

Skript zur Vorlesung

Vektoranalysis

WS 2010/11

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

1	Mehrdimensionale Integralrechnung	5
1.1	Flächenintegrale	5
1.2	Variablensubstitution in Flächenintegralen	8
1.3	Verallgemeinerung auf den m -dimensionalen Fall	9
1.4	Beweis der Substitutionsregel	11
2	Kurvenintegrale	13
2.1	Wege, Kurven und ihre Längen	13
2.2	Wegintegrale	16
2.3	Wegunabhängigkeit	18
3	Oberflächenintegrale und Integralsätze	21
3.1	Definition der Oberflächenintegrale	21
3.2	Integralsätze	25
3.3	Folgerungen aus den Integralsätzen	30
3.4	Wirbel- und quellfreie Felder	31
3.5	Zum Beweis des Gauß'schen Integralsatzes	35
3.6	Felder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten	35

Kapitel 1

Mehrdimensionale Integralrechnung

1.1 Flächenintegrale

Es seien $B = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f : B \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion. Wie groß ist das Volumen unter dem Graphen der Funktion f , d.h. das Volumen V des Körpers $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in B, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$?

Erste Antwort: Der Flächeninhalt einer Schnittfläche durch K parallel zur xz -Ebene ist gleich

$\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, so dass das gesuchte Volumen gleich

$$V = \int_c^d \alpha(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Analog würde man durch Vertauschen der Rollen von x und y die Formel

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

erhalten.

Beispiel 1.1 Für $B = [3, 4] \times [1, 2]$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (2x + y)^{-2}$ liefern obige Formeln $V = \frac{1}{2} \ln \frac{36}{35}$.

Zweite Antwort: Zwei Zerlegungen $Z_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}[a, b]$ und $Z_2 = \{y_0, y_1, y_m\} \in \mathcal{Z}[c, d]$ erzeugen eine Zerlegung von B in Teilrechtecke $B_{jk} = [x_{j-1}, x_j] \times [y_{k-1}, y_k]$. Wir definieren $m_{jk} = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in B_{jk}\}$ und $M_{jk} = \sup \{f(x, y) : (x, y) \in B_{jk}\}$. Dann gilt bestimmt

$$S_{u,B}(f; Z_1 \times Z_2) := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m m_{jk} \Delta_{jk} \leq V \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m M_{jk} \Delta_{jk} =: S_{o,B}(f; Z_1 \times Z_2),$$

wobei $\Delta_{jk} = (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) =: |B_{jk}|$ den Flächeninhalt des Teilrechtecks B_{jk} bezeichnet. Wir setzen nun

$$J_u(f) = \sup \{S_{u,B}(f; Z_1 \times Z_2) : Z_1 \in \mathcal{Z}[a, b], Z_2 \in \mathcal{Z}[c, d]\}$$

und

$$J_o(f) = \inf \{S_{o,B}(f; Z_1 \times Z_2) : Z_1 \in \mathcal{Z}[a, b], Z_2 \in \mathcal{Z}[c, d]\}$$

Definition 1.2 Es seien $B = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Man nennt f auf B **Riemann-integrierbar**, falls $J_u(f) = J_o(f)$ gilt, und bezeichnet diese Zahl mit

$$\iint_B f(x, y) d(x, y).$$

Es ergibt sich nun die Frage, ob erste und zweite Antwort auf das gleiche Resultat führen. Der folgende Satz gibt eine Antwort.

Satz 1.3 (Fubini) *Es sei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Rechteck $B = [a, b] \times [c, d]$ Riemann-integrierbar. Existieren die Integrale*

$$\alpha(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{und} \quad \beta(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad \forall y \in [c, d],$$

so gilt

$$\int_c^d \beta(y) dy = \int_a^b \alpha(x) dx = \iint_B f(x, y) d(x, y).$$

Definition 1.4 *Es seien $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Ferner seien $B^0 = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck mit $B \subset B^0$ sowie*

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & : (x, y) \in B, \\ 0 & : (x, y) \in B^0 \setminus B. \end{cases}$$

*Wir sagen, dass f auf B **Riemann-integrierbar** ist, falls \tilde{f} auf B^0 Riemann-integrierbar ist, und setzen in diesem Fall*

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) := \iint_{B^0} \tilde{f}(x, y) d(x, y).$$

Diese Definition ist korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl des Rechtecks B^0 .

Bemerkung 1.5 *Unter den Voraussetzungen der Definition 1.2 ist f genau dann Riemann-integrierbar auf B , wenn eine Zahl J existiert, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z_1 \times Z_2$ des Rechtecks B gibt mit*

$$\left| J - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(\xi_j, \eta_k) |B_{jk}| \right| < \varepsilon \quad \forall (\xi_j, \eta_k) \in B_{jk}.$$

Mit $\chi_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir die **Indikatorfunktion** der Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, d.h.

$$\chi_B(x, y) = \begin{cases} 1 & : (x, y) \in B, \\ 0 & : (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Definition 1.6 *Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt **Jordan-messbar**, wenn die Indikatorfunktion χ_B auf B Riemann-integrierbar ist. Man nennt dann*

$$|B| = \iint_B \chi_B(x, y) d(x, y)$$

das **Jordan-Maß** von B . Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ mit $|B| = 0$ wird **Menge vom (Jordan-)Maß Null** oder kurz **Nullmenge** genannt.

Man sieht schnell ein, dass aus $|B_1| = |B_2| = 0$ folgt $|B_1 \cup B_2| = 0$.

Satz 1.7 *Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand*

$$\partial B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : U_\varepsilon((x, y)) \cap B \neq \emptyset \text{ und } U_\varepsilon((x, y)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0\}$$

eine Menge vom Maß Null ist.

Man beachte, dass für eine abgeschlossene Menge B gilt

$$\partial B = \{(x, y) \in B : U_\varepsilon((x, y)) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) \neq \emptyset \forall \varepsilon > 0\}.$$

Sind $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \forall x \in [a, b]$, so nennen wir $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ einen **Normalbereich**. Der Graph $G_f = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Menge vom Maß Null.

Folgerung 1.8 Jeder Normalbereich ist Jordan-messbar.

Satz 1.9 Sind $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $B \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar, so ist f auf B Riemann-integrierbar.

Folgerung 1.10 Sind $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

ein Normalbereich, so gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy dx.$$

Beispiel 1.11 Für $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y$ erhalten wir

$$\iint_B (x^2 + y) d(x, y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy dx = \frac{33}{140}.$$

Beispiel 1.12 Wir berechnen das Volumen V eines Ellipsoids mit den Halbachsen $a, b, c \in (0, \infty)$, d.h. des Körpers

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

Wir erhalten

$$V = 8c \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dy dx = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Bemerkung 1.13 Sind $f \in \mathbb{R}[a, b]$ und $g \in \mathbb{R}[c, d]$, so ist die Funktion $f(x)g(y)$ auf $B := [a, b] \times [c, d]$ Riemann-integrierbar, wobei

$$\iint_B f(x)g(y) d(x, y) = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy.$$

Folgendes ist leicht zu beweisen (vgl. auch Satz 5.36, Analysis I/II).

Bemerkung 1.14 Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge.

(a) Sind f und g auf B Riemann-integrierbar, so auch $f + g$ und γf für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$, wobei

$$\iint_B [f(x, y) + g(x, y)] d(x, y) = \iint_B f(x, y) d(x, y) + \iint_B g(x, y) d(x, y)$$

und

$$\iint_B \gamma f(x, y) d(x, y) = \gamma \iint_B f(x, y) d(x, y)$$

gilt.

(b) Ist $|B| = 0$, so gilt $\iint_B f(x, y) d(x, y) = 0$ für jede beschränkte Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$.

(c) Sind f und g auf B Riemann-integrierbar und $f(x, y) \leq g(x, y)$ für alle $(x, y) \in B$ mit evtl. Ausnahme einer Menge vom Maß Null, so gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) \leq \iint_B g(x, y) d(x, y).$$

(d) Sind f und g auf B Riemann-integrierbar, so auch $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ und fg . Dabei gilt

$$\left| \iint_B f(x, y) d(x, y) \right| \leq \iint_B |f(x, y)| d(x, y).$$

(e) Sind $f : B \rightarrow [a, b]$ auf B Riemann-integrierbar und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $g \circ f : B \rightarrow \mathbb{R}$ auf B Riemann-integrierbar.

(f) Sind f auf B^1 und B^2 Riemann-integrierbar sowie $|B^1 \cap B^2| = 0$, so ist f auf $B^1 \cup B^2$ Riemann-integrierbar, wobei

$$\iint_{B^1 \cup B^2} f(x, y) d(x, y) = \iint_{B^1} f(x, y) d(x, y) + \iint_{B^2} f(x, y) d(x, y).$$

Bemerkung 1.15 (Mittelwertsatz) Sind $B \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar, $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $m \leq f(x, y) \leq M$ für alle $(x, y) \in B$, so gilt

$$m|B| \leq \iint_B f(x, y) d(x, y) \leq M|B|.$$

1.2 Variablensubstitution in Flächenintegralen

Es sei $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto g(u, v) = \begin{bmatrix} g^1(u, v) \\ g^2(u, v) \end{bmatrix}$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sind $R = [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subset \Omega$ ein "kleines" Rechteck und $\tilde{R} = g(R)$ dessen Bild bezüglich der Abbildung g , also i. Allg. ein "krummlinig berandetes Parallelogramm", so gilt

$$|\tilde{R}| \approx \left| \det \begin{bmatrix} g_u^1(u_1, v_1) & g_v^1(u_1, v_1) \\ g_u^2(u_1, v_1) & g_v^2(u_1, v_1) \end{bmatrix} \right| \cdot |R|.$$

Satz 1.16 Die Abbildung $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ injektiv und stetig differenzierbar mit $\det g'(u, v) \neq 0$ für alle $(u, v) \in \Omega$. Sind $\tilde{B} \subset \Omega$ kompakt und Jordan-messbar sowie $f : g(\tilde{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind $B = g(\tilde{B})$ Jordan-messbar und

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \iint_{\tilde{B}} f(g(u, v)) |\det g'(u, v)| d(u, v).$$

$J(u, v) := \det g'(u, v)$ nennt man auch die **Funktionaldeterminante** der Transformation g .

Beispiel 1.17 (Polarkoordinaten) Wir betrachten $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Auf $\Omega = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ sind die Voraussetzungen von Satz 1.16 erfüllt, denn dort gilt

$$\det g'(r, \varphi) = \det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix} = r.$$

Durch geeignete Grenzübergänge kann man aber zeigen, dass z.B. für den Kreis

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r_0^2\}, \quad r_0 > 0,$$

und eine stetige Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \iint_R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$$

mit $R = [0, r_0] \times [0, 2\pi]$.

Beispiel 1.18 (verallgemeinerte Polarkoordinaten) Wir berechnen den Flächeninhalt A der Ellipse

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad a > 0, b > 0,$$

und verwenden dazu die Substitution

$$g(r, \varphi) = (ar \cos \varphi, br \sin \varphi), \quad (r, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Es folgt $J(r, \varphi) = abr$ und $A = \pi ab$.

Beispiel 1.19 Wir berechnen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

unter Verwendung von

$$\left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \cdot \int_{-R}^R e^{-y^2} dy = \iint_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y), \quad Q_R = [-R, R]^2,$$

und erhalten $I = \sqrt{\pi}$.

Beispiel 1.20 Wir berechnen den Flächeninhalt der Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, die von den Kurven $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < p < q$) und $x^2 = ay$, $x^2 = by$ ($0 < a < b$) berandet wird. Unter Verwendung der Substitution

$$y^2 = ux, \quad x^2 = vy, \quad p \leq u \leq q, \quad a \leq v \leq b,$$

d.h. $x = (uv^2)^{\frac{1}{3}}$ und $y = (u^2v)^{\frac{1}{3}}$, erhalten wir $J(u, v) = -\frac{1}{3}$ und $|B| = \frac{(b-a)(q-p)}{3}$.

1.3 Verallgemeinerung auf den m -dimensionalen Fall

Sämtliche Begriffe aus Abschnitt 1.1 lassen sich problemlos auf Funktionen $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ über kompakten Bereichen $B \subset \mathbb{R}^m$ übertragen, indem man zuerst das Riemann-Integral über einem m -dimensionalen Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ definiert und dann zu kompakten Bereichen $B \subset \mathbb{R}^m$ übergeht. Der Satz von Fubini kann induktiv verallgemeinert werden. Bem. 1.5, Satz 1.7, Satz 1.9, Bem. 1.13–1.15 und Satz 1.16 gelten analog.

Beispiel 1.21 (Zylinder- und Kugelkoordinaten) Für die Substitution

$$g(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$$

gilt $\det g'(r, \varphi, z) = r$, $(r, \varphi, z) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ (Zylinderkoordinaten). Für

$$g(r, \varphi, \vartheta) = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta)$$

erhalten wir $\det g'(r, \varphi, \vartheta) = r^2 \cos \vartheta$, $(r, \varphi, \vartheta) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (Kugelkoordinaten). Das Volumen der Kugel $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, $R > 0$, ergibt sich damit zu

$$\iiint_B d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^2 \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Beispiel 1.22 (verallgemeinerte Kugelkoordinaten) Wir berechnen das Volumen des Ellipsoiden E mit den Halbachsen a, b, c (vgl. Bsp. 1.12) unter Verwendung der Transformation

$$g(r, \varphi, \vartheta) = (ar \cos \vartheta \cos \varphi, br \cos \vartheta \sin \varphi, cr \sin \vartheta), \quad (r, \varphi, \vartheta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Wir erhalten $J(r, \varphi, \vartheta) = abc r^2 \cos \vartheta$ und das Volumen

$$\iiint_E d(x, y, z) = abc \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cos \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Beispiel 1.23 Wir nehmen an, dass sich der Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ unter Verwendung der Polarkoordinaten in der Form

$$B = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) : 0 \leq r \leq \rho(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$

mit einer stetigen Funktion $\rho : [\varphi_1, \varphi_2] \rightarrow [0, \infty)$ schreiben lässt. Es folgt

$$|B| = \iint_B d(x, y) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_0^{\rho(\varphi)} r \, dr \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [\rho(\varphi)]^2 \, d\varphi.$$

Bemerkung zu verallgemeinerten Riemannschen Integralsummen:

Es seien $Z = \{B_1, \dots, B_N\}$ eine (verallg.) Zerlegung des messbaren Kompaktums $B \subset \mathbb{R}^m$ in zusammenhängende messbare Kompakta B_j , so dass $|B_j \cap B_k| = 0$ für $j \neq k$, und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Mit $d(Z) = \max \{d(B_j) : j = 1, \dots, N\}$ bezeichnen wir den **Durchmesser** der Zerlegung Z , wobei $d(B_j) = \sup \{|x' - x''| : x', x'' \in B_j\}$. Wir betrachten Summen der Gestalt

$$\sum_{j=1}^N f(x^j) |B_j|, \quad x^j \in B_j.$$

Gibt man sich nun ein $\varepsilon > 0$ vor und wählt den Durchmesser der Zerlegung so klein, dass

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{|B| + 1} \quad \forall x', x'' \in B_j, j = 1, \dots, N$$

gilt (gleichmäßige Stetigkeit von f auf B !), so folgt aus Bem. 1.15

$$\int_{B_j} f(x) \, dx = f(\xi^j) |B_j|$$

für ein $\xi^j \in B_j$ und unter Verwendung von Bem. 1.14(f)

$$\left| \int_B f(x) \, dx - \sum_{j=1}^N f(x^j) |B_j| \right| = \left| \sum_{j=1}^N [f(\xi^j) - f(x^j)] |B_j| \right| \leq \frac{\varepsilon}{|B| + 1} |B| < \varepsilon.$$

Also: Haben wir eine Folge verallgemeinerter Zerlegungen von B und eine beliebige zugehörige Folge verallgemeinerter Riemannscher Integralsummen, wobei die Durchmesser der Zerlegungsfolge gegen Null konvergieren, so konvergiert die Folge der verallgemeinerten Riemannschen Integralsummen gegen das Integral der stetigen Funktion f .

1.4 Beweis der Substitutionsregel

Wir erinnern an den Satz über die Umkehrabbildung (vgl. Satz 6.26, Skript Analysis I/II):

Sind $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $x^0 \in \Omega$, $\det f'(x^0) \neq 0$ und $y^0 = f(x^0)$, so existieren offene Mengen $U \subset \Omega$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ mit $x^0 \in U$ und $y^0 \in V$, so dass $f : U \rightarrow V$ bijektiv und $f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar sind. Dabei gilt

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1} \quad \forall y \in V.$$

Die Verallgemeinerung von Satz 1.16 auf den m -dimensionalen Fall lautet:

Die Abbildung $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ injektiv und stetig differenzierbar mit $\det g'(u) \neq 0$ für alle $u \in \Omega$. Sind $\tilde{B} \subset \Omega$ kompakt und Jordan-messbar sowie $f : g(\tilde{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind $B = g(\tilde{B})$ Jordan-messbar und

$$\int_B f(x) dx = \int_{\tilde{B}} f(g(u)) |\det g'(u)| du.$$

Zum Beweis dieser Substitutionsregel verwenden wir wesentlich die folgenden Sätze 1.24–1.27.

Satz 1.24 (Zerlegungssatz) Es seien $m = 2, 3, \dots$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge,

$$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad u \mapsto (g_1(u), \dots, g_m(u))$$

stetig differenzierbar und $\det g'(u) \neq 0$ für alle $u \in \Omega$. Dann existieren für jedes $u^0 \in \Omega$ eine offene Umgebung $W \subset \Omega$ von u^0 und Funktionen

$$\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \omega : \psi(W) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Das Bild $\psi(W)$ ist offen
- (b) Die Funktionen ψ und ω sind injektiv und stetig differenzierbar.
- (c) Bei geeigneter Numerierung der u_1, \dots, u_m gilt

$$\psi(u) = (\psi_1(u), \dots, \psi_{m-1}(u), u_m) \quad \forall u \in W$$

und

$$\omega(v) = (v_1, \dots, v_{m-1}, \omega_m(v)) \quad \forall v \in \psi(W).$$

- (d) Es gilt $g(u) = \omega(\psi(u))$ für alle $u \in W$.

Satz 1.25 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge und $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar, $m \leq p$. Ist $N \subset \Omega$ eine kompakte Menge vom Jordan-Maß Null, so ist auch $g(N)$ eine solche Menge.

Satz 1.26 Sind $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen (M_j, d_j) , $j = 1, 2$, und $K \subset M_1$ eine kompakte Menge, so ist auch $f(K)$ kompakt.

Satz 1.27 Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv und stetig differenzierbar sowie $g'(x) \in \mathcal{G}\mathbb{R}^{m \times m}$ für alle $x \in \Omega$. Ist $B \subset \Omega$ kompakt und Jordan-messbar, so gilt $\partial g(B) = g(\partial B)$, und $g(B)$ ist Jordan-messbar.

Folgerung 1.28 *Unter den Voraussetzungen des Satzes zur Substitutionsregel ist $B = g(\tilde{B})$ kompakt und Jordan-messbar, so dass wegen der Stetigkeit von f und g sowie g' nach Satz 1.9 die Integrale*

$$\int_B f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{\tilde{B}} f(g(u)) |\det g'(u)| du$$

existieren.

Kapitel 2

Kurvenintegrale

2.1 Wege, Kurven und ihre Längen

Unter einem **Weg** γ in \mathbb{R}^m verstehen wir eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Die von diesem Weg erzeugte **Kurve** $\Gamma = \Gamma_\gamma$ ist das Bild dieser Abbildung,

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}.$$

Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)) = [\gamma_1(t) \quad \dots \quad \gamma_m(t)]^T = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_m(t) \end{bmatrix} = [\gamma_j(t)]_{j=1}^m.$$

Ist $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathbb{Z}[a, b]$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, so bezeichnen wir mit $L(\gamma, Z)$ die Länge des Polygonzuges $[\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)]$, d.h.

$$L(\gamma, Z) = \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Man nennt nun den Weg γ **rektifizierbar**, wenn

$$L(\gamma) := \sup \{L(\gamma, Z) : Z \in \mathbb{Z}[a, b]\}$$

eine endliche Zahl ist, die dann die **Länge** des Weges γ ist.

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von **beschränkter Variation**, wenn

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})| : Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathbb{Z}[a, b] \right\} < \infty$$

gilt. Man kann sich nun leicht überlegen, dass der Weg $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann rektifizierbar ist, wenn jede Funktion $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, von beschränkter Variation ist.

Beispiel 2.1 *Die stetige Funktion*

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t \sin \frac{\pi}{2t} & : 0 < t \leq 1, \\ 0 & : t = 0, \end{cases}$$

ist nicht von beschränkter Variation, so dass der Weg

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$$

nicht rektifizierbar ist.

Sind $\gamma^1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $\gamma^2 : [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ zwei Wege mit $\gamma^1(b) = \gamma^2(b)$, so verstehen wir unter der **Summe** $\gamma = \gamma^1 \oplus \gamma^2$ den Weg

$$\gamma : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma^1(t) & : a \leq t \leq b, \\ \gamma^2(t) & : b < t \leq c. \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, dass γ genau dann rektifizierbar ist, wenn γ^1 und γ^2 rektifizierbar sind, wobei $L(\gamma) = L(\gamma^1) + L(\gamma^2)$ gilt.

Sei $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg. Für $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ bezeichnen wir mit $s(t_1, t_2)$ die Länge des Weges $\gamma|_{[t_1, t_2]}$. Insbesondere sei $s(t) = s(a, t)$, $a \leq t \leq b$, die sogenannte **Weglängenfunktion**. Man nennt $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ einen **Jordanweg**, wenn $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ injektiv ist. Eine Kurve Γ heißt **Jordankurve**, wenn sie von einem Jordanweg erzeugt wird.

Satz 2.2 *Es seien Γ eine Jordankurve und $\gamma^j : [a_j, b_j] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2$, zwei Γ erzeugende Jordanwege mit $\gamma^1(a_1) = \gamma^2(a_2)$. Dann existiert eine stetige Bijektion $\varphi : [a_2, b_2] \longrightarrow [a_1, b_1]$, so dass*

$$\gamma^2(t) = \gamma^1(\varphi(t)), \quad t \in [a_2, b_2],$$

d.h. $\gamma^2 = \gamma^1 \circ \varphi$, gilt. Umgekehrt ist $\gamma^2 = \gamma^1 \circ \varphi : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Jordanweg, wenn $\gamma^1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Jordanweg und $\varphi : [a_2, b_2] \longrightarrow [a_1, b_1]$ eine stetige Bijektion sind.

Satz 2.3 *Es seien $\gamma^1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg, $\varphi : [a_2, b_2] \longrightarrow [a_1, b_1]$ eine stetige Bijektion und $\gamma^2 = \gamma^1 \circ \varphi$. Dann sind γ^1 und γ^2 gleichzeitig rektifizierbar oder nicht rektifizierbar, wobei $L(\gamma^1) = L(\gamma^2)$ gilt.*

Die Sätze 2.2 und 2.3 erlauben die folgende Definition der Länge einer Jordankurve: Ist γ ein die Kurve Γ erzeugender Jordanweg, so ist die **Länge** von Γ gleich $L(\gamma)$.

Satz 2.4 *Ist $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein stetig differenzierbarer Weg, so gilt $s'(t) = |\gamma'(t)|$, $t \in [a, b]$, und somit*

$$L(\gamma) = s(a, b) = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t) dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir den folgenden Satz. Für $f = (f_1, \dots, f_m) : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit Riemann-integrierbaren Funktionen $f_j : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, vereinbaren wir die Bezeichnung

$$\int_a^b f(t) dt = \left[\int_a^b f_j(t) dt \right]_{j=1}^m.$$

Satz 2.5 *Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

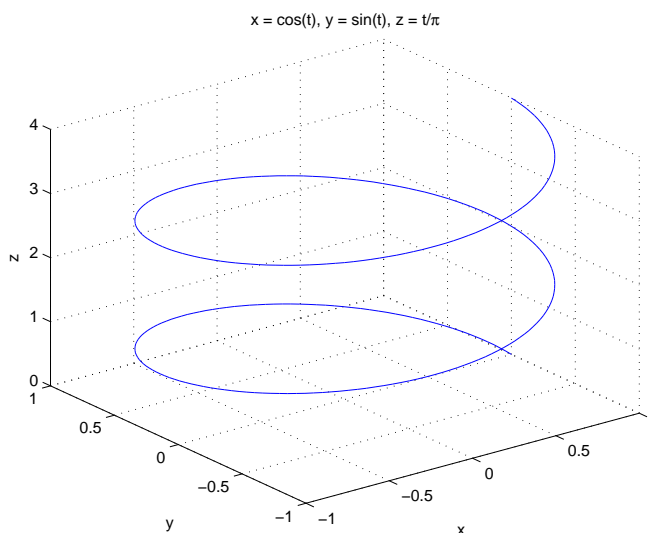
Beispiel 2.6 *Wir berechnen den Umfang eines Kreises mit dem Radius r ,*

$$\{(r \cos t, r \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

Beispiel 2.7 Die Länge einer Voldrehung der Schraubenlinie mit dem Radius r und der Ganghöhe h ,

$$\left\{ \left(r \cos t, r \sin t, \frac{ht}{2\pi} \right) : 0 \leq t \leq 2\pi \right\}$$

ist gleich $\sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}$.



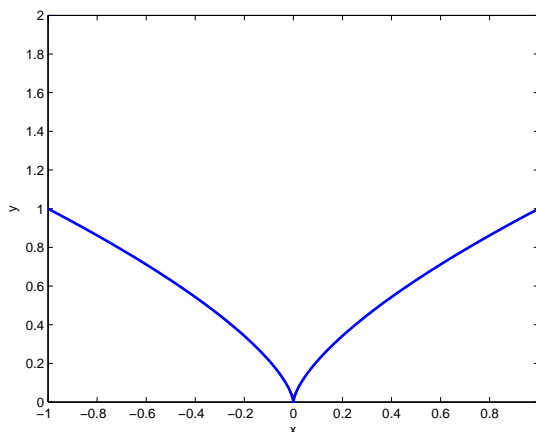
Zwei Voldrehungen der Schraubenlinie mit dem Radius 1 und der Ganghöhe 2

Beispiel 2.8 Die Länge der Kurve, die durch den Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben wird, ist gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

Man nennt einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ **glatt**, wenn er stetig differenzierbar ist und $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in [a, b]$ gilt.

Beispiel 2.9 Der Weg $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \end{bmatrix}$ ist ein Beispiel für einen stetig differenzierbaren, aber nicht glatten Weg. Die zugehörige Kurve nennt man **Neil'sche Parabel**.



Die Neil'sche Parabel

Sind nun γ ein glatter Jordanweg und $\Gamma = \Gamma_\gamma$, so ist die Bogenlänge $s(t) = s(a, t)$ gegeben durch $s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$ und monoton wachsend auf $[a, b]$. Es sei $\varphi : [0, L] \rightarrow [a, b]$ die (differenzierbare) Umkehrfunktion von $s : [a, b] \rightarrow [0, L]$, $L = L(\gamma) = L(\Gamma)$. Dann ist (vgl. Satz 2.2) $\delta(s) = \gamma(\varphi(s))$, $s \in [0, L]$, ebenfalls ein glatter Jordanweg mit $\Gamma = \Gamma_\delta$, die **Parametrisierung der Jordankurve Γ nach der Bogenlänge**. Dabei gilt

$$\delta'(s) = \gamma'(\varphi(s))\varphi'(s) \quad \text{und} \quad \varphi'(s) = \frac{1}{s'(\varphi(s))} = \frac{1}{|\gamma'(\varphi(s))|},$$

also $|\delta'(s)| = 1$, $s \in [0, L]$.

2.2 Wegintegrale

Sind $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein rektifizierbarer Weg, $\Gamma = \Gamma_\gamma$ und $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist $s(t) = s(a, t)$ auf $[a, b]$ monoton nicht fallend, und somit existiert (vgl. Satz 5.38, Analysis I/II) das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b \varphi(\gamma(t)) ds(t),$$

welches wir mit

$$\int_\gamma \varphi(x) ds \quad \text{oder kurz} \quad \int_\gamma \varphi ds$$

bezeichnen und **Wegintegral 1. Art** der Funktion φ entlang des Weges γ nennen. Ist γ stetig differenzierbar, so gilt also (vgl. Satz 5.42, Analysis I/II)

$$\int_\gamma \varphi ds = \int_a^b \varphi(\gamma(t))s'(t) dt = \int_a^b \varphi(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Beispiel 2.10 Ist $\Gamma = \Gamma_\gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine mit Masse belegte Jordankurve mit der Dichtefunktion $\rho(x)$, $x \in \Gamma$, und dem rektifizierbaren Jordanweg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, so ist die Masse m der Kurve Γ gleich

$$m = \int_\gamma \rho ds.$$

Ist $\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion beschränkter Variation, so ist die Funktion

$$\mu_1(t) = V_a^t(\mu) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})| : \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{Z}[a, t] \right\}$$

monoton nicht fallend auf $[a, b]$. Für die Funktion $\mu_2(t) = \mu_1(t) - \mu(t)$ und $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ gilt dann

$$\mu_2(t_2) - \mu_2(t_1) = V_{t_1}^{t_2}(\mu) - [\mu(t_2) - \mu(t_1)] \geq V_{t_1}^{t_2}(\mu) - |\mu(t_2) - \mu(t_1)| \geq 0.$$

Also ist $\mu(t) = \mu_1(t) - \mu_2(t)$ die Differenz zweier monoton nicht fallender Funktionen. Somit lässt sich die Definition des Riemann-Stieltjes-Integrals (vgl. Def. 5.33, Analysis I/II) leicht auf Belegungsfunktionen μ beschränkter Variation ausdehnen, z.B. durch $\mu = \mu_1 - \mu_2$ und

$$\int_a^b \varphi d\mu := \int_a^b \varphi d\mu_1 - \int_a^b \varphi d\mu_2.$$

Dabei ist das so definierte Integral unabhängig von der Darstellung $\mu = \mu_1 - \mu_2 = \tilde{\mu}_1 - \tilde{\mu}_2$ der Belegungsfunktion als Differenz zweier monoton nicht fallender Funktionen.

Seien nun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ wieder ein rektifizierbarer Weg und $f = (f_1, \dots, f_m) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion. Dann sind die Funktionen $\gamma_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, sämtlich von beschränkter Variation und somit die Integrale

$$\int_a^b f_j d\gamma_j$$

wohldefiniert. Das **Wegintegral 2. Art** des Vektorfeldes f entlang des Weges γ ist definiert als

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_a^b f_j d\gamma_j.$$

Im Fall eines stetig differenzierbaren Weges γ gilt also

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_a^b f_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Beispiel 2.11 Wird ein Massepunkt entlang des rektifizierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch die Kraft $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) : \Gamma_{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$ bewegt, so ist die dabei geleistete Arbeit gleich

$$W = \int_{\gamma} F(x) dx = \sum_{j=1}^3 \int_a^b F_j(\gamma(t)) d\gamma_j(t).$$

Bemerkung 2.12 Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Weg, so bezeichnen wir mit $\gamma^- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \gamma(a + b - t)$ den entgegengesetzten Weg. Es gilt dann für $\varphi : \Gamma_{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\gamma^-} \varphi(x) ds = \int_{\gamma} \varphi(x) ds$$

und für $f : \Gamma_{\gamma} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\int_{\gamma^-} f(x) dx = - \int_{\gamma} f(x) dx.$$

Beispiel 2.13 Sind $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\Theta\}$ ein stetig differenzierbarer Weg und $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\theta\}$, $x \mapsto -\frac{x}{|x|^3}$, so gilt $f(x) = \nabla \varphi(x)$ mit $\varphi(x) = \frac{1}{|x|}$. Es folgt

$$\int_{\gamma} f(x) dx = \int_a^b \varphi'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Der Wert des Integrals hängt also nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges γ ab.

Beispiel 2.14 Für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$, $R > 0$, und $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\Theta\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\right)$ erhalten wir

$$\int_{\gamma} f(x) dx = R^{-2} \int_0^{2\pi} [(-R \sin t)(-R \sin t) + R \cos t R \cos t] dt = 2\pi.$$

2.3 Wegunabhängigkeit

Unter einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ verstehen wir eine offene und zusammenhängende Menge. Zu folgendem Satz vergleiche man Beispiel 2.13.

Satz 2.15 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein Gebiet, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld und $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann gilt*

$$\int_{\gamma} \nabla \varphi(x) dx = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Wir nennen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein **Vektorfeld mit wegunabhängigem Integral** über dem Gebiet Ω , wenn für beliebige, fest gewählte Punkte $A, B \in \Omega$ und einen beliebigen stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(a) = A$ und $\gamma(b) = B$ das Integral $\int_{\gamma} f(x) dx$ den gleichen Wert annimmt, also lediglich eine Funktion von A und B , aber nicht von γ ist. Unter Beachtung von Bemerkung 2.12 ist leicht einzusehen, dass das Integral $\int_{\gamma} f(x) dx$ genau dann vom Weg unabhängig ist, wenn $\int_{\gamma} f(x) dx = 0$ für jeden geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ gilt.

Satz 2.16 *Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein stetiges Vektorfeld mit wegunabhängigem Integral über dem Gebiet Ω , so existiert ein Skalarfeld $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla \varphi(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$.*

Die letzten beiden Sätze besagen also, dass ein stetiges Vektorfeld $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ genau dann ein Vektorfeld mit wegunabhängigem Integral über dem Gebiet Ω ist, wenn es ein **Gradientenfeld** ist. Sind $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f(x) = \nabla \varphi(x)$, $x \in \Omega$, so folgt (vgl. Satz 6.18, Analysis I/II)

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Die Matrix $f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ist in diesem Fall also symmetrisch. Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ heißt **sternförmig**, wenn ein $A \in \Omega$ existiert, so dass die Strecke

$$[A, x] := \{A + t(x - A) : 0 \leq t \leq 1\}$$

für jedes $x \in \Omega$ ganz in Ω liegt.

Satz 2.17 *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einer sternförmigen offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn*

$$\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall j, k = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

gilt.

Zum Beweis dieses Satzes verwenden wir die folgende Aussage.

Satz 2.18 *Die Funktion $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ sei nebst ihrer partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x} : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist*

$$F : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} dt, \quad x \in (c, d).$$

Unter einer **Deformation** eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\delta : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(t, \sigma) \mapsto \delta(t, \sigma)$, für die $\delta(t, 0) = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$, gilt und für die $\delta_\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $t \mapsto \delta(t, \sigma)$ für jedes $\sigma \in [0, 1]$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg ist. Ein geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ heißt in $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ auf einen Punkt zusammenziehbar, wenn eine Deformation $\delta : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ von γ existiert, so dass $\delta(a, \sigma) = \delta(b, \sigma)$ für alle $\sigma \in [0, 1]$ gilt und $\delta(t, 1)$ konstant ist.

Beispiel 2.19 Die Abbildung $\eta : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(t, \sigma) \mapsto (a(1 - \sigma) \cos t, b(1 - \sigma) \sin t)$ ist eine Deformation, die die Ellipse mit den Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ auf den Koordinatenursprung zusammenzieht. Auch

$$\delta : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (t, \sigma) \mapsto \left(\frac{2a}{5} \left(2 - \sigma + \frac{1}{2 - \sigma} \right) \cos t, \frac{2b}{3} \left(2 - \sigma - \frac{1}{2 - \sigma} \right) \sin t \right)$$

ist eine Deformation dieser Ellipse, wobei hier $\delta_1(t) = (\frac{4a \cos t}{5}, 0)$ gilt, d.h., Γ_{δ_1} ist gleich dem Intervall $[-\frac{4a}{5}, \frac{4a}{5}]$ und das offene Intervall $(-\frac{4a}{5}, \frac{4a}{5})$ wird dabei zweimal durchlaufen.

Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ nennen wir **einfach zusammenhängend**, wenn jeder geschlossene, stückweise glatte Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ in Ω auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Satz 2.17 lässt sich nun wie folgt verallgemeinern.

Satz 2.20 Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn die **Integrabilitätsbedingung** (2.1) erfüllt ist.

Beispiel 2.21 Für das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 x_2^4 + 2x_1^5, 2x_1^2 x_2^3 - x_2^6)$ ist die Integrabilitätsbedingung (2.1) erfüllt. Wir erhalten $f = \nabla \varphi$ mit

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2^4}{2} + \frac{x_1^6}{3} - \frac{x_2^7}{7} + c$$

mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ ein Normalbereich mit stetigen Funktionen $\varphi_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkter Variation. Der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ von Ω setzt sich aus den Kurven Γ_{γ_1} , $\Gamma_{\tilde{\gamma}_1}$, $\Gamma_{\gamma_2^-}$ und $\Gamma_{\tilde{\gamma}_2^-}$ zusammen, wobei $\gamma_k(t) = (t, \varphi_k(t))$, $a \leq t \leq b$, $\tilde{\gamma}_1(t) = (b, t)$, $\varphi_1(b) \leq t \leq \varphi_2(b)$, und $\tilde{\gamma}_2(t) = (a, t)$, $\varphi_1(a) \leq t \leq \varphi_2(a)$. Es seien nun $P, \frac{\partial P}{\partial y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} d(x, y) &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy dx \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx \\ &= \int_{\gamma_2} P(x, y) dx - \int_{\gamma_1} P(x, y) dx = - \int_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Analog erhält man für einen Normalbereich $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ mit stetigen Funktionen $\psi_j : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkter Variation und mit dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und für stetige Funktionen $Q, \frac{\partial Q}{\partial x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} d(x, y) = \int_{\Gamma} Q(x, y) dy.$$

Der folgende **Gauß'sche Integralsatz der Ebene** ergibt sich als Spezialfall des entsprechenden Satzes in Kapitel 3.

Satz 2.22 *Der Rand $\Gamma = \partial\Omega$ des einfach zusammenhängenden Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei eine stückweise glatte, geschlossene Jordankurve. Ferner seien $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen.*

Dann gilt

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right] d(x, y) = \int_{\Gamma} [P(x, y) dx + Q(x, y) dy].$$

Kapitel 3

Oberflächenintegrale und Integralsätze

3.1 Definition der Oberflächenintegrale

Wir bewegen uns jetzt im dreidimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Jedem Punkt

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

ordnen wir den Vektor $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{e}_j = [\delta_{jk}]_{k=1}^3$ zu. D.h., wir identifizieren x und \vec{x} in diesem Sinne. Neben dem **Skalarprodukt**

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^3 x_k y_k = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle(\vec{x}, \vec{y})$$

mit $|\vec{x}| = |x| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})}$ verwenden wir auch das **Kreuzprodukt**

$$\vec{x} \times \vec{y} = \text{„det“} \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_3$$

zweier Vektoren. Offenbar gilt

$$(K1) \quad \vec{x} \times \vec{y} = -(\vec{y} \times \vec{x}), \quad \vec{x} \times \vec{x} = \vec{\Theta},$$

$$(K2) \quad (\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\lambda \vec{y}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(K3) \quad \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z},$$

$$(K4) \quad (\vec{x}, \vec{y} \times \vec{z}) = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Aus (K4) folgt insbesondere, dass der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ auf \vec{x} und auf \vec{y} senkrecht steht.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren \vec{x} und \vec{y} kann auch koordinatenfrei definiert werden: Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ ist genau der Vektor, dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des durch \vec{x} und

\vec{y} aufgespannten Parallelogramms ist, der senkrecht auf der durch \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Ebene steht und der mit \vec{x} und \vec{y} in der Reihenfolge \vec{x} , \vec{y} , $\vec{x} \times \vec{y}$ ein Rechtssystem bildet.

Für $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$(P1) \quad (\vec{f} \times \vec{g})(t) := \vec{f}(t) \times \vec{g}(t).$$

Es folgt, falls f und g differenzierbar sind,

$$(P2) \quad (\vec{f} \times \vec{g})' = \vec{f}' \times \vec{g} + \vec{f} \times \vec{g}'.$$

Sind $G \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine gegebene Abbildung mit

$$\vec{f}(u_1, u_2) = f_1(u_1, u_2)\vec{e}_1 + f_2(u_1, u_2)\vec{e}_2 + f_3(u_1, u_2)\vec{e}_3,$$

so definieren wir

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_k}{\partial u_j} \vec{e}_k, \quad j = 1, 2,$$

und

$$\frac{\partial(f_k, f_j)}{\partial(u_1, u_2)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_k}{\partial u_1} & \frac{\partial f_k}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_j}{\partial u_1} & \frac{\partial f_j}{\partial u_2} \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$(P3) \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial u_2} = \frac{\partial(f_2, f_3)}{\partial(u_1, u_2)} \vec{e}_1 + \frac{\partial(f_3, f_1)}{\partial(u_1, u_2)} \vec{e}_2 + \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \vec{e}_3.$$

Definition 3.1 Sind $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig differenzierbare Abbildung auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ und $K \subset G$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge, $K \neq \emptyset$, so nennt man die Abbildung $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine **Fläche** mit dem Parameterbereich K und $F := f(K)$ ein **Flächenstück** mit der Parameterdarstellung $x = f(u)$ bzw. $(x_1, x_2, x_3) = f(u_1, u_2)$ oder auch

$$\vec{x} = \vec{f}(u) = f_1(u)\vec{e}_1 + f_2(u)\vec{e}_2 + f_3(u)\vec{e}_3.$$

Beispiel 3.2 Sind $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und

$$\vec{f}(u) = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \varphi(u)\vec{e}_3,$$

so ist $f(K)$ der Graph der Funktion $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei gilt

$$\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_j} = \vec{e}_j + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_j} \vec{e}_3$$

und somit

$$\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} = -\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1} \vec{e}_1 - \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_2} \vec{e}_2 + \vec{e}_3.$$

Beispiel 3.3 Mit $K = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ erhalten wir für ein festes $r > 0$ und

$$\vec{f}(u) = r \cos u_1 \cos u_2 \vec{e}_1 + r \sin u_1 \cos u_2 \vec{e}_2 + r \sin u_2 \vec{e}_3$$

als Flächenstück $f(K)$ die Kugeloberfläche mit dem Radius $r > 0$ und dem Mittelpunkt Θ . Dabei gilt

$$\frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} = r \cos u_2 \vec{f}(u).$$

Sind $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $x^0 = f(u^0) \in F = f(K)$ ein fester Punkt auf dem Flächenstück F , $u^0 \in K$, so verstehen wir unter der **Tangentialebene** von f im Punkt x^0 die Ebene

$$\left\{ \lambda_1 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2} : \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

und unter der **Tangentenebene** von f im Punkt x^0 die Ebene

$$\left\{ x^0 + \lambda_1 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} + \lambda_2 \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2} : \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

falls die zwei Vektoren $\frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_j}$, $j = 1, 2$, linear unabhängig sind. Ist nämlich $\gamma : [a, b] \rightarrow K$ ein glatter Weg mit $\gamma(t_0) = u^0$, $t_0 \in (a, b)$, so ist $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow F$ ein differenzierbarer Weg durch den Punkt x^0 . Dabei gilt

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = \gamma'_1(t_0) \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_1} + \gamma'_2(t_0) \frac{\partial f(u^0)}{\partial u_2}.$$

Der Vektor $\overrightarrow{(f \circ \gamma)'(t_0)}$ liegt also in der Tangentialebene von f im Punkt x^0 . Der Vektor

$$\vec{n}(u^0) = \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2}$$

steht senkrecht auf der Tangentenebene von f im Punkt x^0 , weshalb wir diesen Vektor einen **Normalenvektor** der Fläche f im Punkt $x^0 = f(u^0)$ nennen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den Flächeninhalt $|F|$ des Flächenstücks $F = f(K)$ zu berechnen. Der Flächeninhalt von $f([u_1^0, u_1^0 + \Delta u_1] \times [u_2^0, u_2^0 + \Delta u_2])$ ist für kleine $\Delta u_j > 0$ ungefähr gleich

$$\left| \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u^0)}{\partial u_2} \right| \Delta u_1 \Delta u_2.$$

Das führt zu der Formel

$$|F| = \iint_K \left| \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} \right| d(u_1, u_2) = \iint_K |\vec{n}(u)| du.$$

Beispiel 3.4 Der Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel vom Radius r ist gleich (vgl. Beispiel 3.3)

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r \cos u_2 |\vec{f}(u)| du_2 du_1 = 4\pi r^2.$$

Definition 3.5 Sind $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\varphi : f(K) \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld und $v : f(K) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, so verstehen wir unter dem **Oberflächenintegral erster Art** von φ über $F = f(K)$ das Integral

$$\iint_F \varphi dF := \iint_K \varphi(f(u_1, u_2)) \left| \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} \right| d(u_1, u_2) = \iint_K \varphi(f(u)) |\vec{n}(u)| du$$

und unter dem **Oberflächenintegral zweiter Art** von v über F das Integral

$$\iint_F \vec{v} d\vec{F} := \iint_K (\vec{v}(f(u)), \vec{n}(u)) du = \iint_K \langle v(f(u)), n(u) \rangle du.$$

Wir nennen zwei Parametrisierungen $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Flächenstücks $F = f(K)$ **äquivalent**, wenn ein **Diffeomorphismus** (d.h. eine bijektive und in beiden Richtungen stetig differenzierbare Abbildung) $h : G_0 \rightarrow G$ einer offenen Menge $G_0 \subset \mathbb{R}^2$ mit $M \subset G_0$ in eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ mit $K \subset G$ existiert, so dass $\det h'(w) > 0$ für alle $w \in G_0$, $h(M) = K$ und $g(w) = f(h(w))$ für alle $w \in M$ gilt. Es ist dann offenbar $g(M) = f(K) = F$ und außerdem

$$\frac{\partial \vec{g}(w)}{\partial w_1} \times \frac{\partial \vec{g}(w)}{\partial w_2} = \left(\frac{\partial \vec{f}(h(w))}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(h(w))}{\partial u_2} \right) \det h'(w),$$

woraus z.B.

$$\begin{aligned} \iint_K (\vec{v}(f(u)), \vec{n}(u)) du &= \iint_M (\vec{v}(f(h(w))), \vec{n}(h(w))) |\det h'(w)| dw \\ &= \iint_M (\vec{v}(g(w)), \vec{n}(w)) dw \end{aligned}$$

folgt. Die Definition 3.5 ist also im Sinne der Verwendung äquivalenter Parametrisierungen unabhängig von der Parametrisierung des Flächenstücks F . Lässt man in obigen Betrachtungen auch $\det h'(w) < 0$ für alle $w \in G_0$ zu, so ändert sich in diesem Fall das Vorzeichen des Oberflächenintegrals zweiter Art. Jede Äquivalenzklasse von äquivalenten Parametrisierungen definiert also eine Orientierung des Flächenstücks. So ist z.B. $f(w_1, -w_2)$ ein Repräsentant der zu $f(u_1, u_2)$ entgegengesetzten Orientierung.

Wir werden im Weiteren eine Fläche $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ und das Flächenstück $F = f(K)$ **eigentlich** nennen, wenn K gleich der Abschließung eines beschränkten Gebietes $\Omega \neq \emptyset$ des \mathbb{R}^2 ist, die Abbildung $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv ist und $\text{Rang } f'(u) = 2$ für alle $u \in \Omega$ gilt.

Beispiel 3.6 Mit

$$f(u) = \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_1^2 - u_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad h(w) = \begin{bmatrix} \frac{w_1 + w_2}{2} \\ \frac{w_2 - w_1}{2} \end{bmatrix}$$

erhalten wir

$$h'(w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \det h'(w) = \frac{1}{2} > 0,$$

und die Parameterdarstellung

$$g(w) = f(h(w)) = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_1 w_2 \end{bmatrix}$$

einer Sattelfläche.

Unter einem **zusammengesetzten Flächenstück** verstehen wir die Vereinigung endlich vieler Flächenstücke, die nur Randpunkte gemeinsam haben. Das Oberflächenintegral über ein zusammengesetztes Flächenstück ist dann gleich der Summe der Integrale über die einzelnen Flächenstücke.

3.2 Integralsätze

Es seien nun $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld (z.B. das Geschwindigkeitsfeld einer stationären Strömung).

- (a) Die Differenz zwischen dem aus dem Quader $\Omega = Q$ herausfließenden Volumen pro Zeiteinheit und dem in den Quader hineinfließenden Volumen pro Zeiteinheit ist gleich

$$\iint_F \vec{v}(x) d\vec{F}, \quad (3.1)$$

wobei die Oberfläche $F = \partial Q$ des Quaders Q (ein zusammengesetztes Flächenstück) so orientiert ist, dass die Flächennormale nach außen (also in $\mathbb{R}^3 \setminus Q$ hinein) zeigt. Man nennt das Integral (3.1) den **Fluss** von \vec{v} durch die Oberfläche F .

(b) Wir erhalten
$$\iint_F \vec{v} d\vec{F} = \iiint_Q \left[\frac{\partial v_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(x)}{\partial x_3} \right] dx.$$

- (c) Bezeichnen wir mit $|Q|$ das Volumen von Q , so ist offenbar

$$\text{mittlere Ergiebigkeit bzgl. } Q = \frac{\text{Überschuss}}{\text{Volumen von } Q} = \frac{1}{|Q|} \iint_F \vec{v} d\vec{F}.$$

- (d) Die **Divergenz** (Ergiebigkeit) des Vektorfeldes \vec{v} im Punkt x^0 ist gleich dem Grenzwert der mittleren Ergiebigkeit, wenn man Q auf den Punkt x^0 zusammenzieht:

$$\operatorname{div} \vec{v}(x^0) := \lim_{|Q| \rightarrow 0, x^0 \in Q} \frac{1}{|Q|} \iint_F \vec{v} d\vec{F}.$$

Ist $\operatorname{div} \vec{v}(x^0) > 0$, so nennt man x^0 eine **Quelle** des Vektorfeldes \vec{v} , ist $\operatorname{div} \vec{v}(x^0) < 0$, so **Senke**.

- (e) Der Grenzübergang in (d) liefert somit unter Verwendung von (b)

$$\operatorname{div} \vec{v}(x^0) = \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(x^0)}{\partial x_3}.$$

Man nennt das Vektorfeld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ **quellenfrei**, wenn $\operatorname{div} \vec{v}(x) = 0 \forall x \in \Omega$ gilt.

Unter (b) steht die “elementare” Form des Gauß’schen Integralsatzes im \mathbb{R}^3 . Für dessen allgemeine Formulierung benötigen wir folgende Definition.

Definition 3.7 Eine kompakte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ heißt **Bereich** mit stückweise glattem Rand, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. B ist die Abschließung einer nichtleeren offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
2. Der Rand ∂B von B ist die Vereinigung endlich vieler eigentlicher Flächenstücke $f_k(\overline{\Omega}_k)$, $k = 1, \dots, n_0$ ($\Omega_k \subset \mathbb{R}^2$ nichtleer und offen), die nur Randpunkte gemeinsam haben, wobei $\text{Rang } f'_k(u) = 2 \forall u \in \overline{\Omega}_k$ gilt und der Rand von $\overline{\Omega}_k$ stückweise glatt ist.
3. Die Normalenvektoren auf ∂B weisen nach außen.

Satz 3.8 (Gauß'scher Integralsatz) Es seien $B \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$ und $v : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\iint_F \vec{v} \, d\vec{F} = \iiint_B \text{div } \vec{v}(x) \, dx.$$

Interpretation: Die durch die Oberfläche von B fließende Flüssigkeitsmenge ist gleich der Menge, die die Quellen in B produzieren.

Folgerung 3.9 Es seien $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetig differenzierbares Skalarfeld auf dem Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger, aber fest gewählter Vektor. Wir betrachten das Vektorfeld $\vec{v}(x) = \varphi(x) \vec{a}$, $x \in B$. Aus dem Gauß'schen Integralsatz 3.8 folgt dann

$$\iint_F \vec{v} \, d\vec{F} = \left(\iint_F \varphi(x) \, d\vec{F}, \vec{a} \right) = \iiint_B \text{div } \vec{v}(x) \, dx = \left(\iiint_B \nabla \varphi(x) \, dx, \vec{a} \right).$$

Da diese Beziehung für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt erhalten wir den **Gauß'schen Integralsatz für Skalarfelder**

$$\iint_F \varphi(x) \, d\vec{F} = \iiint_B \nabla \varphi(x) \, dx,$$

wobei die Integrale komponentenweise zu bilden sind.

Beispiel 3.10 Ein Körper B schwimme in einer Flüssigkeit mit dem spezifischen Gewicht ρ . Mit B^* bezeichnen wir den Teil von B , der sich unter der Flüssigkeitsoberfläche befindet. Die Gesamthöhe des Flüssigkeitsstandes sei $h > 0$. Dann ist die Druckverteilung durch

$$p(x) = \begin{cases} p_0 & : x_3 \geq h, \\ p_0 + \rho(h - x_3) & : 0 \leq x_3 < h, \end{cases}$$

gegeben, wobei p_0 der Luftdruck über der Flüssigkeitsoberfläche ist. Der Auftrieb \vec{A} ist definiert als die Kraft, die durch den Druck erzeugt wird. Dabei ist zu beachten, dass der Druck der nach außen gerichteten Flächennormalen entgegenwirkt. Mit $F = \partial B$, $F^* = \partial B^*$ und $F_* = \partial(B \setminus B^*)$ ergibt sich aus Folgerung 3.9

$$\begin{aligned} \vec{A} &= - \iint_F p(x) \, d\vec{F} = - \iint_{F^*} p(x) \, d\vec{F}^* - \iint_{F_*} p(x) \, d\vec{F}_* \\ &= - \iiint_{B^*} \nabla p(x) \, dx - \iiint_{B \setminus B^*} \nabla p(x) \, dx = - \iiint_{B^*} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho \end{bmatrix} dx = \rho |B^*| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Das ist genau das Archimedes'sche Auftriebsgesetz: Die Auftriebskraft ist dem Betrag nach gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Folgerung 3.11 Es sei $v : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ durch die stückweise glatte und geschlossene Jordankurve $\Gamma = \{x = \gamma(t) : t \in [a, b]\}$ berandet werde. Wir definieren

$$B = \overline{D} \times [0, 1] = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \overline{D}, 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

und

$$v^0 : B \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{bmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mit $F^0 = \partial B$ und $F = \Gamma \times [0, 1]$ erhalten wir aus Satz 3.8

$$\iint_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v}^0(x) d(x_1, x_2, x_3) = \iint_{F^0} \vec{v}^0 d\vec{F}^0 = \iint_F \vec{v} d\vec{F},$$

wobei F die Parameterdarstellung

$$f(t, z) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ z \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b, 0 \leq z \leq 1,$$

mit der nach außen gerichteten Flächennormalen

$$\vec{n}(t, z) = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

gestattet. Also gilt $d\vec{F} = \vec{n}(t, z) d(t, z)$ und

$$\iint_F \vec{v}^0 d\vec{F} = \int_0^1 \int_a^b (\vec{v}^0(\gamma_1(t), \gamma_2(t), z), \vec{n}(t, z)) dt dz = \int_a^b [v_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) - v_2(\gamma(t))\gamma'_1(t)] dt,$$

so dass

$$\iint_D \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \int_\Gamma (v_1 dx_2 - v_2 dx_1).$$

Das ist der Gauß'sche Integralsatz in der Ebene (vgl. Satz 2.22).

Unter der **Zirkulation** eines Vektorfeldes $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ längs einer geschlossenen rektifizierbaren Jordankurve $\Gamma \subset \Omega$ verstehen wir das Kurvenintegral zweiter Art

$$\int_\Gamma v(x) dx.$$

Definition 3.12 Ein Flächenstück $F = \{f(u) : u \in \overline{D}\} \subset \mathbb{R}^3$ nennt man **einfach**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. D ist offen, nichtleer und einfach zusammenhängend mit stückweise glattem Rand.
2. Der Rand von D ist positiv orientiert, d.h. D liegt links von ∂D .
3. Die Abbildung $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist injektiv und zweimal stetig differenzierbar, und es gilt $\operatorname{Rang} f'(u) = 2$ für alle $u \in \overline{D}$.

- (f) Es seien $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F \subset \Omega$ ein einfaches Flächenstück mit dem Rand ∂F , $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen. Die mittlere Wirbelstärke von v bzgl. F ist dann gleich

$$\frac{1}{|F|} \int_{\partial F} v(x) dx$$

und die **Wirbelstärke** im Punkt $x^0 \in \Omega$ bzgl. der Richtung \vec{n} gleich

$$W_{\vec{n}}(x^0) = \lim_{|F| \rightarrow 0, x^0 \in F} \frac{1}{|F|} \int_{\partial F} v(x) dx,$$

wobei der Grenzwert über ebene Flächenstücke mit der Normalenrichtung \vec{n} zu nehmen ist. Es sei z.B.

$$\partial F = \{ \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), x_3^0) : a \leq t \leq b \},$$

also $\partial D = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : a \leq t \leq b\}$. Dann folgt unter Verwendung von Folgerung 3.11

$$\begin{aligned} \int_{\partial F} v(x) dx &= \int_a^b \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b [v_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + v_2(\gamma(t))\gamma_2'(t)] dt \\ &= \int_{\partial D} [v_1(x) dx_1 + v_2(x) dx_2] = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2), \end{aligned}$$

also

$$W_{\vec{n}}(x^0) = \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_2} \quad \text{für} \quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Allgemein gilt $W_{\vec{n}}(x^0) = \langle \text{rot } \vec{v}(x^0), \vec{n} \rangle$ mit

$$\text{rot } \vec{v}(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3(x^0)}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3(x^0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2(x^0)}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1(x^0)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \right]_{k=1}^3 \times \vec{v}(x^0) = \nabla \times \vec{v}(x^0).$$

- (g) Es seien $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F = \{f(u) : u \in \bar{D}\} \subset \Omega$ ein einfaches Flächenstück und $\partial D = \{\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : a \leq t \leq b\}$ stückweise glatt,

so dass $\partial F = \{f(\gamma(t)) : a \leq t \leq b\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial F} v(x) dx &= \int_a^b \langle v(f(\gamma(t))), f'(\gamma(t))\gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b v(f(\gamma(t)))^T \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_1} & \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{bmatrix} dt \\
&= \int_a^b \left[v(f(\gamma(t)))^T \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_1} \gamma'_1(t) + v(f(\gamma(t)))^T \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial u_2} \gamma'_2(t) \right] dt \\
&= \int_{\partial D} \left[v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} du_1 + v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} du_2 \right] \\
&\stackrel{\text{Folg. 3.11}}{=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(v(f(u))^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \right) \right] du \\
&= \iint_D \left[\left(v'(f(u)) \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \right)^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} - \left(v'(f(u)) \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \right)^T \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} \right] du \\
&= \iint_D \frac{\partial f(u)}{\partial u_2} \left[v'(f(u)) - v'(f(u))^T \right] \frac{\partial f(u)}{\partial u_1} du.
\end{aligned}$$

Für einen konstanten Vektor $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\left[v'(x) - v'(x)^T \right] a = \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j} \right) a_k \right]_{j=1}^3 = \text{rot } \vec{v}(x) \times \vec{a}.$$

Also ist

$$\int_{\partial F} v(x) dx = \iint_D \left(\text{rot } \vec{v}(f(u)), \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{f}(u)}{\partial u_2} \right) du = \iint_F \text{rot } \vec{v} d\vec{F}.$$

Satz 3.13 (Stokes'scher Integralsatz) Sind $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $F \subset \Omega$ ein einfaches Flächenstück, so gilt

$$\int_{\partial F} v(x) dx = \iint_F \text{rot } \vec{v} d\vec{F}.$$

Interpretation: Die Zirkulation entlang einer Kurve ist gleich dem Integral über alle Wirbelstärken auf einem Flächenstück, welches von dieser Kurve berandet wird, also gleich dem Wirbelfluss durch dieses Flächenstück.

Folgerung 3.14 Es seien $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $B \subset \Omega$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$, der sich als Vereinigung endlich vieler einfacher Flächenstücke darstellen lässt, die nur Randpunkte gemeinsam haben. Dann gilt

$$\iint_F \text{rot } \vec{v} d\vec{F} = 0,$$

d.h. der Wirbelfluss durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich Null.

Folgerung 3.15 Wir betrachten den ebenen Fall. Seien also $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, $\overline{D} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ und D ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem Rand ∂D . Dann folgt

$$\int_{\partial D} (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) = \int_{\partial D} v(x) dx = \iint_D \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{D} = \iint_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2).$$

In der Ebene sind also Stokes'scher und Gaußscher Integralsatz identisch.

3.3 Folgerungen aus den Integralsätzen

- Mit der Bezeichnung $\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T$ (**Nabla - Operator**) haben wir für $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla \varphi = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right]^T = \operatorname{grad} \varphi$$

(**Gradient** von φ) und für $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla \cdot v = \langle \nabla, v \rangle = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \vec{v}$$

(**Divergenz** von \vec{v}) sowie

$$\nabla \times v = \operatorname{rot} \vec{v}$$

(**Rotation** von \vec{v}).

- Für $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v, w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda\varphi + \mu\psi) &= \lambda\nabla\varphi + \mu\nabla\psi, \\ \nabla(\lambda v + \mu w) &= \lambda(\nabla v) + \mu(\nabla w), \\ \nabla \times (\lambda v + \mu w) &= \lambda(\nabla \times v) + \mu(\nabla \times w). \end{aligned}$$

- Für $a \in \mathbb{R}^3$ schreiben wir

$$a \cdot \nabla = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

- Ferner ist für $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} =: \Delta\varphi$$

(**Δ - Laplace-Operator**).

- Varianten des **Gauß'schen Integralsatzes** ($F = \partial B$):

1. Satz 3.8: $\iint_F \vec{v} d\vec{F} = \iiint_B \operatorname{div} \vec{v}(x) dx$
2. Folg. 3.9: $\iint_F \varphi(x) d\vec{F} = \iiint_B \nabla\varphi(x) dx$
3. $\iint_F \vec{v} \times d\vec{F} = - \iiint_B \operatorname{rot} \vec{v} dx$

- Varianten des **Stokes'schen Integralsatzes**:

1. Satz 3.13: $\int_{\partial F} v(x) dx = \iint_F \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{F}$

2. $\int_{\partial F} \varphi(x) dx = - \iint_F \nabla \varphi \times d\vec{F}$

3. $\int_{\partial F} \vec{v} \times dx = - \iint_F (d\vec{F} \times \nabla) \times \vec{v}$

- Formeln der **partiellen Integration**: Es seien $\varphi, \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $B \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand $F = \partial B$. Dann gelten die **erste** und **zweite Green'sche Formel**

$$\iiint_B \varphi \Delta \psi dx = \iint_F \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} dF - \iiint_B \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle dx, \quad (3.2)$$

$$\iint_F \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) dF = \iiint_B (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dx. \quad (3.3)$$

Dabei bezeichnet \vec{n} die **normierte** äußere Normale. Aus der ersten Green'schen Formel folgt ($\varphi \equiv 1$)

$$\iint_F \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} dF = \iiint_B \Delta \psi dx. \quad (3.4)$$

3.4 Wirbel- und quellfreie Felder

Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar.

- (a) Aus $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = (\nabla, \nabla, \vec{v}) = (\vec{v}, \nabla, \nabla) = \nabla \times \nabla, \vec{v} = 0$ folgt:

Jedes Wirbelfeld ist quellfrei.

- (b) Aus $\operatorname{rot} (\nabla \varphi) = \nabla \times (\nabla \varphi) = \Theta$ folgt:

Jedes Potentialfeld (Gradientenfeld) ist wirbelfrei.

Das ist uns schon aus den Überlegungen in Abschnitt 2.3 bekannt. Mehr noch: Nach Satz 2.20 ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn es wirbelfrei ist.

- (c) Sind also $\operatorname{rot} \vec{v} = \Theta$ und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ in Ω , so existieren ein Potential $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla \varphi$. Es folgt $0 = \operatorname{div} \vec{v} = \Delta \varphi$ auf Ω . Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **harmonisch**, wenn $\nabla \varphi(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt.
- (d) Für $y \in \mathbb{R}^2$ betrachten wir die Funktion $s_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln|x-y|$. Es folgt $\nabla s_y(x) = -\frac{x-y}{|x-y|^2}$. Im Fall $y \in \mathbb{R}^3$ setzen wir $s_y : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{|x-y|}$ und erhalten $\nabla s_y(x) = -\frac{x-y}{|x-y|^3}$, also

$$\nabla s_y(x) = -\frac{x-y}{|x-y|^d}, \quad d = 2, 3.$$

Es folgt

$$\Delta s_y(x) = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x = y\}.$$

Hinweis: Sind $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ eine von einem rektifizierbaren Jordanweg erzeugte Kurve oder ein Flächenstück, $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} \varphi(y) s_y(x) d\Gamma_y, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$$

(Integration bzgl. y , Kurven- bzw. Flächenintegral erster Art), so ist $\Phi : \mathbb{R}^d \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch.

Im Weiteren seien $B \subset \mathbb{R}^3$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand und $\Omega = \text{int}(B)$ sowie $F = \partial B$ der Rand von B (und Ω).

- (e) **Dirichlet-Problem:** Gegeben ist eine stetige Funktion $g : F \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht eine in Ω harmonische und auf B stetige Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = g(x) \forall x \in F$.

Wie viele Lösungen kann dieses Problem haben? Sind $\varphi_1, \varphi_2 : B \rightarrow \mathbb{R}$ zwei auf B zweimal stetig differenzierbare (d.h. in einer B umfassenden offenen Menge zweimal stetig differenzierbare) Lösungen, so löst $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ das **homogene** Problem

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{auf } F.$$

Aus der ersten Green'schen Formel (3.2) folgt dann

$$\iiint_B \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle dx = 0,$$

also $\nabla \varphi = 0$ auf B . Damit ist φ auf B konstant und somit, wegen $\varphi = 0$ auf F , identisch Null. Es kann also nur eine zweimal stetig differenzierbare Lösung geben.

Mittels des Maximumprinzips für harmonische Funktionen (siehe Satz 3.18) kann man zeigen, dass auch das ursprüngliche Problem höchstens eine Lösung besitzt.

- (f) **Neumann-Problem:** Gegeben ist eine stetige Funktion $g : F \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht eine in Ω harmonische und auf B stetig differenzierbare Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$, die $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = g$ auf F (genauer: in allen Punkten von F , in denen die äußere Normale \vec{n} wohldefiniert ist) erfüllt. Hier folgt aus der ersten Green'schen Formel (3.2), dass sich zwei auf B zweimal stetig differenzierbare Lösungen dieses Problems nur durch eine additive Konstante unterscheiden können.
- (g) **Gemischtes Randwertproblem:** Gegeben sind die stetigen Funktionen $g, h : F \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h \not\equiv 0$, gesucht ist eine in Ω harmonische und auf B stetig differenzierbare Funktion $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}$, die der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} + h \varphi = g$ auf F genügt. Für die Differenz $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ zweier zweimal auf B stetig differenzierbarer Lösungen folgt aus der ersten Green'schen Formel (3.2)

$$\iiint_B |\nabla \varphi|^2 dx = \iint_F \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} dF = - \iint_F h \varphi^2 dF \leq 0.$$

Hieraus ergibt sich wieder $\nabla \varphi \equiv 0$ und somit $\varphi \equiv c_0 = \text{const}$ auf B . Also ist $h c_0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = 0$, d.h. $c_0 = 0$. Es gibt somit höchstens eine auf B zweimal stetig differenzierbare Lösung.

- (h) **Poisson-Problem:** Gegeben sind die stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : F \rightarrow \mathbb{R}$, gesucht ist eine auf Ω zweimal stetig differenzierbare und auf F stetige Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die

$$\Delta\varphi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi = g \quad \text{auf } F$$

genügt. Dieses Problem kann in zwei Teilprobleme zerlegt werden: Man sucht $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit

$$\Delta\varphi_1 = f \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{auf } F$$

und

$$\Delta\varphi_2 = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi_2 = g \quad \text{auf } F.$$

- (i) Sind $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Problems

$$\Delta\varphi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{auf } F$$

und $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $\psi = 0$ auf F , so folgt aus der ersten Green'schen Formel (3.2) (man vertausche die Rollen von φ und ψ)

$$-\iiint_B \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle dx = \iiint_B \psi f dx.$$

Diese Tatsache kann für einen schwächeren Lösungsbegriff verwendet werden, indem man $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi = 0$ auf F eine schwache Lösung nennt, wenn die letzte Gleichung für alle Funktionen $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ aus einem geeigneten Funktionenraum gilt. Auch für homogene Neumann-Randbedingungen, d.h. für das Problem

$$\Delta\varphi = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} = 0 \quad \text{auf } F,$$

kann man dies aufschreiben, wobei hier keine Randbedingungen an ψ zu stellen sind.

- (j) Ein Vektorfeld $\vec{w} = \text{rot } \vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ nennt man also ein **Wirbelfeld** (vgl. Punkt (a)) und \vec{v} ein dazugehöriges **Vektorpotential**. Aus (a) folgt, dass die Bedingung $\text{div } \vec{w} = 0$ in Ω notwendig dafür ist, dass \vec{w} ein Wirbelfeld ist. Seien nun diese Bedingung erfüllt, $x^0 \in \Omega$ und Ω sternförmig bzgl. x^0 sowie

$$\vec{v}(x) = \int_0^1 [\vec{w}(x^0 + t(x - x^0)) \times (x - x^0)] dt, \quad x \in \Omega.$$

Unter Verwendung der Formel

$$\text{rot} [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a} + \vec{a}'\vec{b} - \vec{b}'\vec{a}$$

kann man zeigen, dass dann $\text{rot } \vec{v} = \vec{w}$ in Ω gilt.

- (k) Sind $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ ein Wirbelfeld und $\nabla\varphi$ ein Gradientenfeld, so folgt aus (b)

$$\vec{w} = \text{rot} (\vec{v} + \nabla\varphi),$$

d.h., auch $\vec{v} + \nabla\varphi$ ist ein Vektorpotential für \vec{w} . Umgekehrt folgt aus $\vec{w} = \text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{u}$, also aus $\text{rot} (\vec{v} - \vec{u}) = \Theta$, nach Satz 2.20, falls Ω einfach zusammenhängend ist, $\vec{v} - \vec{u} = \nabla\varphi$.

- (l) Wir suchen zu einem quellenfreien Wirbelfeld $\vec{w} = \text{rot } \vec{v}$ ein quellenfreies Vektorpotential, also nach (k) ein Skalarfeld φ , so dass $\text{div} (\vec{v} + \nabla\varphi) = 0$ gilt. Man erhält also die Gleichung

$$\Delta\varphi = -\text{div } \vec{v}.$$

- (m) Es seien $\vec{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein gegebenes Vektorfeld und die Gleichung $\Delta\varphi = \operatorname{div} \vec{v}$ auf dem sternförmigen Gebiet Ω lösbar. Es folgt $\operatorname{div}(\vec{v} - \nabla\varphi) = 0$. Nach (j) existiert also ein Vektorfeld $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} - \nabla\varphi = \operatorname{rot} \vec{w}$. Also ist $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w} + \nabla\varphi$ als Summe eines quelfreien und eines wirbelfreien Vektorfeldes darstellbar.

Wir wenden jetzt die zweite Greensche Formel (3.3) auf die Funktion $\varphi(x) = s_y(x) = \frac{1}{|x-y|}$ ($d=3$), $y \in \operatorname{int}(B)$ und $B_\varepsilon = B \setminus U_\varepsilon(y)$, $F_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$ an, um eine Darstellungsformel für harmonische Funktionen zu gewinnen.

- Zuvor einige Betrachtungen zu Integralen mit Singularitäten: Es seien $B \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-messbar und $f : B \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für jede Jordan-messbare Umgebung U von x^0 (d.h., für jede Jordan-messbare Menge $U \subset \mathbb{R}^3$, für die x^0 innerer Punkt ist) existiere das Integral $\int_{B \setminus U} f(x) dx$. Wir sagen, dass das **uneigentliche Integral**

$$\int_B f(x) dx \quad (3.5)$$

existiert, falls für eine beliebige Folge $(U_n)_{n=1}^\infty$ von Umgebungen von x^0 , die sich für $n \rightarrow \infty$ auf x^0 zusammenziehen, der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B \setminus U_n} f(x) dx$$

existiert. Dieser Grenzwert ist dann unabhängig von der Wahl der Folge $(U_n)_{n=1}^\infty$ und definiert den Wert des Integrals (3.5).

Beispiel 3.16 Es seien $R > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $m = 2$ oder $m = 3$. Das Integral $\int_{K_R(\Theta)} |x|^{-\lambda} dx$ mit $K_R(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x^0| \leq R\}$ existiert genau dann als uneigentliches Integral, wenn $\lambda < m$ gilt.

Folgerung 3.17 Es seien $B \subset \mathbb{R}^m$ Jordan-messbar und $f : B \setminus \{x^0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für ein $R > 0$ gelte $K_R(x^0) \subset B$ und

$$|f(x)| \leq \frac{c}{|x - x^0|^\lambda}, \quad x \in K_R(x^0) \setminus x^0,$$

mit Konstanten $c > 0$ und $\lambda < m \in \{2, 3\}$. Ferner sei f auf $\overline{B \setminus U}$ für jede Jordan-messbare Umgebung U von x^0 integrierbar. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_B f(x) dx$.

- Man erhält für eine auf dem Bereich B mit stückweise glattem Rand F zweimal stetig differenzierbare Funktion $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ die Formel

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{\nabla\psi(x)}{|x-y|} d\vec{F}_x + \frac{1}{4\pi} \iint_F \psi(x) \frac{x-y}{|x-y|^3} d\vec{F}_x - \frac{1}{4\pi} \iiint_B \frac{\Delta\psi(x)}{|x-y|} dx,$$

$y \in \operatorname{int}(B) =: \Omega$, wobei das letzte Integral im uneigentlichen Sinne existiert. Ist ψ harmonisch in Ω , so ergibt sich die **Darstellungsformel**

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial\psi(x)}{\partial\vec{n}} dF_x + \frac{1}{4\pi} \iint_F \psi(x) \frac{x-y}{|x-y|^3} d\vec{F}_x, \quad y \in \Omega. \quad (3.6)$$

- Sei $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf der offenen Menge Ω harmonisch. Wendet man die Darstellungsformel (3.6) auf $B = K_r(y) \subset \Omega$ und $F = F_r = \partial K_r(y)$ an, so erhält man die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funktionen

$$\psi(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{F_r} \psi \, dF_r.$$

Aus der Mittelwerteigenschaft erhält man das Maximumprinzip.

Satz 3.18 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen) *Ist $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ harmonisch und nicht konstant, so kann ψ in Ω kein Maximum besitzen.*

3.5 Zum Beweis des Gauß'schen Integralsatzes

Satz 3.19 *Es seien $f : K \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $F = f(K)$ das zugehörige Flächenstück, $S : F \rightarrow G := S(F)$ ein Diffeomorphismus mit $\det S'(x) \neq 0 \forall x \in F$ und $v : F \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann gilt*

$$\iint_F \vec{v} \, d\vec{F} = \iint_G \vec{w} \, d\vec{G},$$

wobei

$$w(x) = \frac{1}{\det S'(S^{-1}(x))} S'(S^{-1}(x))v(S^{-1}(x)), \quad x \in G,$$

bzw. (mit $T = S^{-1} : G \rightarrow F$)

$$w(x) = [\det T'(x)] [T'(x)]^{-1} v(T(x)), \quad x \in G.$$

Satz 3.20 *Sind $v : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Menge $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ und $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ ein C^2 -Diffeomorphismus mit $\det T'(x) \neq 0 \forall x \in \Omega_1$ sowie $w : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch*

$$w(x) = [\det T'(x)] [T'(x)]^{-1} v(T(x)),$$

so gilt

$$\operatorname{div} \vec{w}(x) = [\det T'(x)] \operatorname{div} \vec{v}(T(x)), \quad x \in \Omega_1.$$

Bezeichnungen:

- $\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{R}^3 : B \text{ – Bereich mit stückweise glattem Rand}\}$,
- $\mathcal{B}_G = \{B \in \mathcal{B} : \text{Auf } B \text{ gilt der Gauß'sche Integralsatz.}\}$

Satz 3.21 *Sind $B_1 \in \mathcal{B}_G$ und $T : B_1 \rightarrow B_2$ ein C^2 -Diffeomorphismus mit $\det T'(x) > 0 \forall x \in B_1$, so ist $B_2 \in \mathcal{B}_G$.*

3.6 Felder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten

Definition 3.22 *Unter einer orthogonalen Koordinatentransformation verstehen wir eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$T : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad u \mapsto x = T(u), \quad D \subset \mathbb{R}^3,$$

mit $\det T'(u) > 0 \forall u \in D$ und

$$\left\langle \frac{\partial T(u)}{\partial u_k}, \frac{\partial T(u)}{\partial u_j} \right\rangle = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, j \neq k, u \in D.$$

Für jedes $u^0 \in \text{int}(D)$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Wege $\gamma^k : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma^1(t) = T(u_1^0 + t, u_2^0, u_3^0)$, $\gamma^2(t) = T(u_1^0, u_2^0 + t, u_3^0)$ und $\gamma^3(t) = T(u_1^0, u_2^0, u_3^0 + t)$ wohldefiniert sind. Die zugehörigen, maximal fortgesetzten Kurven Γ^k nennen wir **Koordinatenlinien** durch den Punkt $x^0 = T(u^0)$. Wegen $(\gamma^k)'(0) = \frac{\partial T(u^0)}{\partial u_k}$ schneiden sich diese Kurven in x^0 paarweise rechtwinklig. Die Vektoren

$$\tilde{e}_k(u) = \frac{1}{g_k(u)} \frac{\partial T(u)}{\partial u_k} \quad \text{mit} \quad g_k(u) = \left| \frac{\partial T(u)}{\partial u_k} \right|$$

bilden wegen

$$\langle \tilde{e}_k(u), \tilde{e}_j(u) \rangle = \delta_{jk} \quad \text{und} \quad \det [\tilde{e}_1(u) | \tilde{e}_2(u) | \tilde{e}_3(u)] = \frac{1}{g_1(u)g_2(u)g_3(u)} \det T'(u) = 1$$

ein orthogonales Rechtssystem, das sogenannte **Rechtsdreibein** entlang der Koordinatenlinien.

Beispiel 3.23 (Zylinderkoordinaten) Die Transformation $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$T(u) = \begin{bmatrix} u_1 \cos u_2 \\ u_1 \sin u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

ist eine orthogonale Koordinatentransformation, wobei $T'(u) = u_1$, $g_1(u) = 1$, $g_2(u) = u_1$, $g_3(u) = 1$ und

$$\tilde{e}_1(u) = \begin{bmatrix} \cos u_2 \\ \sin u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2(u) = \begin{bmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_3(u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 3.24 (Kugelkoordinaten) Die Transformation $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$T(u) = \begin{bmatrix} u_1 \cos u_2 \cos u_3 \\ u_1 \sin u_2 \cos u_3 \\ u_3 \sin u_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ist eine orthogonale Koordinatentransformation, wobei $T'(u) = u_1^2 \cos u_3$ und

$$g_1(u) = 1, \quad g_2(u) = u_1 \cos u_3, \quad g_3(u) = u_1$$

sowie

$$\tilde{e}_1(u) = \begin{bmatrix} \cos u_2 \cos u_3 \\ \sin u_2 \cos u_3 \\ \sin u_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2(u) = \begin{bmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_3(u) = \begin{bmatrix} -\cos u_2 \sin u_3 \\ \sin u_2 \sin u_3 \\ \cos u_3 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 3.25 (Toruskoordinaten) Für $a > 0$ ist die Transformation $T : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$T(u) = \begin{bmatrix} (a + u_1 \cos u_3) \cos u_2 \\ (a + u_1 \cos u_3) \sin u_2 \\ u_1 \sin u_3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad D = (0, a) \times [0, 2\pi]^2$$

eine orthogonale Koordinatentransformation, wobei $T'(u) = u_1(a + u_1 \cos u_3)$,

$$g_1(u) = 1, \quad g_2(u) = a + u_1 \cos u_3, \quad g_3(u) = u_1$$

und

$$\tilde{e}_1(u) = \begin{bmatrix} \cos u_2 \cos u_3 \\ \sin u_2 \cos u_3 \\ \sin u_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2(u) = \begin{bmatrix} -\sin u_2 \\ \cos u_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_3(u) = \begin{bmatrix} -\cos u_2 \sin u_3 \\ \sin u_2 \sin u_3 \\ \cos u_3 \end{bmatrix}.$$

Sind $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein gegebenes Vektorfeld und $T : D \rightarrow G$ eine orthogonale Koordinatentransformation sowie $\tilde{v}(u) = v(T(u))$, so folgt

$$\tilde{v}(u) = \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_j(u) \tilde{e}_j(u),$$

wobei $\tilde{v}_j(u) = \langle \tilde{v}(u), \tilde{e}_j(u) \rangle$ die Koordinaten von v entlang der Koordinatenlinien bezeichnen. Wir erhalten

$$\frac{\partial \tilde{v}(u)}{\partial u_k} = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial \tilde{v}_j(u)}{\partial u_k} \tilde{e}_j(u) + \tilde{v}_j(u) \frac{\partial \tilde{e}_j(u)}{\partial u_k} \right], \quad k = 1, 2, 3.$$

Beispiel 3.26 Auf $v(x) = (x_3^2, 0, 0)$ wenden wir $T(u)$ aus Beispiel 3.23 an. Es folgt $\tilde{v}(u) = (u_3^2, 0, 0)$ und $\tilde{v}_1(u) = u_3^2 \cos u_2$, $\tilde{v}_2(u) = -u_3^2 \sin u_2$ sowie $\tilde{v}_3(u) = 0$.

Man **beachte** für das Weitere, dass die Differentialoperatoren grad , div , rot und Δ sich stets auf die x -Koordinaten beziehen.

Es seien nun $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ ein gegebenes Skalarfeld, $T : D \rightarrow G$ eine orthogonale Koordinatentransformation und $\tilde{\psi}(u) = \psi(T(u))$. Es folgt

$$\text{grad } \tilde{\psi}(u) = \sum_{j=1}^3 \langle \text{grad } \psi(T(u)), \tilde{e}_j(u) \rangle \tilde{e}_j(u)$$

mit

$$\begin{aligned} \langle \text{grad } \psi(T(u)), \tilde{e}_j(u) \rangle &= \frac{1}{g_j(u)} \left\langle \text{grad } \psi(T(u)), \frac{\partial T(u)}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \frac{1}{g_j(u)} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \psi(T(u))}{\partial x_k} \frac{\partial T_k(u)}{\partial u_j} = \frac{1}{g_j(u)} \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_j}, \end{aligned}$$

also

$$\text{grad } \tilde{\psi}(u) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{g_j(u)} \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_j} \tilde{e}_j(u). \quad (3.7)$$

Beispiel 3.27 (Gradient in Zylinderkoordinaten) Für die Zylinderkoordinaten aus Beispiel 3.23 ergibt sich aus (3.7) die Formel

$$\text{grad } \tilde{\psi}(u) = \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_1} \tilde{e}_1(u) + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_2} \tilde{e}_2(u) + \frac{\partial \tilde{\psi}(u)}{\partial u_3} \tilde{e}_3(u)$$

bzw. mit $u = (r, \varphi, z)$ kurz

$$\text{grad } \tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \tilde{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \varphi} \tilde{e}_\varphi + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \tilde{e}_z$$

Für $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $v : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ folgt aus

$$\frac{\partial[\psi(x)v_k(x)]}{\partial x_k} = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_k} v_k(x) + \psi(x) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_k}$$

die Formel

$$\text{div}(\psi \vec{v}) = (\text{grad } \psi, \vec{v}) + \psi \text{div } \vec{v}. \quad (3.8)$$

Unter der Voraussetzung, dass $T : D \rightarrow G$ bijektiv ist, wenden wir die Formel (3.7) auf $\psi(x) = [T^{-1}(x)]_k$, d.h. $\psi(u) = \psi(T(u)) = u_k$, an und erhalten

$$\text{grad } u_k = \frac{1}{g_k(u)} \tilde{e}_k(u) \quad (3.9)$$

und somit

$$\tilde{e}_1(u) = \tilde{e}_2(u) \times \tilde{e}_3(u) = g_2(u)g_3(u)[\text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3].$$

Es folgt aus (3.8) und $\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b}, \text{rot } \vec{a}) - (\vec{a}, \text{rot } \vec{b})$

$$\begin{aligned} \text{div}(\tilde{v}_1 \tilde{e}_1) &= \text{div}[g_2 g_3 \tilde{v}_1 (\text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3)] \\ &= g_2 g_3 \tilde{v}_1 \text{div}(\text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3) + \langle \text{grad}(g_2 g_3 \tilde{v}_1), \text{grad } u_2 \times \text{grad } u_3 \rangle \\ &= \frac{1}{g_2 g_3} \langle \text{grad}(g_2 g_3 \tilde{v}_1), \tilde{e}_1 \rangle \stackrel{(3.7)}{=} \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(g_2 g_3 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} \end{aligned}$$

und analog

$$\text{div}(\tilde{v}_2 \tilde{e}_2) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(g_1 g_3 \tilde{v}_2)}{\partial u_2}, \quad \text{div}(\tilde{v}_3 \tilde{e}_3) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial(g_1 g_2 \tilde{v}_3)}{\partial u_3}.$$

Wir schlussfolgern aus $\text{div } \vec{v} = \text{div} \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^3 \text{div}(\tilde{v}_j \tilde{e}_j)$ die Formel

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial(g_2 g_3 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(g_1 g_3 \tilde{v}_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(g_1 g_2 \tilde{v}_3)}{\partial u_3} \right]. \quad (3.10)$$

Beispiel 3.28 (Divergenz in Zylinderkoordinaten) Formel (3.10) liefert für die Koordinatentransformation aus Beispiel 3.23

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= \frac{1}{u_1} \left[\frac{\partial(u_1 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial u_2} + \frac{\partial(u_1 \tilde{v}_3)}{\partial u_3} \right] \\ &= \frac{1}{u_1} \frac{\partial(u_1 \tilde{v}_1)}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial \tilde{v}_2}{\partial u_2} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial u_3} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \tilde{v}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Formeln (3.9), $\text{rot}(\psi \vec{w}) = \psi \text{rot } \vec{w} + (\text{grad } \psi) \times \vec{w}$ und (3.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \text{rot} \sum_{j=1}^3 \tilde{v}_j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^3 \text{rot}(\tilde{v}_j \tilde{e}_j) = \sum_{j=1}^3 \text{rot}(\tilde{v}_j g_j \text{grad } u_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 [\tilde{v}_j g_j \text{rot } \text{grad } u_j + (\text{grad}(\tilde{v}_j g_j)) \times (\text{grad } u_j)] \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{g_k} \frac{\partial(\tilde{v}_j g_j)}{\partial u_k} \tilde{e}_k \right) \times \left(\frac{1}{g_j} \tilde{e}_j \right) \\ &= \frac{1}{g_1 g_2} \frac{\partial(\tilde{v}_2 g_2)}{\partial u_1} \tilde{e}_3 - \frac{1}{g_1 g_3} \frac{\partial(\tilde{v}_3 g_3)}{\partial u_1} \tilde{e}_2 \\ &\quad - \frac{1}{g_2 g_1} \frac{\partial(\tilde{v}_1 g_1)}{\partial u_2} \tilde{e}_3 + \frac{1}{g_2 g_3} \frac{\partial(\tilde{v}_3 g_3)}{\partial u_2} \tilde{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{g_3 g_1} \frac{\partial(\tilde{v}_1 g_1)}{\partial u_3} \tilde{e}_2 - \frac{1}{g_3 g_2} \frac{\partial(\tilde{v}_2 g_2)}{\partial u_3} \tilde{e}_1, \end{aligned}$$

so dass

$$\operatorname{rot} \tilde{v} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \det \begin{bmatrix} g_1 \tilde{e}_1 & g_2 \tilde{e}_2 & g_3 \tilde{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ g_1 \tilde{v}_1 & g_2 \tilde{v}_2 & g_3 \tilde{v}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Wiederum unter Berücksichtigung von (3.7) ergibt sich

$$\Delta \tilde{\psi} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{div} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{g_j} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_j} \tilde{e}_j =: \operatorname{div} \vec{w}$$

mit $\tilde{w}_j = \frac{1}{g_j} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_j}$, $j = 1, 2, 3$. Aus (3.10) folgt somit

$$\Delta \tilde{\psi} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{g_1 g_2 g_3}{g_j^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_j} \right). \quad (3.12)$$

Beispiel 3.29 (Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten) Mit der Koordinatentransformation aus Beispiel 3.23 nimmt Formel (3.12) die Form

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\psi} &= \frac{1}{u_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(u_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{u_1} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(u_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

an.

Beispiel 3.30 (Laplace-Operator in Kugelkoordinaten) Für die Koordinatentransformation aus Beispiel 3.24 liefert die Formel (3.12)

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\psi} &= \frac{1}{u_1^2 \cos u_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(u_1^2 \cos u_3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\cos u_3} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\cos u_3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial u_3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\cos \vartheta \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \vartheta} \right). \end{aligned}$$

Index

- äquivalente Parametrisierung, 24
- Bereich mit stückweise glattem Rand, 26
- Bogenlänge, 16
- Darstellungsformel, 34
- Deformation, 19
- Diffeomorphismus, 24
- Dirichlet-Problem, 32
- Divergenz, 25, 30
- Dreibein, 36
- Durchmesser einer Zerlegung, 10
- eigentliche Fläche, 24
- eigentliches Flächenstück, 24
- einfach zusammenhängendes Gebiet, 19
- einfaches Flächenstück, 27
- Fläche, 22
- Flächenstück, 22
- Fluss durch eine Oberfläche, 25
- Formeln der partiellen Integration, 31
- Funktion beschränkter Variation, 13
- Funktionaldeterminante, 8
- Gauß'scher Integralsatz, 26, 27, 30
- Gauß'scher Integralsatz der Ebene, 20
- Gauß'scher Integralsatz für Skalarfelder, 26
- Gebiet, 18
- gemischtes RWP, 32
- glatter Weg, 15
- Gradient, 30
- Gradientenfeld, 18, 31
- Green'sche Formeln, 31
- harmonische Funktion, 31
 - Darstellungsformel, 34
 - Mittelwerteigenschaft, 35
- homogenes Problem, 32
- Indikatorfunktion, 6
- Integrabilitätsbedingung, 19
- Jordan-Maß, 6
- Jordan-messbare Menge, 6
- Jordankurve, 14
- Jordanweg, 14
- Koordinatenlinien, 36
- Kreuzprodukt, 21
- Kurve, 13
- Länge einer Kurve, 14
- Länge eines Weges, 13
- Laplace-Operator, 30
- Maximumprinzip, 35
- Menge vom Maß Null, 6
- Mittelwerteigenschaft, 35
- Nabla-Operator, 30
- Neil'sche Parabel, 15
- Neumann-Problem, 32
- Normalbereich, 7
- Normalenvektor, 23
- Nullmenge, 6
- Oberflächenintegral erster Art, 24
- Oberflächenintegral zweiter Art, 24
- Orientierung einer Fläche, 24
- orthogonale Koordinatentransformation, 35
- Poisson-Problem, 33
- Potentialfeld, 31
- Quelle eines Vektorfeldes, 25
- Rechtsdreibein, 36
- rektifizierbarer Weg, 13
- Riemann-integrierbare Funktion, 5, 6
- Riemannsche Integralsummen, verallg., 10
- Rotation, 30
- Senke eines Vektorfeldes, 25
- Skalarfeld, 18
- Skalarprodukt, 21
- sternförmige Menge, 18
- Stokes'scher Integralsatz, 29, 31
- Summe von Wegen, 14

Tangentenebene, 23

Tangentialebene, 23

uneigentliches Integral, 34

Vektorfeld, 18

Vektorpotential, 33

Weg, 13

Wegintegral 1. Art, 16

Wegintegral 2. Art, 17

Weglängenfunktion, 14

Wirbelfeld, 31, 33

Wirbelstarke, 28

Zerlegungssatz, 11

Zirkulation entlang einer Kurve, 27

zusammengesetztes Flächenstück, 25