welche Inklusionen kann dann man zwischen den Räumen  $L^p(X)$  untereinander für verschiedene  $p$  und zum Raum  $C(X)$  finden? Dabei ist  $C(X)$  der Raum der auf ganz  $X$  stetigen Funktionen.