

Finanzmathematik 2

THORSTEN SCHMIDT

TU Chemnitz

www.tu-chemnitz.de/mathematik/fima

Version vom 8. April 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Stochastische Grundlagen	3
1.1	Martingale und Stoppzeiten	3
1.2	Die Brownsche Bewegung	5
1.3	Einführung in die Stochastische Integration	9
1.3.1	Die Definition des Itô-Integrals	10
1.3.2	Die Erweiterung des Itô-Integrals auf \mathcal{H}_{loc}^2	14
1.3.3	Lokale Martingale	17
1.3.4	Die Itô-Formel	19
1.3.5	Weitere Itô-Formeln	21
1.4	Ein erster Blick auf das Black-Scholes Modell	23
1.5	Das Girsanov-Theorem	24
1.6	Repräsentation von Brownschen Martingalen.	26
1.7	Stochastische Differentialgleichungen	27
1.8	Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess	31
1.9	Lösungsmethoden für SDEs	32
1.9.1	Koeffizientenvergleich	32
1.9.2	Multiplikativer Ansatz	33

1 Stochastische Grundlagen

Die notwendigen Grundlagen sind im wesentlichen bekannt, und an dieser Stelle wird in der Vorlesung nur eine kurze Wiederholung gegeben.

In diesem Skriptum konzentrieren wir uns zunächst auf stetige Diffusionen.

1.1 Martingale und Stoppzeiten

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und definieren darauf einen **Stochastischen Prozess** als eine Familie von Zufallsvariablen $X := \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$, welche Werte im sogenannten Zustandsraum, einem Maßraum (Z, \mathcal{Z}) annehmen. Typischerweise ist $Z = \mathbb{R}$ oder $Z = \mathbb{R}^d$. Für ein festes ω nennen wir die Funktion $t \rightarrow X_t(\omega)$ einen Pfad von X . Für X verwenden wir auch die Notation $(X_t)_{t \geq 0}$.

Mit der Interpretation von t als Zeit gelangt man direkt zu Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft. Das Konzept der Filtration ermöglicht in diesem Rahmen eine elegante Formulierung der zur Zeit t vorhandenen Information:

Definition 1.1.1. Eine **Filtration** $\{\mathcal{F}\}$ ist eine monoton wachsende Folge von Sub- σ -Algebren von \mathcal{A} , d.h. für alle $s < t$ ist $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}$.

Die σ -Algebra \mathcal{F}_t repräsentiert demnach die Information, die ein Beobachter bis zur Zeit t gesammelt hat. Wird beispielsweise nur der stochastische Prozess X beobachtet, so setzt man

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$$

und erhält die **natürliche Filtration** von X .

X heißt **adaptiert** (an \mathcal{F}), falls X_t \mathcal{F}_t -messbar ist für alle $t \geq 0$. Offensichtlich ist X adaptiert an seine natürliche Filtration.

Um technische Probleme mit “unschönen” Filtrationen zu vermeiden, werden wir stets eine gewisse Regularität fordern (die “usual conditions”): Die Filtration sei rechtsseitig stetig, d.h. für alle $t \geq 0$ ist $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ und

$$\mathcal{F}_0 \text{ enthält alle } \mathbb{P} - \text{Nullmengen von } \mathcal{A}.$$

Die zweite Eigenschaft erlaubt uns, für den Fall zweier stochastischer Prozesse X und Y , die \mathbb{P} -f.s. identisch sind, aus X_t ist adaptiert (an \mathcal{F}) zu folgern, dass Y ebenso adaptiert (an \mathcal{F}) ist.

Bemerkung 1.1.2. Die obige Definition der natürlichen Filtration erfüllt diese Bedingung noch nicht, wir können dies aber mit einer einfachen Modifikation erreichen. Dazu definieren wir mit $\{\bar{\mathcal{F}}\}$ die σ -Algebra, die jeweils durch \mathcal{F}_t und \mathcal{N}_0 (die σ -Algebra aller \mathbb{P} -Nullmengen) erzeugt wird. $\{\bar{\mathcal{F}}\}$ erfüllt nun die “usual conditions“. Im folgenden betrachten wir stets diese Modifikation.

Beispiel 1.1.3. Betrachten wir in diskreter Zeit die n -te Partialsumme, d.h. für i.i.d. X_i

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i,$$

und $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$, so ist S_n ein adaptierter Prozess. In stetiger Zeit hängt man diesen Prozess an den Zeitpunkten $0, \frac{1}{n}, \dots, 1$ auf, und erhält den Partialsummenprozess¹

$$S^n(t) := \sum_{i=1}^{[nt]} X_i.$$

Die natürliche Filtration erhält hier jeweils an den Zeitpunkten $\frac{k}{n}$ einen Informationsschub.

Durch die Frage nach dem ersten Zeitpunkt, an dem ein vorgegebener Prozess einen gewissen Wert überschreitet, gelangt man zu dem Konzept von zufälligen Zeitpunkten, den sogenannten Stoppzeiten. Ebenso könnte man in obigem Beispiel $S^n(t)$ nicht an festen Zeitpunkten, sondern an zufälligen Zeitpunkten aufhängen, siehe Beispiel 1.1.7.

Definition 1.1.4. Eine Zufallsvariable τ heißt **Stoppzeit** (bezgl. der Filtration $\{\mathcal{F}\}$), falls $\tau \in [0, \infty]$ und

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Die σ -Algebra der Information vor τ definieren wir mit

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}.$$

Man kann nun folgendes zeigen:

Satz 1.1.5. • Eine Stoppzeit τ ist \mathcal{F}_τ -messbar.

- Für einen adaptierten Prozess ist X_τ , definiert auf $\{\tau < \infty\}$, \mathcal{F}_τ -messbar.
- Für zwei Stoppzeiten τ, σ mit $\tau \leq \sigma$ \mathbb{P} -f.s. folgt $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_\sigma$.
- Für zwei Stoppzeiten τ, σ sind $\tau \wedge \sigma, \tau \vee \sigma, \tau + \sigma$ wieder Stoppzeiten.

Beispiel 1.1.6. 1. Die Konstante Stoppzeit, $\tau = \text{const.}$, ist eine Stoppzeit.

2. Für einen adaptierten Prozess X ist die **Ersteintrittszeit**

$$\tau_a := \inf\{s \geq 0 : X_s \geq a\}$$

eine Stoppzeit.

¹ $[x]$ steht für den Gauß-Abschnitt von x , d.h. die größte ganze Zahl z , mit $z < x$.

Beispiel 1.1.7. Setze in Beispiel 1.1.3 $X_i \equiv 1$, also nicht zufällig. Dafür sind die Sprungzeitpunkte zufällig: Für E_i i.i.d, Exponential(λ)-verteilt definieren wir durch

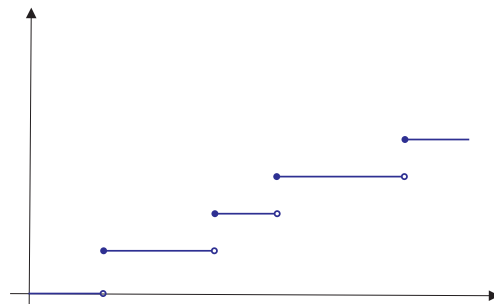
$$\begin{aligned} N_t &:= \sum_{i \in \mathbb{N}: \{E_1 + \dots + E_i \leq t\}} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{E_1 + \dots + E_i \leq t\}} = \#\{i : E_1 + \dots + E_i \leq t\} \end{aligned}$$

den **Poisson-Prozess**.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für einen Poisson-Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ folgende Aussage gilt:

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!},$$

d.h. N_t ist Poisson-verteilt zum Parameter λt .



In dem obigen Bild ist ein Poissonprozess dargestellt. Die Sprünge finden jeweils zu den Zeitpunkte $E_1, E_1 + E_2, E_1 + E_2 + E_3$ usw. statt.

1.2 Die Brownsche Bewegung

Der Botanist Robert Brown beobachtete 1828 das irreguläre Verhalten eines Pollenkorns auf Wasser. Diese Bewegung wird durch einzelne Wassermoleküle hervorgerufen, die das Pollenkorn immer wieder in eine andere Richtung stoßen. Einzug in die Finanzmathematik hielt die Brownsche Bewegung 1900 mit der Doktorarbeit von Louis Bachelier. Ohne Übertreibung kann man behaupten, dass die Brownsche Bewegung der wichtigste Prozess in der Finanzmathematik ist.

Definition 1.2.1. Eine (Standard-) Brownsche Bewegung ist ein stetiger, adaptierter Prozess $(B_t)_{t \geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $B_0 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1.
2. $(B_t)_{t \geq 0}$ besitzt **unabhängige Zuwächse**, d.h. für $0 \leq s < t$ ist $B_t - B_s$ unabhängig von \mathcal{F}_s .
3. $B_t - B_s$ ist normal verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.

Bemerkung 1.2.2. Die Annahme der Normalverteilung im Punkt s ist nicht unbedingt nötig. Mit Hilfe der unabhängigen Zuwächse und des zentralen Grenzwertsatzes (ZGWS) kann man die Normalität ableiten. Wichtig ist dagegen die **Stationarität**, d.h. $X_t - X_s$ hat die gleiche Verteilung mit $X_{t-s} - X_0 = X_{t-s}$.

Bemerkung 1.2.3. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Existenz der Brownsche Bewegung zu zeigen. Eine davon ist die Approximation mit Hilfe des (nun standardisierten) Partialsummenprozesses

$$S^n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt]} X_i$$

für X_i i.i.d. mit $E(X_i) = 0$ und $\text{Var}(X_i) = 1$. Mit der Hilfe des Satzes von Donsker erhält man $S^n \xrightarrow{\mathcal{L}} B$. Eine weitere davon ist die Konstruktion durch Hilbert-Raum Methoden, s. Karatzas and Shreve (1988, Kapitel 2.3) oder Steele (2001, Kapitel 3.3).

Wir möchten nun einige Eigenschaften der Brownsche Bewegung ableiten.

Satz 1.2.4. *Die Brownsche Bewegung ist ein Martingal, und ebenso $(B_t^2 - t)_{t \geq 0}$.*

Beweis. Da die Brownsche Bewegung unabhängige Zuwächse hat, ist für $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} E(B_t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + B_s \\ &= \mathbb{E}(B_t - B_s) + B_s \\ &= B_s. \end{aligned}$$

Für die zweite Aussage nutzen wir wieder die unabhängigen Zuwächse

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_t^2 - t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^2 | \mathcal{F}_s) - t \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)] + 2\mathbb{E}[(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] + B_s^2 - t \\ &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass B Gaußsche **fdi's** (= finite dimensional distributions) hat, d.h. für alle $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ist der Vektor $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ normalverteilt.

Aus der Standard-Brownschen Bewegung erhält man eine allgemeine Brownsche Bewegung durch

$$\tilde{B}_t := \mu t + \sigma B_t.$$

Hierbei sind $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Typischerweise bezeichnet man μ als Drift.

Beispiel 1.2.5. Ein weiteres Martingal, ein sogenanntes **exponentielles Martingal**, erhält man durch

$$\mathcal{E}_t(\tilde{B}) := \exp\left(\tilde{B}_t^2 - \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right).$$

Beweis. Zunächst ist die Laplace-Transformierte einer $\mathcal{N}(0, 1)$ verteilten ZV ξ

$$\begin{aligned} \varphi_\xi(\lambda) &:= \mathbb{E}(\exp(\lambda\xi)) = \int e^{\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} dx \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}}. \end{aligned}$$

Für die Laplace-Transformierte einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -ZV ξ folgt direkt

$$\varphi_\xi(\lambda) = e^{\lambda\mu + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}. \quad (1.1)$$

Nun ist für $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\exp\left(\tilde{B}_t - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}t\right)\right) \middle| \mathcal{F}_s\right) &= \mathbb{E}\left(\exp(\tilde{B}_t - \tilde{B}_s) \middle| \mathcal{F}_s\right) \exp\left(\tilde{B}_s - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}t\right)t\right) \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \exp\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \tilde{B}_s - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}t\right)t\right) \\ &= \exp\left(\tilde{B}_s - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)s\right). \end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.2.6. Diesen Prozess werden wir später noch genauer kennenlernen. Es handelt sich um die **geometrische Brownsche Bewegung**, die auch die Grundlage des Black-Scholes-Modells bildet.

Bemerkung 1.2.7. Die Laplace-Transformierte bestimmt wie die Fouriertransformierte die Verteilung einer ZV eindeutig. Besonders im Zusammenhang mit der geometrischen Brownschen Bewegung erweist sie sich (natürlich!) als ein nützliches Hilfsmittel.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte einer χ^2 -Verteilung.

Aufgabe 4. Für eine Folge von i.i.d. ZV X_i mit existierender Laplace-Transformierte ist

$$M_n = \frac{\exp(\lambda \sum_{i=1}^n X_i)}{\varphi_X(\lambda)^n}$$

wieder ein Martingal. Besonders interessant ist beispielsweise der Fall mit λ_0 so, dass $\varphi_x(\lambda_0) = 1$. Nehmen Sie dafür an, die X_i seien so verteilt, dass $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ und bestimmen Sie M_n .

Die Forderung $\mathbb{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ ist in einem spieltheoretischen Kontext gleichbedeutend mit einem "fairen Spiel". In Anlehnung an das Konzept der Stoppzeiten könnte man nun nach der günstigsten Strategie suchen, sozusagen im richtigen Augenblick zu stoppen. Das das nicht möglich ist, ist Aussage des folgenden **Optional Sampling Theorem** (OST).

Theorem 1.2.8. *Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal, und sind τ, σ zwei Stoppzeiten, für die $\sigma \leq \tau \leq K < \infty$ gilt, so ist*

$$\mathbb{E}(M_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = M_\sigma \quad f.s.$$

Für ein Submartingal gilt in der obigen Gleichung " \leq ".

Beweis. Wir behandeln nur den zeitlich diskreten Fall.

Es reicht zu zeigen, dass auf $\{\tau \geq n, \sigma = n\}$ gerade $\mathbb{E}(M_\tau | \mathcal{F}_n) = M_n$ gilt. Dazu sei $A \in \mathcal{F}_n$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{A \cap \{\tau \geq n, \sigma = n\}} \mathbb{E}(M_\tau | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} &= \int_{A \cap \{\tau \geq n, \sigma = n\}} M_\tau d\mathbb{P} = \int_{A \cap \{\sigma = n\}} \sum_{k=n}^N 1_{\{\tau=k\}} M_k d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=n}^N \int_{A \cap \{\tau=k, \sigma=n\}} M_k d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=n}^N \int_{\underbrace{A \cap \{\tau=k, \sigma=n\}}_{\in \mathcal{F}_k}} \mathbb{E}(M_N | \mathcal{F}_k) d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=n}^N \int_{A \cap \{\tau=k, \sigma=n\}} M_N d\mathbb{P} \\
&= \int_{\underbrace{A \cap \{\tau \geq n, \sigma = n\}}_{\in \mathcal{F}_n}} \mathbb{E}(M_N | \mathcal{F}_n) d\mathbb{P} = \int_{A \cap \{\tau \geq n, \sigma = n\}} M_n d\mathbb{P}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. Einen anderen Beweis des OST erhält man folgendermaßen. Nutzen Sie für die Zerlegung nach $\{\tau = k\}$, dass $\{\tau = k\} = \{\tau \geq k\} - \{\tau \geq k+1\}$. Nach Teleskopieren erhalten Sie einen Ausdruck der Form $\sum a_k (M_k - M_{k-1})$ (Bem: Vergleichen Sie mit dem stochastischen Integral im nächsten Kapitel!). Mit dem kleinen Trick, dass $\{\tau \geq k\}$ \mathcal{F}_{k-1} -messbar ist (Beweis!), zeigt man, dass die Summe ein Martingal, eine sogenannte **Martingaldifferenzfolge**, ist.

Eine erste Anwendung lernen wir bei Berechnungen zu den **Ersteintrittszeiten**

$$\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$$

kennen, wobei wir $\inf \emptyset := \infty$ setzen.

Satz 1.2.9. Die Ersteintrittszeit τ_a ist eine f.s. endliche Stoppzeit mit Laplace-Transf.

$$\varphi_{\tau_a}(-\lambda) = \mathbb{E}(e^{-\lambda \tau_a}) = e^{-|a| \sqrt{2\lambda}}, \quad \lambda \geq 0.$$

Beweis. Nehmen wir an, dass $a \geq 0$, den anderen Fall erhält man durch Betrachtung von $-B_t$. Dann ist

$$\{\tau_a \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}} \bigcup_{s \in (0, t] \cap \mathbb{Q}} \{B_s > a - \varepsilon\}$$

und da $\{B_s > a - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t$, ist τ_a eine Stoppzeit.

Wir möchten das OST auf τ_a anwenden, aber τ_a ist nicht notwendigerweise beschränkt. Deswegen betrachten wir $\tau_a \wedge n$ und lassen n gegen unendlich laufen. Natürlich fehlt uns noch das passende Martingal. Man beachte, dass wir einen Konvergenzsatz anwenden

müssen, etwa den Satz von Lebesgue. Hierzu bietet sich besonders das Martingal aus Beispiel 1.2.5 an,

$$M_t = \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$$

da es ja bereits nach unten beschränkt ist!

Das OST liefert direkt

$$\mathbb{E}(M_{\tau_a \wedge n}) = \mathbb{E}(M_0) = 1.$$

Die obere Schranke erhalten wir leicht durch

$$\exp\left(\sigma B_{\tau_a \wedge n} - \frac{\sigma^2 \tau_a}{2}\right) \leq \exp(\sigma a.)$$

Auf $\{\tau_a < \infty\}$ konvergiert $M_{\tau_a \wedge n}$ gegen M_{τ_a} und deswegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{\{\tau_a < \infty\}} M_{\tau_a}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1_{\{\tau < \infty\}} M_{\tau_a \wedge n}) \\ &= 1, \end{aligned}$$

woraus sofort

$$\mathbb{E}\left(1_{\{\tau_a < \infty\}} \exp\left(-\frac{\sigma^2 \tau_a}{2}\right)\right) = \exp(-\sigma a) \quad (1.2)$$

folgt (da ja auf $\{\tau_a < \infty\}$ $B_{\tau_a} = a$ gilt). Lassen wir σ gegen 0 gehen (monotone Konvergenz) so fallen die e -Terme in (1.2) weg. Also gilt

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1,$$

die Aussage des Satzes folgt aus (1.2) durch die Wahl von $\sigma = \sqrt{2\lambda}$. ■

Wie wir gesehen haben, sind Schranken von Martingalen sehr nützlich. Betrachten wir $B_t^2 - t$, so werden sich die folgenden Ungleichung als sehr nützlich erweisen (und nicht nur dort!).

1.3 Einführung in die Stochastische Integration

In einem Finanzmarkt wird ein Investor versuchen, seine Handelsstrategie zu optimieren. Wie sieht so eine Strategie aus? Zu einem Zeitpunkt t_k kann der Investor entscheiden, wie viel Geld er beispielsweise in eine Aktie S investieren will. Sagen wir, er kaufe a_k Aktien. Zum Zeitpunkt t_{k+1} sind diese $a_k S_{k+1}$ wert. Er hat einen Gewinn/Verlust von $a_k(S_{k+1} - S_k)$ gemacht. Natürlich kann er auch an t_{k+1} investieren, sagen wir in a_{k+1} Aktien, was ihm einen Betrag $a_{k+1}(S_{k+2} - S_{k+1})$ beschern wird. Summieren wir seine Gewinne bzw. Verluste, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^N a_k (S_{k+1} - S_k) =: \sum_{k=0}^N a_k \Delta S_{k+1}. \quad (1.3)$$

Natürlich muss a_k zum Zeitpunkt t_k bekannt sein, also a_k \mathcal{F}_k -messbar.

²Wir schreiben kurz S_k für S_{t_k} .

Beispiel 1.3.1. Die klassische buy-and-hold Strategie wird dargestellt durch $a_0 = \dots = a_N = 1$, und der Investor hätte demzufolge an t_N einen Betrag von $S_N - S_0$ zur Verfügung (das kann natürlich negativ sein).

Will man nun einen kontinuierlichen Handelsprozess zulassen, so ist man natürlicherweise an einem Grenzwert von (1.3) für eine immer feiner werdende Partition interessiert. Dies wird das stochastische Integral sein.

1.3.1 Die Definition des Itô-Integrals

Bei unserer Suche nach einer präzisen Definition des stochastischen Integrals werden wir uns stets auf ein endliches Zeitintervall $[0, T]$ beschränken. Für einen Integranden $(f(\omega, s))_{s \in [0, T]}$ bezeichnen wir das Integral zunächst mit $I_t(f)(\omega)$ und denken dabei insgeheim an

$$\int_0^t f(\omega, s) dB_s(\omega).$$

In diesem Abschnitt werden wir uns auf Integranden aus $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0, T]$ konzentrieren, d.h. messbare, adaptierte Prozesse f , für die

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f^2(\omega, s) ds \right] < \infty$$

gilt.

Bei genauerem Hinsehen entpuppt sich dieses Integral als Doppelintegral und so ist \mathcal{H}^2 ein abgeschlossener, linearer Unterraum von $L^2(d\mathbb{P} \times dt)$.

Zunächst eine Warnung: Eine Definition im Sinne des Riemann-Integrals ist nicht möglich, da die Pfade der Brownschen Bewegung von unbeschränkter Variation sind.

Der Prozess in (1.3) soll natürlicherweise durch den Integranden

$$f(\omega, s) = \sum_{k=0}^N a_k(\omega) 1_{(t_k, t_{k+1}]} \circ s \tag{1.4}$$

beschrieben werden. Falls neben $t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1}$ und $a_k \in \mathcal{F}_{t_k}$ auch $\mathbb{E}(a_k^2) < \infty$, nennen wir solche Integranden **einfache Prozesse** und bezeichnen sie mit \mathcal{H}_0^2 . Das Integral bezüglich der Brownschen Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ definieren wir für ein solches f mit der Darstellung (1.4) also durch

$$I_t(f) := \sum_{k=0}^N a_k (B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k})$$

wobei in letzter Gleichung p so gewählt ist, dass $t_p < t \leq t_{p+1}$. Offensichtlich handelt es sich nicht um “das” Integral von f , sondern um einen ganzen Prozess $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$.

Natürlich werden wir uns nicht mit einfachen Integranden zufrieden geben. Nehmen wir einmal an, man könnte eine kompliziertere Funktion f durch eine Folge von einfachen Integranden $(f_n)_{n \geq 1}$ approximieren. Das Integral von f sollte dann der Limes der $I_t(f_n)$ sein.

Für die Erweiterung von $I_t : \mathcal{H}_0^2 \rightarrow L^2(d\mathbb{P})$ auf \mathcal{H}^2 benötigen wir die Stetigkeit von I , welche durch folgendes Lemma gegeben wird

Lemma 1.3.2. (Itô Isometrie auf \mathcal{H}_0^2) Für $f \in \mathcal{H}_0^2$ und $t \in [0, T]$ gilt

$$\mathbb{E}[I_t(f)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f^2(\omega, s) ds\right]. \quad (1.5)$$

Bemerkung 1.3.3. Obige Gleichung kann man auch schreiben als (hier für $t = T$)

$$\|I_T(f)\|_{L^2(d\mathbb{P})} = \|f\|_{L^2(d\mathbb{P} \times dt)},$$

wobei dt hier das Lebesgue-Maß auf $[0, T]$ bezeichnet. Deswegen der Name *Isometrie*.

Beweis. Wir berechnen einfach die beiden Normen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass t auf einem Gitterpunkt, sagen wir t_p , liegt. Der andere Fall hat nur eine kompliziertere Notation. Zunächst ist

$$\mathbb{E}[I_t(f)^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i,k=0}^p a_k a_l (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \cdot (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\right] = \sum_{k=0}^p \mathbb{E}(a_k^2)(t_{k+1} - t_k).$$

Die zweite Norm ergibt

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\sum_{k=0}^N a_k \mathbf{1}_{(t_k, t_{k+1}]} \circ s\right)^2 ds\right] = \sum_{k=0}^p \mathbb{E}(a_k^2) \int_{t_k}^{t_{k+1}} 1 ds = \sum_{k=0}^p \mathbb{E}(a_k^2)(t_{k+1} - t_k). \quad \blacksquare$$

Da I also eine Abbildung ist, die die Abstände in \mathcal{H}_0^2 und $L^2(d\mathbb{P})$ erhält, bildet I Cauchyfolgen in \mathcal{H}_0^2 auf Cauchyfolgen in $L^2(d\mathbb{P})$ ab.

Zunächst weisen wir noch einige Eigenschaften des stochastischen Integrals nach.

Lemma 1.3.4. Für $f \in \mathcal{H}_0^2$ ist $(I_t(f))_{t \in [0, T]}$ ein stetiges Martingal und es gilt

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \in [0, T]} \left(I_t(f)\right)^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[\int_0^t f^2(s) ds\right].$$

Beweis. Die Stetigkeit folgt direkt aus der Stetigkeit der Brownschen Bewegung und der Definition von I . Zum Nachweis der Martingaleigenschaft betrachten wir $0 \leq s \leq t \leq T$ und bezeichnen mit t_p den größten Index in der Darstellung (1.4), der gerade noch kleiner als s ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(I_t(f) \mid \mathcal{F}_s\right) &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k (B_{k+1} - B_k) + a_p \mathbb{E}(B_{t_{p+1}} - B_{t_p} \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}\left(\sum_{k=p+1}^N a_k (B_{k+1} - B_k) \mid \mathcal{F}_s\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k (B_{k+1} - B_k) + a_p (B_s - B_{t_p}) = I_s(f). \end{aligned}$$

Die Ungleichung folgt nun direkt aus der Doobschen Ungleichung mit $p = 2$. \(\blacksquare\)

Das folgende Lemma sagt nun aus, dass \mathcal{H}_0^2 dicht in \mathcal{H}^2 ist. Damit wird es ein Leichtes sein, das Itô-Integral auf \mathcal{H}^2 zu erweitern.

Lemma 1.3.5. *Für alle $f \in \mathcal{H}^2$ existiert eine Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ mit $f_n \in \mathcal{H}_0^2$, s.d.*

$$\|f - f_n\|_{L^2(d\mathbb{P} \times dt)} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Für einen Beweis sei auf Steele (2001, Kap. 6.6) verwiesen. Dennoch geben wir an dieser Stelle die benutzte Approximation,

$$A_n(f)(\omega, t) := \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{t}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\omega, s) ds \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(s),$$

an. Hierbei ist $t_i = \frac{iT}{2^n}$. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass f über einen anderen Bereich integriert wird als $(t_i, t_{i+1}]$. Dadurch wird jedoch die Adaptiertheit sichergestellt.

Man könnte nun meinen, für f wähle man eine approximierende Folge f_n und definierte $I_t(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} I_t(f_n)$ für jedes t . Als Element in $L^2(d\mathbb{P})$ sind diese aber jeweils nur bis auf eine Nullmenge $Z_t, t \in [0, T]$ definiert. Das Problem entsteht nun, dass eine überabzählbare Vereinigung von Nullmengen keine Nullmenge mehr sein muss. Man muss also etwas mehr Vorsicht walten lassen, und aus den I_t den richtigen Kandidaten auswählen. Das wird in folgendem Satz geschehen.

Satz 1.3.6. *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}\}$. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung J , die $f \in \mathcal{H}$ auf einen stochastischen Prozess abbildet, so dass*

1. $(J(f)_t)_{t \in [0, T]}$ ist ein stetiges Martingal bezüglich $\{\mathcal{F}\}$,
2. für $f \in \mathcal{H}_0^2$ gilt $\mathbb{P}(J(f)_t = I_t(f)) = 1$, für alle $t \in [0, T]$,
3. für $t \in [0, T]$ ist $\mathbb{E}(J(f)_t^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^t f^2(\omega, s) ds\right)$.

Hierbei ist J eindeutig in dem Sinne, dass, falls J' ebenfalls diese Bedingungen erfüllt, gilt

$$\mathbb{P}\left(J(f)_t = J'(f)_t\right) = 1, \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ und } f \in \mathcal{H}^2.$$

Damit definieren wir das Itô-Integral für $f \in \mathcal{H}^2$ und $t \in [0, T]$ als

$$\int_0^t f(s) dB_s := J(f)_t.$$

Beweis. Nach Lemma 1.3.5 existiert eine Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ von einfachen Prozessen, so dass

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t (f(s) - f_n(s))^2 ds\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Der Grenzprozess soll wieder stetig sein, wir benötigen also gleichmäßige Konvergenz. Das ist übrigens für alle stetigen quadratintegrierbaren Martingale der Fall, siehe Karatzas and Shreve (1988, Satz 1.5.23). Wir nutzen die Maximal-Ungleichung und erhalten, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\sup_{t \in [0, T]} \left(I_t(f_n) - I_t(f_m)\right) \geq \varepsilon\right] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left[\left(I_T(f_n) - I_T(f_m)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(f_n(s) - f_m(s)\right)^2 ds\right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Man kann demnach eine geeignete Teilfolge $\{n_k\}$ auswählen, so dass für alle $k \geq 1$

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t \in [0, T]} \left(I_t(f_{n_{k+1}}) - I_t(f_{n_k})\right) \geq \frac{1}{2^k}\right] \leq \frac{1}{2^k}.$$

Mit Hilfe des Borel-Cantelli Lemmas schließt man nun, dass für k groß genug

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_t(f_{n_{k+1}}) - I_t(f_{n_k})| \leq \frac{1}{2^k}$$

auf einer Menge mit Wahrscheinlichkeit 1. Damit folgt nun, dass $\{I_t(f_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bildet und da es sich um eine gleichmäßige Konvergenz handelt, ist der Grenzwert eine stetige Funktion, die wir gerade mit $t \mapsto J(f)_t$ bezeichnen.

Wenden wir wie zur Gleichung (1.6) die Doobsche Ungleichung an, so erhalten wir

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0, T]} \left(I_t(f_{n+p}) - I_t(f_n)\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T [f_{n+p}(s) - f_n(s)]^2 ds\right). \quad (1.7)$$

Lassen wir p entlang der $\{n_k\}$ gegen unendlich gehen, so erhalten wir

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0, T]} \left(J(f)_t - I_t(f_n)\right)^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\int_0^T \left(f(s) - f_n(s)\right)^2 ds\right), \quad (1.8)$$

d.h. der Grenzwert $(J(f)_t)_{t \in [0, T]}$ hängt nicht von der ausgewählten Teilfolge ab.

Nun zur Martingaleigenschaft. Zunächst ist jedes $(I_t(f_n))$ ein Martingal nach Lemma 1.3.5 und quadratintegrierbar. Dann konvergieren auch die Erwartungswerte, siehe Bauer (1990, Satz 15.1), und so ist für $0 \leq s \leq t$

$$E\left(J(f)_t | \mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} I_t(f_{n_k}) | \mathcal{F}_s\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(I_t(f_{n_k}) | \mathcal{F}_s\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_s(f_{n_k}) = J(f)_s.$$

Ebenso erhalten wir

$$E\left(J(f)_t^2\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(I_t(f_{n_k})^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t f^2(s) ds\right)$$

und, aus Gleichung (1.8),

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} J(f)_t^2 \right) \leq 4\mathbb{E} \left(\int_0^T f^2(s) ds \right).$$

Für die Eindeutigkeit betrachten wir eine Abbildung J' , die Bedingungen 1. bis 3. erfüllt. Dann erhalten wir aus Gleichung (1.8)

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \left(J(f)_t - J'(f_n)_t \right)^2 \right) \leq 4\mathbb{E} \left(\int_0^T \left(f(s) - f_n(s) \right)^2 ds \right).$$

Da die rechte Seite gegen Null konvergiert, folgt die entsprechende Eindeutigkeit. \blacksquare

1.3.2 Die Erweiterung des Itô-Integrals auf \mathcal{H}_{loc}^2

Unsere bisherige Definition des Itô-Integrals basiert wesentlich auf der Annahme, dass $f \in \mathcal{H}^2$, d.h. $\mathbb{E}(\int_0^T f(s)^2 ds) < \infty$. Leider ist dies schon für einfache Funktionale der Brownschen Bewegung nicht mehr erfüllt, z. B. für $f(s) = \exp(B_s^4)$. Es ist also nützlich, die Integrabilitätsbedingung merklich abzuschwächen, was wir mit Hilfe einer *Lokalisierung* tun werden. Der Preis dafür wird sein, dass das Itô-Integral nur noch ein "lokales" Martingal ist.

Zunächst betrachten wir das Itô-Integral bis zu einer Stoppzeit.

Satz 1.3.7. *Für ein $(f(s))_{s \in [0, T]} \in \mathcal{H}^2$ und eine Stoppzeit τ mit $\mathbb{P}(\tau \leq T) = 1$ ist*

$$\int_0^\tau f(s) dB_s = \int_0^T 1_{\{s \leq \tau\}} f(s) dB_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis. Auch hier wird sich wieder eine Approximation durch einen geeigneten "einfachen Prozess" als hilfreich erweisen. Zunächst betrachten wir nur Stoppzeiten der Form

$$\tau_n = \sum_{i=1}^n t_i 1_{A_i},$$

wobei $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ gelte und die A_i jeweils Elemente von \mathcal{F}_{t_i} und paarweise disjunkt seien. Außerdem sei $P(\cup A_i) = 1$. Für eine solche Stoppzeit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_n} 1_{\{s \leq \tau_n\}} f(s) dB_s &= \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \int_0^T 1_{\{s \leq t_i\}} f(s) dB_s \\ &= \sum_{i=1}^n 1_{A_i} \int_0^{t_i} f(s) dB_s \\ &= \int_0^{\tau_n} f(s) dB_s. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Nun kann man τ durch solche einfachen Stoppzeiten approximieren, indem man

$$\tau_n := \sum_{i=0}^{2^n} \frac{(k+1)T}{2} 1_{\left\{\frac{kT}{2^n} \leq \tau < \frac{(k+1)T}{2^n}\right\}}$$

setzt. Die τ_n bilden eine monoton fallende Folge, die mit Wahrscheinlichkeit 1 gegen τ konvergiert.

Wir lassen nun in (1.9) auf beiden Seiten n gegen unendlich gehen. Für die rechte Seite nutzen wir, dass die Abbildung $t \rightarrow \int_0^t f(s) dB_s$ stetig ist, und so

$$\int_0^{\tau_n} f(s) dB_s \rightarrow \int_0^{\tau} f(s) dB_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Für die linke Seite gilt, dass

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T 1_{\{s \leq \tau_n\}} f(s) dB_s - \int_0^T 1_{\{s \leq \tau\}} f(s) dB_s \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left(\int_0^T 1_{\{\tau < s \leq \tau_n\}} f(s)^2 dB_s \right),$$

was gegen Null konvergiert (mit Hilfe des Satzes von Lebesgue).

Wir erhalten also L^2 -Konvergenz, woraus folgt, dass eine Teilfolge \mathbb{P} -f.s. konvergiert. ■

Unser Ziel ist es, die Integranden auf eine möglichst große Klasse auszuweiten. Es wird sich zeigen, dass wir mit³

$$\mathcal{H}_{loc}^2 := \left\{ (f(s))_{s \in [0, T]} \text{ adaptiert und } \int_0^T f(s)^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \right\}$$

für alle Anwendungen ausreichend gerüstet sind. Das Konzept der Lokalisierung zeigt sich erstmals in folgender Definition

Definition 1.3.8. Eine monoton wachsende Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \geq 1}$ heißt **lokalisierende Folge** von f , falls

$$f_n(\omega, t) := f(\omega, t) 1_{\{t \leq \tau_n(\omega)\}} \in \mathcal{H}^2, \quad \forall n \geq 1$$

und

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq 1} \{\tau_n = T\} \right) = 1.$$

Dieses Konzept wird die Brücke zwischen \mathcal{H}_{loc}^2 und \mathcal{H} schlagen.

Satz 1.3.9. Für jedes $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$ ist die Folge $(\tau_n)_{n \geq 1}$ gegeben durch

$$\tau_n := \inf \left\{ t \in [0, T] : \int_0^t f^2(s) ds \geq n \right\}, \quad (1.10)$$

wobei wir $\inf \emptyset := T$ setzen, eine lokalisierende Folge.

³In der Literatur wird dieser Raum auch oft als L_{loc}^2 bezeichnet.

Beweis. Durch die Definition von τ_n ist $(f_n) \in \mathcal{H}^2$. Außerdem ist

$$\bigcup_{n \geq 1} \{\tau_n = T\} = \left\{ \int_0^T f^2(s) ds < \infty \right\}$$

und da $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$ hat die rechte Seite die Wahrscheinlichkeit 1. ■

Für die Erweiterung des Integrals auf \mathcal{H}_{loc}^2 werden wir folgendermaßen vorgehen:

Zunächst wählen wir zu einem $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$ eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten und erhalten die entsprechenden f_n . Das Itô-Integral definieren wir als Limes der Integrale von f_n . Genauer gesagt, werden wir wieder zeigen, dass ein eindeutiger, stetiger Prozess $(J(f)_t)_{t \in [0, T]}$ existiert, so dass

$$\mathbb{P} \left(J(f)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(s) dB_s \right) = 1 \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Satz 1.3.10. *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung J von \mathcal{H}_{loc}^2 in den (Vektor-)Raum der stetigen Prozesse auf $[0, T]$, so dass*

1. Für $f \in \mathcal{H}_0^2$ gilt $\mathbb{P} \left(J(f)_t = \int_0^t f(s) dB_s \right) = 1$ für alle $t \in [0, T]$,
2. für eine Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ von Prozessen in \mathcal{H}_{loc}^2 , für die $\int_0^T f_n(s)^2 ds$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, gilt

$$\sup_{t \in [0, T]} |J(f)_t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Mit Hilfe des obigen Satzes können wir nun für jedes $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$ das Itô-Integral definieren, und zwar durch

$$\int_0^t f(s) dB_s := J(f)_t.$$

Bemerkung 1.3.11. Man beachte, dass nun das stochastische Integral kein Martingal mehr sein muss. Aber dazu später mehr.

Beweis. Wir definieren J und zeigen dann die Eindeutigkeit.

Für $f \in \mathcal{H}^2$ definieren wir natürlich $J(f)$ durch das bereits bekannte Itô-Integral, so dass 1. per Definition gilt.

Für $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$, dass wie in Satz 1.3.9 lokalisiert wird, gilt auf $A_n := \left\{ \int_0^T f^2(s) ds < n \right\}$, dass $f_n = f_{n+1}$. Da die Vereinigung dieser Mengen die Wahrscheinlichkeit 1 hat, definieren wir, auf $A_n \setminus A_{n-1}$,

$$J(f)_t := \int_0^t f_n(s) dB_s. \tag{1.11}$$

Damit ist J \mathbb{P} -f.s. definiert. Da die einzelnen Integrale stetig sind, ist auch J \mathbb{P} -f.s. stetig. Für die Linearität betrachtet man zwei Prozesse f, g aus \mathcal{H}_{loc}^2 mit lokalisierenden Folgen $(\tau_n)_{n \geq 1}$ bzw. $(\nu_n)_{n \geq 1}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\tau_n \wedge \nu_n)_{n \geq 1}$ eine lokalisierende Folge von $af + bg$ und die Linearität von J folgt aus (1.11), eben der Definition.

Nun zeigen wir Eigenschaft 2. Zunächst gilt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |J(f)_t| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(\int_0^T f^2(s) ds \geq \frac{1}{n}\right) + \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |J(f)_t| \geq \varepsilon, \int_0^T f^2(s) ds < \frac{1}{n}\right).$$

Schauen wir uns den zweiten Summanden genauer an. Wir möchten gerne die Maximal-Ungleichung anwenden. Auf $\{\int_0^T f^2(s) ds < \frac{1}{n}\}$ ist natürlich $f = f \cdot 1_{\{\int_0^T f^2(s) ds < \frac{1}{n}\}}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, T]} |J(f)_t| \geq \varepsilon\right) &\leq \mathbb{P}\left(\int_0^T f^2(s) ds \geq \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left(\int_0^T f^2(u) \cdot 1_{\{\int_0^T f^2(s) ds < \frac{1}{n}\}} du\right) \\ &< \mathbb{P}\left(\int_0^T f^2(s) ds \geq \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{n \varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Konvergiert nun $(f_n)_{n \geq 1}$ stochastisch gegen 0, so folgt also $\sup_{t \in [0, T]} |J(f)_t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Eigenschaft 2. sichert nun die Wohldefiniertheit unserer Definition. In der Tat, für eine zweite Lokalisierung von f , sagen wir durch $(\tilde{\tau}_n)_{n \geq 1}$, ist $J(f)_t = J(\tilde{f}_n)_t$ auf $\{t \leq \tau_n \wedge \tilde{\tau}_n\}$. Darüberhinaus gilt auf dieser Menge auch $J(f)_t = J(f_n)_t = J(\tilde{f}_n)_t$. Da die Menge

$$\bigcup_{n \geq 1} \{\tau_n \wedge \tilde{\tau}_n = T\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\tau_n = T \text{ und } \tilde{\tau}_n = T\}$$

die Wahrscheinlichkeit 1 hat, folgt die Wohldefiniertheit.

Für die Eindeutigkeit nehmen wir an, es existierte eine zweite solche Abbildung, \tilde{J} . Zunächst sei bemerkt, dass für $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$ mit Lokalisierung (f_n) gerade $\int_0^T (f - f_n)^2 ds$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Die Eindeutigkeit des Itô-Integrals auf \mathcal{H}^2 und Eigenschaft 1. liefert

$$J_t(f) - \tilde{J}_t(f) = (J_t(f) - J_t(f_n)) - (\tilde{J}_t(f) - \tilde{J}_t(f_n)),$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 für jedes $t \in [0, T]$. Mit Eigenschaft 2. folgt, dass $\sup |J(f) - \tilde{J}(f)|$ in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert, also die geforderte Eindeutigkeit. ■

1.3.3 Lokale Martingale

Das Itô-Integral für Integranden aus \mathcal{H}_{loc}^2 wird im Allgemeinen kein Martingal, sondern nur ein lokales Martingal sein. Wie bisher, sei $\{\mathcal{F}\}$ die im Hintergrund stets präsente Filtration.

Definition 1.3.12. Ein adaptierter Prozess $(M_t)_{t \geq 0}$ heißt **lokales Martingal**, falls es eine wachsende Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \geq 1}$ mit der Eigenschaft $\tau_n \rightarrow \infty$ \mathbb{P} -f.s. und die n Prozesse

$$M_t^{(n)} := M_{t \wedge \tau_n} - M_0, \quad t \in [0, \infty)$$

sind Martingale für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Ebenso gibt es natürlich lokale Sub/Supermartingale usw. Unser primäres Interesse an lokalen Martingalen ist begründet in der folgenden Aussage.

Satz 1.3.13. Für jedes $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$ ist das Itô-Integral ein lokales Martingal.

Beweis. Zu dem stochastischen Prozess

$$X_t := \int_0^t f(s) dB_s$$

definieren wir die lokalisierende Folge wie in (1.10). Dann ist nach Definition $(X_{t \wedge \tau_n})$ ein Martingal und somit X ein lokales Martingal. ■

Natürlich fragt man sich an dieser Stelle, wann ein lokales Martingal auch ein “echtes” Martingal ist. Dazu der folgende Satz

Satz 1.3.14. Ein nichtnegatives lokales Martingal $(X_t)_{t \in [0, T]}$ mit $\mathbb{E}(|X_0|) < \infty$ ist ein Supermartingal. Falls außerdem

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0) \tag{1.12}$$

gilt, ist es ein Martingal.

Beweis. Wir werden Fatou’s Lemma anwenden. Sei dazu $(\tau_n)_{n \geq 1}$ die lokalisierende Folge, dann gilt

$$\mathbb{E}(X_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s) = X_{s \wedge \tau_n}, \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq T.$$

Mit dem Lemma von Fatou folgt direkt, dass

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s, \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq T, \tag{1.13}$$

also die Supermartingal-Eigenschaft. Bilden wir den Erwartungswert der letzten Gleichung, so folgt

$$\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_s) \geq \mathbb{E}(X_t) \geq \mathbb{E}(X_T),$$

und unter $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_T)$ muss gerade Gleichheit in allen Fällen gelten. Daraus folgt auch die Gleichheit für die bedingten Erwartungen in (1.13). Denn, wäre im gegenteiligen Fall $X_s > \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s)$ auf einer Menge mit positiver Wahrscheinlichkeit, so wäre auch $\mathbb{E}(X_s) > \mathbb{E}(X_0)$. ■

Das letzte Argument gilt natürlich für alle Submartingale, die (1.12) erfüllten. Diese Bedingung ist ein essentielles Hilfsmittel, um von lokalen auf “echte” Martingale zu schließen.

1.3.4 Die Itô-Formel

In diesem Abschnitt lernen wir nun das wesentliche Hilfsmittel der stochastischen Integration kennen, die Itô-Formel. Diese Formel bildet die Erweiterung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung auf stochastische Integral. In der einfachsten Form lautet die Itô-formel:

Theorem 1.3.15. Sei $(B_t)_{t \in [0, T]}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt für eine Abbildung $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit stetiger zweiter Ableitung und $t \in [0, T]$

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds. \quad (1.14)$$

Besonders interessant ist der zweite Ausdruck, der bei der klassischen Differential- und Integralrechnung nicht auftaucht. Bemerkenswert ist außerdem, dass gerade diese Darstellung eine Zerlegung von $f(B_t)$ in zwei vollkommen unterschiedliche Teile mit sich bringt. Während das dB -Integral Erwartungswert 0 hat, kann man den zweiten Teil sozusagen als Drift interpretieren. Es ist also eine Zerlegung in Fehler und Drift.

Wir werden noch allgemeinere Versionen der Itô-Formel kennenlernen. Die unterschiedlichen Beweise verfahren im wesentlichen analog zum Beweis dieser einfachen Version. Zentrales Hilfsmittel wird die Taylor-Formel sein. Aber - die Terme zweiter Ordnung werden einen wesentlichen Beitrag leisten (eben den "Drift").

Beweis. Der Beweis wird in vier Schritten erfolgen.

(*Schritt 1: Lokalisierung*) Wie nicht anders zu erwarten, müssen wir bei geringen Voraussetzungen an f eine gewisse Vorsicht walten lassen. Dazu definieren wir für $k \geq 1$

$$\tau_k := \inf\{t \in [0, T] : |B_t| \geq k\},$$

und $\inf \emptyset := T$. Die τ_k bilden eine monoton wachsende Folge, die f.s. gegen ∞ strebt. Zeigen wir die Aussage, (1.14), für $(B_{t \wedge \tau_k})$, so erhalten wir aus der Stetigkeit von B und f die Behauptung für $k \rightarrow \infty$. Damit können wir also annehmen, dass f und seine Ableitungen beschränkt durch eine Konstante K sind.

(*Schritt 2: Taylor und der erste Term*) Wir betrachten eine Zerlegung von $[0, t]$, definiert durch $t_i = it/n$, $0 \leq i \leq n$. Durch Teleskopieren erhalten wir

$$f(B_t) - f(0) = \sum_{i=1}^n (f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})).$$

Wie bereits erwähnt, werden wir die Taylor-Formel bis zur zweiten Ordnung anwenden:

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(0) &= \sum_{i=1}^n \left[f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (f''(\xi_i) - f''(B_{t_{i-1}}))(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &=: C_n + D_n + E_n, \end{aligned}$$

wobei ξ_i zwischen B_{t_i} und $B_{t_{i-1}}$ liegt. Nehmen wir uns zunächst C_n vor. C_n ist ein stochastisches Integral bezgl. des einfachen Integranden

$$f_n(s) := \sum_{i=1}^n f'(B_{t_{i-1}}) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(s).$$

Dabei ist natürlich $f_n \in \mathcal{H}_0^2$, da f' nach Schritt 1 als beschränkt angenommen werden kann. Weiterhin gilt mit majorisierter Konvergenz

$$\mathbb{E} \left(\left[\int_0^t (f_n(s) - f(B_s)) dB_s \right]^2 \right) = \mathbb{E} \left(\int_0^t [f_n(s) - f(B_s)]^2 ds \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also $C_n \rightarrow \int f(B_s) dB_s$ in L^2 .

(Schritt 3: der quadratische Term) Wir wissen bereits, dass der Erwartungswert von $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$ gerade $t_i - t_{i-1}$ ist. Wenn wir also D_n zentrieren, erhalten wir

$$D_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}}) \left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}}) (t_i - t_{i-1}).$$

Die zweite Summe konvergiert als normales Riemann-Integral für alle ω gegen $\int_0^t f''(B_s) ds$. Schreiben wir für die erste Summe \tilde{D}_n , so gilt wegen der Unabhängigkeit der Summanden

$$\begin{aligned} E(\tilde{D}_n^2) &\leq \frac{1}{4} \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left(\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1}) \right]^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \|f''\|_\infty^2 n \left(3 \frac{t^2}{n^2} - 2 \frac{t^2}{n^2} + \frac{t^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{t^2}{2n} \|f''\|_\infty^2, \end{aligned}$$

d.h. $\tilde{D}_n \rightarrow 0$ in L^2 .

(Schritt 4: der Restterm) Da die zweite Ableitung von f stetig ist, können wir den Restterm schreiben als

$$|E_n| \leq \sum_{i=1}^n h(B_{t_{i-1}}, B_{t_i}) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2,$$

wobei h stetig und beschränkt ist (s. Schritt 1), mit $h(x, x) = 0$. Ganz analog zu Schritt 3 erhalten wir damit

$$\sum_{i=1}^n h(B_{t_{i-1}}, B_{t_i}) (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{L^2} \int_0^t h(B_s, B_s) ds = 0.$$

Zusammenfassend haben wir bisher stets die L^2 -Konvergenz gezeigt. Damit konvergiert eine Teilfolge fast sicher, für jedes $t \in [0, T]$. Nun wählen wir eine abzählbare, dichte Teilmenge $\mathcal{T} \subset [0, T]$, auf der demnach mit Wahrscheinlichkeit 1 die Gleichung (1.14) gilt. Da beide Seiten stetig sind, erhalten wir Gleichheit auf ganz $[0, T]$. ■

Mit der Itô-Formel zur Hand sind wir bereits in der Lage, eine große Zahl von Beispielen durchzurechnen, die uns bereits ein gutes Gefühl für die Anwendungen der stochastischen Integration vermitteln werden.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Wie wir bereits wissen, ist die rechte Seite ein Martingal. Zeigen Sie mit Satz 1.3.6, dass auch die linke Seite ein Martingal ist.

Aufgabe 7. Bestimmen Sie $m(t) := \mathbb{E}(\exp(\lambda B_t))$ mit Hilfe der Itô-Formel. Bestimmen Sie dazu die Darstellung als stochastisches Integral von $Z_t = \exp(\lambda B_t)$. Sie erhalten für $m(t)$ eine Integralgleichung,

$$m(t) = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \int_0^t m(s) ds.$$

Leitet man nach t ab, so erhält man eine einfache (nicht-stochastische) Differentialgleichung.

Mit obiger Aufgabe gelangt man zu einem interessanten Ergebnis

Satz 1.3.16. Für eine deterministische, auf $[0, T]$ integrierbare Funktion $f(t)$ ist der Prozess $(X_t)_{t \in [0, T]}$, definiert durch

$$X_t := \int_0^t f(s) dB_s$$

ein Gaußscher Prozess mit Erwartungswert 0 und Varianz $\int_0^t f(s)^2 ds$.

Für den Beweis betrachtet man die Laplace-Transformierte von X und geht vor wie in obiger Aufgabe.

Aufgabe 8. Berechnen Sie $\mathbb{E}(B_t^4)$.

1.3.5 Weitere Itô-Formeln

In der Finanzmathematik wird die Funktion f der Preis eines Derivats sein. Da der Preis des Derivats vom underlying abhängt, bietet sich eine Darstellung der Form $f(t, X_t)$ an. Dazu benötigen wir also eine Itô-Formel für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Außerdem müssen wir bezüglich komplizierterer Prozesse als nur der Brownschen Bewegung differenzieren können. Dies ist das Ziel dieses Abschnitts. Zunächst betrachten wir kompliziertere Prozesse, die aus stochastischen Integralen gewonnen werden.

Definition 1.3.17. Der Prozess $(X_t)_{t \in [0, T]}$ heißt **Itô-Prozess**, falls X_0 \mathcal{F}_0 -meßbar und

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s, \quad t \in [0, T]. \quad (1.15)$$

Hierbei sind $(\mu(s))_{s \in [0, T]}$ und $(\sigma(s))_{s \in [0, T]}$ adaptierte, stochastische Prozesse mit

$$\mathbb{P}\left(\int_0^T |\mu(s)| ds < \infty\right) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\int_0^T \sigma(s)^2 ds < \infty\right) = 1.$$

Falls $\mu \equiv 0$, ist dieser Prozess ein alter Bekannter, eben gerade das stochastische Integral was wir in Abschnitt 1.3.2 kennengelernt haben. X ist dann ein lokales Martingal. Ein Itô-Prozess ist also ein lokales Martingal mit Drift. Für den Drift benötigen wir nur eine sehr schwache Integrierbarkeitsbedingung, nämlich dass er lokal von beschränkter Variation ist.

Das Itô-Integral lässt sich auch in Bezug auf Itô-Prozesse formulieren, und für $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$

$$\int_0^t f(s) dX_s = \int_0^t f(s)\mu(s) ds + \int_0^t f(s)\sigma(s) dB_s,$$

also ist das Integral wieder ein Itô-Prozess.

Betrachten wir zunächst nur Integranden, die von X und t abhängen. Die entsprechende Itô-Formel findet sich in folgendem Theorem.

Theorem 1.3.18. *Sei $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ und $(X)_{t \in [0, T]}$ ein Itô-Prozess mit Darstellung (1.15). Dann gilt*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \sigma^2(s) ds \end{aligned}$$

Natürlich gibt es auch eine mehrdimensionale Itô-Formel, in der korrelierte Brownsche Bewegungen vorkommen, siehe z.B. Karatzas and Shreve (1988, Kapitel 3.3) oder auch Björk (1998, Th. 3.16 und Bemerkung 3.7.1). Für eine Erweiterung auf Prozesse mit Sprüngen sei auf Protter (2004) verwiesen. Bemerkenswerterweise ist die Itô-Formel für Prozesse (nur) mit Sprüngen wesentlich einfacher (aber deswegen auch nicht so weitreichend).

Anstelle einer allgemeinen mehrdimensionalen Itô-Formel stellen wir einen Spezialfall vor, der üblicherweise mit partieller Integration bezeichnet wird.

Satz 1.3.19. *Für zwei Itô-Prozesse X, Y mit der Darstellung $dX(t) = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ und $dY(t) = \mu'_t dt + \sigma'_t dB_t$ gilt*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t, \quad (1.16)$$

wobei die **quadratische Kovariation** wie folgt definiert ist:

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \sigma_s \sigma'_s ds.$$

Bemerkung 1.3.20. Neben der quadratischen Kovariation gibt es natürlich auch die quadratische Variation, und es gilt

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

Damit lässt sich auch der quadratische Term in der Itô-Formel jeweils als Integral bezüglich der quadratischen Variation formulieren. Quadratische Variationen werden genauer z.B. in Karatzas and Shreve (1988) behandelt.

Der Beweis erfolgt als Übungsaufgabe.

Aufgabe 9. Nutzen Sie $(X_t + Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2 = 2X_t Y_t$, um obigen Satz zu beweisen.

1.4 Ein erster Blick auf das Black-Scholes Modell

Bereits in Beispiel 1.2.5 haben wir die geometrische Brownsche Bewegung kennengelernt. An dieser Stelle betrachten wir diesen Prozess aus einer anderen Perspektive; wir werden diesen Prozess als Lösung einer stochastischen Differentialgleichung sehen.

Dazu suchen wir die Lösung von

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s. \quad (1.17)$$

Hierbei sind $x_0, \mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Üblicherweise schreibt man für obige Gleichung kurz

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x_0. \quad (1.18)$$

Was verstehen wir genau unter einer Lösung von (1.17)? Das ist ein stochastischer Prozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$, für den die Integrale $\int_0^t S_s ds$ und $\int_0^t S_s dW_s$ für jedes $t \in [0, T]$ existieren und der Gleichung (1.17) mit Wahrscheinlichkeit 1 erfüllt.

Zunächst suchen wir eine Idee, wie die Lösung aussehen könnte. Dazu wenden wir eine Transformation, $Y_t = \ln S_t$ an und erhalten mit der Itô-Formel

$$\ln S_t = \ln S_0 + \int_0^t \frac{1}{S_s} dS_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{-1}{S_s^2} \sigma^2 S_s^2 ds,$$

und, wenn man (1.18) einsetzt,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma dB_s.$$

Die Lösung obiger Gleichung ist sozusagen klar, $Y_t = Y_0 + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t$. Deswegen vermuten wir als Lösung von (1.17)

$$S_t = x_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right).$$

Warum diese Vorsicht? Wir waren nicht in allen Schritten präzise. Zunächst ist Y nur definiert unter $S > 0$, und außerdem ist \ln keine $C^2[0, T]$ -Funktion. Aber da wir nun eine Vorstellung von der Lösung haben, können wir diese überprüfen: Sei dazu $S_t = f(t, B_t)$ mit

$$f(t, x) = x_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma x \right).$$

Dann können wir Itô's Formel anwenden und erhalten

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_0^t S_s \sigma dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t S_s \sigma^2 ds,$$

also gerade (1.17).

An dieser Stelle bleibt natürlich noch die Frage nach der Eindeutigkeit? Ist diese Lösung die einzige, oder gibt es noch andere? Mit der Formel der partiellen Integration kann man das zeigen. Sei dazu $x_0 \neq 0$. Wir nehmen an, dass $(X_t)_{t \in [0, T]}$ ebenso eine Lösung von (1.17) ist. Wir wissen bereits, dass $S_t \neq 0$, und untersuchen $X_t S_t^{-1}$. Definiere dazu

$$\begin{aligned} Z_t &:= \frac{S_0}{S_t} = \exp \left(\left(-\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma B_t \right) \\ &= \exp \left(\left((-\mu + \sigma^2) - \frac{\sigma^2}{2} \right) t - \sigma B_t \right). \end{aligned}$$

Demnach ist Z also Lösung von (1.17) mit den Parametern $\mu' = (-\mu + \sigma^2)$ und $\sigma' = -\sigma$. Mit der Formel für die partielle Integration, (1.16), erhalten wir

$$\begin{aligned} d(X_t Z_t) &= X_t dZ_t + Z_t dX_t + d \langle X, Z \rangle_t \\ &= X_t Z_t \left((-\mu + \sigma^2) dt - \sigma dW_t \right) + Z_t X_t \left(\mu dt + \sigma dW_t \right) - X_t Z_t \sigma^2 dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist $X_t Z_t = X_0 Z_0$, also für alle $t \in [0, T]$

$$X_t = \frac{x_0}{Z_t} = S_t, \quad \mathbb{P} - \text{f.s.}$$

Da X und Z stetig sind erhalten wir $\mathbb{P}(X_t = S_t, \forall t \in [0, T]) = 1$. In diesem Abschnitt haben wir die Eindeutigkeit der Lösung zu Fuß gezeigt. Dass man das auch allgemeiner formulieren kann, wird Gegenstand des nächsten Abschnitts sein.

1.5 Das Girsanov-Theorem

Der oft im Hintergrund verbliebene Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wird nun unseren Ausgangspunkt bilden. Wir sind auf der Suche nach einem weiteren Maß Q , welches von \mathbb{P} abgeleitet wird.

Ein Maß Q auf (Ω, \mathcal{A}) heißt absolut stetig bezüglich \mathbb{P} , falls

$$\forall A \in \mathcal{A} : \quad \mathbb{P}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(A) = 0.$$

Mit Hilfe des Radon-Nikodym-Theorems zeigt man folgende Aussage:

Theorem 1.5.1. Q ist absolut stetig bezüglich \mathbb{P} genau dann, wenn eine nicht-negative Zufallsvariable Z existiert, so dass $\forall A \in \mathcal{A}$

$$Q(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Z nennt man auch Dichte von Q bezüglich P und schreibt $Z = \frac{dQ}{dP}$.

Wenn Q und P jeweils absolut stetig bezüglich einander sind, so nennt man sie äquivalent. Hat man nun ein Maß P und ein Maß Q mit der Beziehung $dQ = Z dP$, so fragt man sich zuerst, wie sich Erwartungswerte unter Q berechnen lassen. Die folgende **Bayes-Regel** stellt den fundamentalen Zusammenhang sogar für bedingte Erwartungswerte her.

Theorem 1.5.2. Ist Q absolutstetig bezüglich P , hat also die P -Dichte Z , und definiert man $L_T := \mathbb{E}^P(Z|\mathcal{F}_T)$ bezüglich einer Filtration \mathcal{F} , so gilt für eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsvariable S_T

$$E^Q(S_T L_t | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^P(S_T L_T | \mathcal{F}_t).$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{F}_t$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}^Q(S_T L_t | \mathcal{F}_t) dP &= \int_A \mathbb{E}^Q(S_T | \mathcal{F}_t) \mathbb{E}^P(Z | \mathcal{F}_t) dP \\ &= \int_A \mathbb{E}^Q(S_T | \mathcal{F}_t) Z dP = \int_A \mathbb{E}^Q(S_T | \mathcal{F}_t) dQ \\ &= \int_A S_T dQ \\ &= \int_A S_T Z dP = \int_A S_T \mathbb{E}^P(Z | \mathcal{F}_T) dP \\ &= \int_A \mathbb{E}^P(S_T L_T | \mathcal{F}_t) dP. \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichheit der bedingten Erwartungswerte gezeigt. Die zugrundeliegende Beobachtung ist eigentlich, dass die Ausdrücke gleich $\int_A S_T dQ$ sind. ■

Ist $(L_t)_{t \in [0, T]}$ sogar ein positiver Prozess, so stellt man die Aussage der Bayes-Regel meist dar als

$$E^Q(S_T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^P\left(S_T \frac{L_T}{L_t} | \mathcal{F}_t\right). \quad (1.19)$$

Sind P und Q äquivalent (wir schreiben dann $Q \sim P$), so ist die Dichte Z mit Wahrscheinlichkeit 1 positiv.

Ist $\{\mathcal{F}\}$ die natürliche Filtration einer Brownschen Bewegung $(B)_{t \in [0, T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, so gilt folgende Aussage

Theorem 1.5.3. (Girsanov) Für einen \mathcal{F} -adaptierten Prozess $(\theta)_{t \in [0, T]}$, für den das Integral $\int_0^T \theta_s^2 ds < \infty$ \mathbb{P} -f.s. und der Prozess $(L_t)_{t \in [0, T]}$, definiert durch

$$L_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right) \quad (1.20)$$

ein Martingal (bezgl. \mathbb{P}) ist, definieren wir ein Maß Q durch

$$Q(A) = \int_A L_T d\mathbb{P}.$$

Dann ist der Prozess $(B_t + \int_0^t \theta_s ds)_{t \in [0, T]}$ eine Brownsche Bewegung unter Q .

Bemerkung 1.5.4. Die Bedingung

$$\mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds \right) \right) < \infty$$

ist hinreichend dafür, dass (L) ein Martingal ist. Ist \mathcal{F} die natürliche Filtration der Brownschen Bewegung und sind P und Q äquivalent, so folgt sogar, dass die Dichte zwingend die Gestalt (1.20) haben muss, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Den Beweis werden wir zu einem späteren Zeitpunkt führen.

Aufgabe 10. Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Dann definiert

$$L_T := \exp \left(- \theta B_T - \frac{1}{2} \theta^2 T \right)$$

eine Dichte und wir setzen $dQ := L_T dP$. Zeigen Sie mit der Bayes-Regel, dass für $t > s$ und $\tilde{B}_t := B_t + \theta t$

$$\mathbb{E}^Q \left(\exp(\lambda \tilde{B}_t) \middle| \tilde{B}_s \right) = \exp \left(\lambda(\tilde{B}_s + \frac{1}{2} \lambda^2 (t - s)) \right).$$

Der Prozess \tilde{B} ist also unter Q ein Martingal, ein Gaußprozess und hat die Kovarianzfunktion $s \wedge t$. Damit ist \tilde{B} eine Brownsche Bewegung.

1.6 Repräsentation von Brownschen Martingalen.

Sei wieder \mathcal{F} die natürliche Filtration einer Brownschen Bewegung $(B_t)_{t \in [0, T]}$. Für $f \in \mathcal{H}^2$ ist $(\int_0^t f_s dB_s)_{t \in [0, T]}$ ein quadrat-integrierbares Martingal. Das folgende Theorem zeigt, dass sich alle quadrat-integrierbare Martingale in dieser Form darstellen lassen (natürlich nur, wenn \mathcal{F} die natürliche Filtration von B ist).

Theorem 1.6.1. Sei $(M)_{t \in [0, T]}$ ein quadrat-integrierbares Martingal bezüglich \mathcal{F} . Dann existiert ein adaptierter Prozess $(f_t)_{t \in [0, T]}$, so dass $f \in \mathcal{H}^2$ gilt und $\forall t \in [0, T]$ ist

$$M_t = M_0 + \int_0^t f_s dB_s \quad \mathbb{P} - f.s.$$

Bemerkung 1.6.2. Ist M_t nicht quadrat-integrierbar, so gilt trotzdem obige Darstellung, allerdings mit $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$.

Auch diesen Beweis werden wir zu einem späteren Zeitpunkt führen.

Satz 1.6.3. Sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und Q äquivalent zu P . Weiterhin sei $(B_t)_{t \in [0, T]}$ eine Brownsche Bewegung und \mathcal{A} die von B erzeugte σ -Algebra. Dann hat die Dichte $Z := dQ/dP$ notwendigerweise die Gestalt (1.20).

Beweis. Die Dichte Z ist mit Wahrscheinlichkeit 1 eine positive Zufallsvariable, da sonst die beiden Maße nicht äquivalent wären. Weiterhin ist $L_t := \mathbb{E}^P(Z | \mathcal{F}_t)$ ein Martingal (bezgl. der natürlichen Filtration von B , $\{\mathcal{F}\}$) mit $\mathbb{E}(L_t) = 1$ für alle $t \in [0, T]$. Wir erhalten aus Theorem 1.6.1 die Darstellung

$$L_t = 1 + \int_0^t f_s dB_s$$

mit $f \in \mathcal{H}_{loc}^2$. Setzen wir $\tilde{f}_t := f_t/L_t$, so folgt $L_t = 1 + \int_0^t L_s \tilde{f}_s dB_s$, selbstverständlich mit $(L_t \tilde{f}_t)_{t \in [0, T]} \in \mathcal{H}_{loc}^2$. Weiterhin folgt aus (1.20) mit der Itô-Formel

$$\begin{aligned} dL_t &= L_t \left(-\theta_t dB_t - \frac{1}{2} \theta_t^2 dt \right) + \frac{1}{2} L_t \left(\theta_t^2 dt \right) \\ &= -L_t \theta_t dB_t, \end{aligned}$$

mit $L_0 = 1$. Damit sind ist die Darstellung durch \tilde{f} mit dieser gleichwertig und die Behauptung folgt. ■

1.7 Stochastische Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die stochastische Differentialgleichung

$$X_t = Z + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (1.21)$$

Was verstehen wir unter einer Lösung von (1.21)?

Definition 1.7.1. Sei $\{\mathcal{F}\}$ eine Filtration. Weiterhin seien $\mu, \sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ Funktionen, Z eine \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsvariable und $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung (bezgl. \mathcal{F}). Eine **Lösung** von (1.21) ist ein adaptierter stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, so dass

1. Für alle $t \geq 0$ existieren die Integrale $\int_0^t \mu(s, X_s) ds$ und $\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$ und es gelte

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)| ds < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^t \sigma^2(s, X_s) ds < \infty, \quad \mathbb{P} - \text{f.s.}$$

2. $(X_t)_{t \geq 0}$ erfüllt (1.21), d.h. für alle $t \geq 0$ ist

$$X_t = Z + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s, \quad \mathbb{P} - \text{f.s.}$$

Bemerkung 1.7.2. Üblicherweise kürzt man Gleichung (1.21) wie folgt ab:

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad X_0 = Z.$$

Die Lösung einer Differentialgleichung hängt offensichtlich von der vorgegebenen Filtration $\{\mathcal{F}\}$ und von dem betrachteten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathbb{P}) ab. Deswegen nennt man eine solche Lösung auch **starke Lösung**. Wie wir später noch sehen werden, sind die Bedingungen an μ relativ einschränkend, und man kann dies umgehen, indem man schwache Lösungen betrachtet. Eine ausführliche Diskussion findet man z.B. in Karatzas and Shreve (1988).

In folgendem Theorem werden wir hinreichende Bedingungen an μ und σ kennenlernen, welche die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1.21) garantieren.

Theorem 1.7.3. *Sind μ und σ wie in Definition 1.7.1 und darüberhinaus stetig, und existiert eine Konstante $K < \infty$, so dass*

1. $|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$
2. $|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|)$
3. $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$

dann hat (1.21) für jedes $T \geq 0$ eine eindeutige Lösung in dem Intervall $[0, T]$. Darüberhinaus gilt für diese Lösung $(X_t)_{t \in [0, T]}$, dass

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} X_t^2 \right) < \infty.$$

Die Lösung ist eindeutig in dem Sinn, dass für eine zweite Lösung $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ gerade gilt, dass $\mathbb{P}(X_t = Y_t, \forall t \in [0, T]) = 1$.

Beweis. Ganz analog zum Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen wenden wir den Banachschen Fixpunktsatz an. Dahinter steckt die sogenannte Picard-Lindelöf Iteration, die eine Lösung sogar explizit konstruiert. Wir definieren eine Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ (X_t)_{t \in [0, T]}, \mathcal{F} - \text{adapt. stetige Prozesse mit } \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \right) < \infty \right\}.$$

Mit der Norm $\|X\| = [\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2)]^{1/2}$ ist \mathcal{M} ein vollständiger metrischer Raum. Für die Anwendung des Fixpunktsatzes benötigen wir nun eine kontrahierende Abbildung. Wir definieren die Abbildung A durch

$$A(X)_t = Z + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Für $X \in \mathcal{M}$ garantiert Bedingung 2. dass $A(X)$ wohldefiniert ist. Wir müssen noch zeigen, dass $A(X) \in \mathcal{M}$. Dazu nutzen wir die folgende Lipschitz-Eigenschaft von A , die uns auch für die Kontraktion-Eigenschaft nützlich sein wird. Für zwei Prozesse $X, Y \in \mathcal{M}$ nutzen wir $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ und erhalten

$$|A(X)_t - A(Y)_t|^2 \leq 2 \left(\left| \int_0^t [b(s, X_s) - b(s, Y_s)]^2 ds \right|^2 + \left| \int_0^t [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)] dB_s \right|^2 \right).$$

Wir wenden die Norm auf \mathcal{M} an und nutzen für den zweiten Term die Doobsche Ungleichung (Satz ??) und erhalten

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |A(X)_t - A(Y)_t|^2 \right) \\ & \leq 2 \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t [\mu(s, X_s) - \mu(s, Y_s)]^2 ds \right|^2 \right) + 8 \mathbb{E} \left(\int_0^T [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)]^2 ds \right) \\ & \leq 2(K^2 T^2 + 4K^2 T) \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t - Y_t|^2 \right) \end{aligned}$$

mit Bedingung 1. Demnach ist $\|A(X) - A(Y)\| \leq (2(K^2 T^2 + 4K^2 T))^{1/2} \|X - Y\|$. Will man das für den Schluss $A(X) \in \mathcal{M}$ ausnutzen, muss man auch $\|A(0)\|$ kennen. Mit $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ist

$$|A(0)_t|^2 \leq 3 \left(Z^2 + \left| \int_0^t b(s, 0) ds \right|^2 + \left| \int_0^t \sigma(s, 0) dW_s \right|^2 \right),$$

also folgt, indem wir Bedingung 2. anwenden,

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |A(0)_t|^2 \right) \leq 3 \left(\mathbb{E}(Z^2) + K^2 T^2 + 4K^2 T \right) < \infty.$$

Wir schließen, dass $A : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ eine Abbildung ist, die einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz Konstanten $k(T) := (2(K^2 T^2 + 4K^2 T))^{1/2}$ genügt. Wählen wir T so klein, dass $k(T) < 1$ gilt, so ist die Abbildung A sogar eine Kontraktion, hat also nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt X in \mathcal{M} . Nach der Definition von A ist ein Fixpunkt von A eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung, (1.21). Demnach existiert eine Lösung, falls T ausreichend klein ist. Andererseits ist jede weitere Lösung von (1.21), die in \mathcal{M} liegt, ein Fixpunkt von A . Da es aber genau einen Fixpunkt von A in \mathcal{M} gibt, ist die Lösung also für kleine T eindeutig.

Nun könnte es ja noch sein, dass es eine Lösung gibt, die nicht in \mathcal{M} liegt. Wir zeigen, dass das nicht der Fall ist. Sei dazu X ein Itô-Prozess, das (1.21) löst. Wir werden eine geeignete Lokalisierung verwenden. Dazu setzen wir $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| > n\}$ und definieren $f^n(t) := \mathbb{E}(\sup_{s \in [0,t]} |X_{s \wedge \tau_n}|^2)$. Dann ist f^n beschränkt und stetig. Außerdem gilt wie oben

$$\begin{aligned} f^n(t) &\leq 3 \left(\mathbb{E}(Z^2) + \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \left(\int_0^{s \wedge \tau_n} K(1 + |X_u|) du \right)^2 \right] \right) + 4 \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0,t]} \left(\int_0^{s \wedge \tau_n} K^2(1 + |X_u|)^2 du \right) \right] \\ &\leq 3 \left(\mathbb{E}(Z^2) + 2(K^2 T + 4K^2) \right) \int_0^t \left[1 + \mathbb{E} \left(\sup_{u \in [0,s]} |X_{u \wedge \tau_n}|^2 \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine Integralungleichung für f^n , denn es gilt für positive $a, b \in \mathbb{R}$

$$f^n(t) \leq a + b \int_0^t f^n(s) ds.$$

Das folgende Lemma wird uns eine Schranke liefern, die für alle n gültig ist.

Lemma 1.7.4. (Gronwall) Für $a, b > 0$ und eine stetige Funktion f , für die

$$f(t) \leq a + b \int_0^t f(s) ds$$

für alle $t \in [0, T]$ gilt, folgt

$$f(T) \leq a (1 + e^{bT}).$$

Beweis. Wir schreiben $u(t) = e^{-bt} \int_0^t f(s) ds$. Dann gilt

$$u'(t) = e^{-bt} \left(f(t) - b \int_0^t f(s) ds \right) \leq a e^{-bt}.$$

Integrieren liefert $u(T) \leq a/b$, und einsetzen liefert die Behauptung. \square

Das Gronwall Lemma liefert demnach $f^n(T) \leq C(T) < \infty$, wobei $C(T)$ nur von T und nicht von n abhängt. Mit dem Lemma von Fatou schließen wir, dass für jedes T

$$\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t|^2 \right) < C(T) < \infty.$$

Somit ist X ein Element von \mathcal{M} und wir haben den Beweis für ausreichend kleine T abgeschlossen, sozusagen eine lokale Lösung gefunden. Für eine beliebiges T unterteilen wir das Intervall $[0, T]$ in n Teile, wobei wir n so groß wählen, dass T/n ausreichend klein in obigen Sinne gilt. Sukzessive erhalten wir eine eindeutige Lösung auf jedem Teilintervall, die man zu einer Lösung auf $[0, T]$ zusammensetzt. \blacksquare

1.8 Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess

In diesem Abschnitt werden wir einen vor allem im Zinsbereich äußerst wichtigen Prozess kennenlernen. Wie nicht anders zu vermuten, wird er über eine stochastische Differentialgleichung definiert,

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x.$$

Diese SDE kann man explizit lösen. Allerdings gestattet die obige Darstellung einen tiefen Einblick in das Verhalten des Prozesses. Betrachten wir ein $\kappa \in (0, 1]$. Ist nun X_t unter θ , so tendiert der Prozess nach oben (und zwar um $\kappa(\theta - X_t)$ plus Rauschen). Ist umgekehrt X_t über θ , so tendiert der Prozess nach unten. Er wird sozusagen immer zu θ zurückgezogen. Man nennt diese Eigenschaft treffend "mean reversion". Sie kann natürlich durch das Rauschen (σdB_t) mehr oder weniger deutlich überlagert werden.

Zur Lösung der SDE werden wir zwei Transformationen nutzen. Zunächst verschieben wir den Prozess um θ nach unten, indem wir $Y_t = X_t - \theta$ setzen. Dann gilt

$$dY_t = -\kappa Y_t dt + \sigma dB_t, \quad Y_0 = x - \theta.$$

Als zweite Transformation setzen wir $Z_t = \exp(\kappa t)Y_t$ und erhalten

$$\begin{aligned} dZ_t &= \kappa e^{\kappa t} Y_t dt - e^{\kappa t} \kappa Y_t dt + e^{\kappa t} \sigma dB_t \\ &= e^{\kappa t} \sigma dB_t \end{aligned}$$

mit $Z_0 = x - \theta$. Die Lösung dieser SDE ist

$$Z_t = x - \theta + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dB_s,$$

und wir erhalten

$$X_t = \theta + e^{-\kappa t} (x - \theta) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} dB_s.$$

Nach Satz 1.3.16 ist der letzte Term ein Gaußscher Prozess, insgesamt ist also X ebenso ein Gaußscher Prozess. Gaußsche Prozesse sind durch ihre Erwartungswert- und Kovarianzfunktion eindeutig bestimmt. Setzen wir $G_t := \int_0^t \exp(\kappa s) dB_s$, so hat G für alle t den Erwartungswert 0 und die Kovarianzfunktion

$$\text{Cov}(G_s, G_t) = \int_0^{s \wedge t} e^{2\kappa u} du.$$

Interessanterweise ist das auch die Kovarianzfunktion von

$$B_{\tau(t)} = B_{\int_0^t \exp(2\kappa u) du},$$

also einer Brownschen Bewegung mit **Zeittransformation** $\tau(t) := \int_0^t \exp(2\kappa u) du$. Natürlich ist auch $B(\tau(t))$ ein Gaußprozess, und somit sind beide Prozesse gleich in Verteilung (haben die gleichen fidi's).

Aufgabe 11. Die allgemeine, lineare SDE bezgl. einer Brownschen Bewegung ist

$$dX_t = \left(M(t)X(t) + m(t) \right) dt + \left(S(t)X(t) + s(t) \right) dB_t. \quad (1.22)$$

Zeigen Sie (unter geeigneten Annahmen M, m, S, s), dass mit

$$Z_t := \exp \left[\int_0^t M(u) du + \int_0^t S(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t S(u)^2 du \right]$$

die eindeutige Lösung von (1.22) gerade durch den folgenden Prozess gegeben ist:

$$X_t = Z_t \left[X_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_u} \left(m(u) - S(u)s(u) \right) du + \int_0^t \frac{s(u)}{Z_u} dW_u \right].$$

1.9 Lösungsmethoden für SDEs

Im Verlauf der Vorlesung werden wir noch einigen stochastischen Differentialgleichungen begegnen, es ist also nützlich ein paar Lösungsmethoden zur Hand zu haben.

1.9.1 Koeffizientenvergleich

Natürlich wird die Itô-Formel der Wegweiser zur Lösung sein. Für eine Gleichung wie

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (1.23)$$

nutzen wir den **Ansatz** $X_t = f(t, B_t)$ und erhalten also mit der Itô-Formel

$$dX_t = \frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt. \quad (1.24)$$

Vergleichen wir die dt - und dB_t -Koeffizienten in (1.23) und (1.24) miteinander, so erhalten wir zwei gewöhnliche partielle Differentialgleichungen,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mu f \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f.$$

Die zweite Gleichung können wir leicht lösen und erhalten

$$f(t, x) = \exp \left(\sigma x + g(t) \right)$$

mit einer beliebigen Funktion g . Nutzen wir dies als Ansatz für die linke Differentialgleichung, so erhalten wir

$$g' = \mu - \frac{\sigma^2}{2},$$

und insgesamt also die explizite Lösung der geometrischen Brownschen Bewegung, wie bereits bekannt. Leider wird dieser Ansatz nicht immer zur Lösung führen, da sich nicht alle Lösungen in der Form $X_t = f(t, B_t)$ darstellen lassen. In vorigem Abschnitt haben wir gesehen, dass ein geschickte Transformation auch zum Ziel führen kann. Hat man keine Idee von einer Transformation, so gelangt man vielleicht mit einem geschickten Ansatz zum Ziel, wie in folgender Methode.

1.9.2 Multiplikativer Ansatz

Bei SDEs der Form

$$dX_t = c(t)X_t dt + d(t) dB_t$$

bietet sich ein multiplikativer Ansatz an:

$$X_t = a(t) \left[x_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right].$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} dX_t &= a'(t) \left[x_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right] dt + a(t)b(t) dB_t \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)} X_t dt + a(t)b(t) dB_t. \end{aligned}$$

Man muss also die Gleichungen

$$\frac{a'}{a} = c \quad \text{und} \quad ab = d$$

lösen.

Aufgabe 12. Lösen Sie die SDE

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dB_t, \quad X_0 = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung ein zentrierter Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $s \wedge t - st$.

Bemerkung 1.9.1. Die ist auch die Kovarianzfunktion der **Brownsche Brücke**, definiert durch

$$\tilde{B}_t := B_t - tB_1, \quad t \in [0, 1],$$

ein Prozess, der in der Statistik stochastischer Prozesse eine herausragende Rolle spielt. Wir haben auf diese Weise zwei Darstellungen der Brownschen Brücke erhalten, die unterschiedlicher nicht sein könnten (z.B. ist \tilde{B} nicht adaptiert an die natürliche Filtration von B , der obige Prozess X aber schon).

Literatur

- Bauer, H. (1990). *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Bingham, N. H. and R. Kiesel (1998). *Risk-Neutral Valuation*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.
- Björk, T. (1998). *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.
- Black, F. and M. Scholes (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637–654.
- Cox, J. C., S. A. Ross, and M. Rubinstein (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Econometrics* 7, 229–265.
- Davis, M. H. A. (1997). Option pricing in incomplete markets. In M. A. H. Dempster and S. R. Pliska (Eds.), *Mathematics of derivative securities*, pp. 216 – 226. Cambridge University Press.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility and applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6, 327–343.
- Karatzas, I. and S. E. Shreve (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.
- Merton, R. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell J. of Econ. and Management Science* 4, 141–183.
- Protter, P. (2004). *Stochastic Integration and Differential Equations* (2nd ed.). Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.
- Steele, M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York.