Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis

WS 2009/10

Peter Junghanns

Hinweis: Das vorliegende Skript stellt nur ein Gerüst zu den Inhalten der Vorlesung dar. Die Vorlesung selbst bietet weiterführende Erläuterungen, Beweise und die ausführliche Behandlung der Beispiele.

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] B. Choudhary, Sudarsan Nanda, Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New Delhi, 1989.

[2] H. Heuser, Funktionalanalysis, Theorie und Anwendung, Teubner, Stuttgart, 1992.

[3] F. Hirzebruch, W. Scharlau, Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum, Akademie Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1996.

[4] L. A. Ljusternik, W. I. Sobolew, Elemente der Funktionalanalysis, Akademie-Verlag, Berlin, 1968.

[5] N. K. Nikol'skij, Functional Analysis I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[6] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1973.

[7] M. Schechter, Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York, 1971.

[8] C. Swartz, Measure, Integration and Function Spaces, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1994.

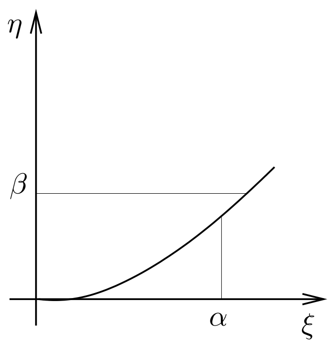
[9] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1965.

Kapitel 0

Vorbereitungen

0.1 Ungleichungen

Es seien $p > 1$ und $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ ist offenbar nicht größer als die Summe der Inhalte der Flächen, die von der ξ– bzw. der η–Achse und dem Graphen der Funktion $\eta = \xi^{p-1}$ begrenzt werden (siehe Abb.). Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet $\xi = \eta^{q-1}$.



Es folgt

$$\alpha\beta \le \int_0^\alpha \xi^{p-1}\,d\xi + \int_0^\beta \eta^{q-1}\,d\eta = \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\,. \tag{0.1}$$

Sind wenigstens eine der Zahlen $\xi_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$, und eine der Zahlen $\eta_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, m$, von Null verschieden, so folgt mit

$$\alpha_j = \frac{\xi_j}{\left(\sum\limits_{k=1}^m |\xi_k|^p\right)^{1/p}} \quad \text{und} \quad \beta_j = \frac{\eta_j}{\left(\sum\limits_{k=1}^m |\eta_k|^q\right)^{1/q}}$$

unter Verwendung von (0.1)

$$\left|\sum_{j=1}^m \alpha_j\beta_j\right| \le \sum_{j=1}^m |\alpha_j|\,|\beta_j| \le \frac{1}{p}\sum_{j=1}^m \frac{|\xi_j|^p}{\left(\sum\limits_{k=1}^m |\xi_k|^p\right)} + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^m \frac{|\eta_j|^q}{\left(\sum\limits_{k=1}^m |\eta_k|^q\right)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Wir erhalten die **Hölder-Ungleichung**

$$\left|\sum_{j=1}^m \xi_j\eta_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^m |\eta_j|^q\right)^{1/q}, \tag{0.2}$$

die für beliebige $\xi_j, \eta_j \in \mathbb{C}$ und $p > 1, q > 1$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt. Für $p = q = 2$ ist diese als **Cauchy-Schwarz-** bzw. **Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung** bekannt. Aus (0.2) folgt auch

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m |\xi_j+\eta_j|^p &\le \sum_{j=1}^m |\xi_j|\,|\xi_j+\eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^m |\eta_j|\,|\xi_j+\eta_j|^{p-1}\\ &\le \left[\left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |\eta_j|^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{j=1}^m |\xi_j+\eta_j|^{q(p-1)}\right)^{1/q},\end{aligned}$$

so dass sich wegen $q(p-1) = p$ und $1 - q^{-1} = p^{-1}$ die **Minkowski-Ungleichung**

$$\left(\sum_{j=1}^m |\xi_j+\eta_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^m |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^m |\eta_j|^p\right)^{1/p} \tag{0.3}$$

ergibt, die trivialerweise auch für $p = 1$ gilt.

0.2 Metrische Räume

Unter einem **metrischen Raum X** versteht man ein geordnetes Paar $(\mathbf{X}, d)$ aus einer nichtleeren Menge (den Punkten des Raumes) und einer Abbildung $d : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow [0,\infty)$ (der Metrik), die folgenden Axiomen genügt:

(M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in \mathbf{X}$,

(M3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung).

Eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ nennt man **konvergent** mit dem **Grenzwert** $x^* \in \mathbf{X}$ (in Zeichen: $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$), wenn $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0$ gilt. Der Grenzwert einer konvergenten Punktfolge ist offenbar eindeutig bestimmt, und jede Teilfolge einer konvergenten Punktfolge ist ebenfalls konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Zu gegebenen $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbf{X}$ bezeichnen

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x,y) < \varepsilon\} \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbf{X} : d(x,y) \le \varepsilon\}$$

die **offene Kugel** mit dem Mittelpunkt x sowie dem Radius ε (auch ε-**Umgebung** von x genannt) und die entsprechende **abgeschlossene Kugel**. Für eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ des metrischen Raumes $\mathbf{X}$ definiert man die Menge

$$\operatorname{int}(A) := \{x \in A : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$$

der **inneren Punkte** von A und die Menge

$$\overline{A} := \{x \in \mathbf{X} : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, y \in A \text{ mit } y \in U_\varepsilon(x)\}$$

der **Berührungspunkte** von A. Man nennt $A \subset \mathbf{X}$

- **offen**, wenn $\mathrm{int}(A) = A$,
- **abgeschlossen**, wenn $\overline{A} = A$

gilt. Ein Punkt $x \in A$ heißt **isolierter Punkt** von A, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $A \cap U_\varepsilon(x) = \{x\}$ existiert. Einen Berührungspunkt von A, der kein isolierter Punkt von A ist, nennt man **Häufungspunkt** von A. Die Menge der Häufungspunkte von A bezeichnet man auch mit A'. Sind A und B Teilmengen eines metrischen Raumes $\mathbf{X}$, so sagt man, dass A in B dicht liegt, wenn $\overline{A} \supset B$ gilt. Einen metrischen Raum $\mathbf{X}$ nennt man **separabel**, wenn er eine dichte Punktfolge (x_n) enthält, d.h. $\overline{\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}} = \mathbf{X}$ (oder: $\forall\, x \in \mathbf{X}$ und $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N = N(x, \varepsilon) : d(x_N, x) < \varepsilon$).

Satz 0.1 *Für beliebige Teilmengen $A \subset \mathbf{X}$ eines metrischen Raumes $\mathbf{X}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A ist abgeschlossen.*

(b) *$\mathbf{X} \setminus A$ ist offen.*

(c) *Es gilt $A' \subset A$.*

(d) *Aus $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \subset A$ und $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ folgt stets $x^* \in A$.*

Eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ nennt man **Cauchyfolge** oder **Fundamentalfolge**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m > N$ existiert. Der metrische Raum $(\mathbf{X}, d)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in $\mathbf{X}$ konvergent in $\mathbf{X}$ ist.

Folgerung 0.2 *Ist $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $(\mathbf{X}, d)$, so ist $(\mathbf{X}_0, d)$ ein vollständiger metrischer Raum.*

Unter einer **offenen Überdeckung** einer Menge $A \subset \mathbf{X}$ versteht man eine Familie $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ von offenen Mengen $U_\alpha \subset \mathbf{X}$, so dass $A \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha$ gilt. Man nennt eine solche Überdeckung **endlich**, wenn sie nur aus endlich vielen Mengen U_α besteht. Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ heißt **kompakt**, wenn aus jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann. Man nennt eine Menge $B \subset \mathbf{X}$ ein **ε-Netz** zu $A \subset \mathbf{X}$, wenn für jedes $x \in A$ ein $y \in B$ mit $d(x, y) < \varepsilon$ existiert. Man nennt $A \subset \mathbf{X}$ **relativ kompakt** oder **präkompakt**, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

Satz 0.3 *Es sei $A \subset \mathbf{X}$ eine Teilmenge des metrischen Raumes $\mathbf{X}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A ist kompakt.*

(b) *Aus jeder Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$ kann eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden, deren Grenzwert zu A gehört.*

(c) *Jede unendliche Teilmenge von A besitzt einen Häufungspunkt, der zu A gehört.*

Man nennt $A \subset \mathbf{X}$ **beschränkt**, wenn ein $R > 0$ und ein $x \in \mathbf{X}$ mit $A \subset U_R(x)$ existieren.

Folgerung 0.4 *Ist A präkompakt, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für A. Jede kompakte Menge ist abgeschlossen und beschränkt. Jeder kompakte metrische Raum ist separabel und vollständig.*

Eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ zwischen zwei metrischen Räumen $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ nennt man **stetig**, wenn für jedes $x_0 \in \mathbf{X}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass aus $x \in U_\delta(x_0)$ stets $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$ folgt (d.h., so dass $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$ gilt). Man nennt sie **gleichmäßig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $d_{\mathbf{Y}}(f(y), f(x)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbf{X}$ mit $d_{\mathbf{X}}(y, x) < \delta$ gilt.

Satz 0.5 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *Die Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ ist stetig.*

(b) *Aus $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ und $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ folgt $f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.*

(c) *Für jede offene Menge $A \subset \mathbf{Y}$ ist $f^{-1}(A)$ offen.*

(d) *Für jede abgeschlossene Menge $A \subset \mathbf{Y}$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.*

Satz 0.6 *Es seien $\mathbf{X}$ ein kompakter metrischer Raum und $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann existieren Punkte $x_u, x_o \in \mathbf{X}$ mit*

$$f(x_u) \le f(x) \le f(x_o) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}.$$

Beispiel 0.7 (Beispiele metrischer Räume)

1. $(\mathbf{s}, d)$ *mit* $\mathbf{s} = \{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C},\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ *und*

$$d(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|}$$

   (Raum aller Zahlenfolgen)

2. (ℓ^∞, d_∞) *mit* $\ell^\infty = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C},\, n = 0, 1, 2, \ldots,\ \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\xi_n| < \infty\right\}$ *und*

$$d_\infty(\xi, \eta) = \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\xi_n - \eta_n|$$

   (Raum der beschränkten Zahlenfolgen)

3. $(\mathbf{c}, d_\infty)$ *mit* $\mathbf{c} = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C},\, n = 0, 1, 2, \ldots,\ \exists \lim_{n\to\infty} \xi_n \in \mathbb{C}\right\}$
   (Raum der konvergenten Zahlenfolgen)

4. $(\mathbf{c}_0, d_\infty)$ *mit* $\mathbf{c}_0 = \left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C},\, n = 0, 1, 2, \ldots,\ \lim_{n\to\infty} \xi_n = 0\right\}$
   (Raum der Nullfolgen)

5. $1 \le p < \infty$, (ℓ^p, d_p) *mit* $\ell^p = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty : \xi_n \in \mathbb{C} \, , \, n = 0, 1, 2, \dots \, , \, \sum_{n=0}^\infty |\xi_n|^p < \infty \right\}$ *und*

$$d_p(\xi, \eta) = \left(\sum_{n=0}^\infty |\xi_n - \eta_n|^p \right)^{1/p}$$

(Raum der zur p-ten Potenz summierbaren Zahlenfolgen)

6. $(\mathbf{C}[0,1], d_\infty)$ *mit* $\mathbf{C}[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ *und*

$$d_\infty(f, g) = \max \{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$$

(Raum der auf $[0,1]$ *stetigen komplexwertigen Funktionen)*

7. $(\mathbf{C}^{(m)}[0,1], d_{\infty,m})$ *mit* $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\mathbf{C}^{(m)}[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist } m \text{ mal stetig differenzierbar}\}$$

und

$$d_{\infty,m}(f, g) = \sum_{k=0}^m d_\infty(f^{(k)}, g^{(k)})$$

(Raum der auf $[0,1]$ *m mal stetig differenzierbaren komplexwertigen Funktionen, Vereinbarungen:* $f^{(0)} = f$, $d_{\infty,0} = d_\infty$, $\mathbf{C}^{(0)}[0,1] = \mathbf{C}[0,1]$*)*

Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) nennt man **kontrahierend**, wenn ein $q \in (0,1)$ existiert, so dass

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le q \, d_X(x_1, x_2) \quad \forall \, x_1, x_2 \in X$$

gilt.

Satz 0.8 (Fixpunktsatz von Banach) *Es seien* (X, d) *ein vollständiger metrischer Raum und* $f : X \longrightarrow X$ *eine kontrahierende Abbildung mit der Kontraktionskonstanten* q. *Dann besitzt* f *in* X *genau einen* **Fixpunkt** x^* , *d.h. genau eine Lösung der Gleichung* $x = f(x)$. *Dabei gilt für jedes* $x_0 \in X$ *und*

$$x_n = f(x_{n-1}) \, , \quad n \in \mathbb{N} \, , \tag{0.4}$$

die Beziehung $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ *mit der a-priori Abschätzung*

$$d(x_n, x^*) \le \frac{q^n}{1-q} \, d(x_1, x_0) \, , \quad n \in \mathbb{N} \, . \tag{0.5}$$

Das durch (0.4) beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Berechnung einer Lösung der Gleichung $x = f(x)$ nennt man **Methode der sukzessiven Approximation**.

Satz 0.9 (Cantor'scher Durchschnittssatz) *Es sei* $(A_n)_{n=1}^\infty$ *eine Folge abgeschlossener Mengen im vollständigen metrischen Raum* $\mathbf{X}$, *deren Durchmesser* $d(A_n) = \sup \{d(x,y) : x, y \in A_n\}$ *eine Nullfolge bilden und für die* $A_{n+1} \subset A_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt. Dann existiert genau ein* $x^* \in \mathbf{X}$ *mit* $x^* \in A_n \; \forall \, n = 1, 2, \dots$

Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{X}$ des metrischen Raumes $\mathbf{X}$ nennt man **nirgends dicht** in $\mathbf{X}$, wenn jede offene Kugel in $\mathbf{X}$ eine zu A durchschnittsfremde offene Kugel enthält. Die Menge A heißt von **erster Kategorie**, wenn sie als Vereinigung höchstens abzählbar vieler nirgends dichter Mengen darstellbar ist. Man nennt sie von **zweiter Kategorie**, wenn sie nicht von erster Kategorie ist.

Satz 0.10 (Baire'scher Satz) *Jeder vollständige metrische Raum* $\mathbf{X}$ *ist eine Menge zweiter Kategorie.*

Folgerung 0.11 *Jeder vollständige metrische Raum ohne isolierte Punkte ist eine überabzählbare Menge.*

Ein System $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ offener Teilmengen $G_\alpha \subset \mathbf{X}$ heißt **Basis** des metrischen Raumes $\mathbf{X}$, wenn jede nichtleere offene Teilmenge von $\mathbf{X}$ als Vereinigung von Mengen aus $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ darstellbar ist.

Satz 0.12 *Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er eine höchstens abzählbare Basis besitzt.*

0.3 Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie die Sätze 0.1 und 0.5.
2. Zeigen Sie, dass die im Beispiel 0.7 aufgelisteten Räume metrische Räume sind. Untersuchen Sie diese Räume auf Vollständigkeit und Separabilität.
3. Mit (c_{00}, d_∞) bezeichnen wir den Raum der "endlichen" Zahlenfolgen, d.h., die Zahlenfolge $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in c_{00}$ gehört genau dann zu c_{00}, wenn wenn ein Index $N = N(\xi)$ existiert, so dass $\xi_n = 0 \ \forall\, n > N$ gilt.
   (a) Zeigen Sie, dass c_{00} nicht vollständig ist.
   (b) Zeigen Sie, dass c_{00} separabel ist.
   (c) Was ist die Abschließung von c_{00} in ℓ^∞?
4. Bleibt die Aussage des Satzes 0.9 gültig, wenn man die Voraussetzung $d(A_n) \longrightarrow 0$ durch $d(A_n) < \infty \quad \forall\, n \ge n_0$ ersetzt?
5. Zeigen Sie, dass jeder Teilraum eines separablen metrischen Raumes separabel ist.

0.4 Vervollständigung metrischer Räume

Es seien $(\mathbf{X}, d)$ ein metrischer Raum und $\widetilde{\mathbf{X}}$ die Menge aller Cauchyfolgen $(x_n) = (x_n)_{n=0}^\infty$ in $\mathbf{X}$. Auf $\widetilde{\mathbf{X}}$ definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\,. \tag{0.6}$$

Mit $\mathcal{X}$ sei die Menge der Äquivalenzklassen $[(x_n)]_\sim$ mit $(x_n) \in \widetilde{\mathbf{X}}$ bezeichnet. Auf $\mathcal{X}$ definieren wir die Metrik

$$d_{\mathcal{X}}\left([(x_n)]_\sim, [(y_n)]_\sim\right) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)\,. \tag{0.7}$$

Ferner sei $\mathcal{X}_0 = \{[(x)]_\sim : x \in \mathbf{X}\}$.

Satz 0.13 *Durch* (0.7) *wird tatsächlich eine Metrik auf* $\mathcal{X}$ *definiert. Ferner gilt:*

(a) *Die Abbildung* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathcal{X}_0\,,\ x \mapsto [(x)_{n=0}^{\infty}]_{\sim}$ *ist eine* **Isometrie**, *d.h., es gilt*

$$d_{\mathcal{X}}(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}\,.$$

(b) *Der Raum* $\mathcal{X}_0$ *ist* **dicht** *in* $\mathcal{X}$, *d.h.* $\overline{\mathcal{X}_0} = \mathcal{X}$.

(c) *Der metrische Raum* $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ *ist vollständig.*

Definition 0.14 *Ein metrischer Raum* $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ *heißt* **Vervollständigung** *eines metrischen Raumes* $(\mathbf{X}, d_{\mathbf{X}})$, *wenn* $(\mathbf{Y}, d_{\mathbf{Y}})$ *vollständig ist und einen dichten Teilraum* $\mathbf{Y}_0$ *enthält, der zu* $\mathbf{X}$ **isometrisch** *ist (d.h., es existiert eine bijektive Abbildung* $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}_0$ *mit* $d_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) = d_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$*).*

Bemerkung 0.15 *Die Vervollständigung eines metrischen Raumes ist bis auf Isometrie eindeutig bestimmt.*

0.5 Normierte Räume

Einen linearen Raum $\mathbf{X}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen (auch $\mathbb{K}$-Vektorraum genannt) nennt man **normierten Raum**, wenn eine Abbildung $\mathbf{X} \longrightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto \|x\|$ mit folgenden Eigenschaften gegeben ist:

(N1) $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$,

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\| \ \ \forall\, x \in \mathbf{X}\,,\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$,

(N3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \ \ \forall\, x, y \in \mathbf{X}$ (Dreiecksungleichung).

Folgerung 0.16 *In einem normierten Raum* $\mathbf{X}$ *gilt*

$$\Big|\, \|x\| - \|y\| \,\Big| \le \|x - y\| \quad \forall\, x, y \in \mathbf{X}\,.$$

Folgerung 0.17 *Ist* $(\mathbf{X}, \|.\|)$ *ein normierter Raum, so ist* $(\mathbf{X}, d)$ *mit* $d(x, y) = \|x - y\|$ *ein metrischer Raum.*

Wenn dieser zugeordnete metrische Raum vollständig ist, so nennt man $(\mathbf{X}, \|.\|)$ einen **vollständigen normierten Raum** oder **Banachraum**.

Folgerung 0.18 *Die Räume* $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$, $(\mathbf{c}, \|.\|_\infty)$, $(\mathbf{c}_0, \|.\|_\infty)$ *und* $(\ell^p, \|.\|_p)$, $1 \le p < \infty$, *mit*

$$\|\xi\|_\infty = \sup_{n=0,1,2,\ldots} |\xi_n| \quad \textit{und} \quad \|\xi\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}$$

sind Banachräume (vgl. Beispiel 0.7).

Zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem linearen Raum $\mathbf{X}$ heißen **äquivalent**, wenn positive Konstanten c_1, c_2 existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$$

gilt. Auf dem Kreuzprodukt $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ zweier normierter Räume $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, \|.\|_{\mathbf{Y}})$ kann man verschiedene äquivalente Normen definieren, z.B.

$$\|(x,y)\|_p := \left(\|x\|_{\mathbf{X}}^p + \|y\|_{\mathbf{Y}}^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ p \ge 1, \quad \text{oder} \quad \|(x,y)\|_\infty := \max\left\{\|x\|_{\mathbf{X}}, \|y\|_{\mathbf{Y}}\right\}.$$

Dabei ist $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ äquivalent zu $x_n \longrightarrow x$ und $y_n \longrightarrow y$.

Folgerung 0.19 *In einem normierten Raum sind die Abbildungen* $\mathbf{X}\times\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $(x,y) \mapsto x+y$ *und* $\mathbb{K}\times\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ *stetig.*

Es seien $(\mathbf{X}, \|.\|)$ ein normierter Raum und $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ die im Abschnitt 0.4 konstruierte Vervollständigung des zugeordneten metrischen Raumes. Durch die Definitionen

$$\alpha[(x_n)]_\sim + \beta[(y_n)]_\sim = [(\alpha x_n + \beta y_n)]_\sim, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ [(x_n)]_\sim, [(y_n)]_\sim \in \mathcal{X}, \tag{0.8}$$

und

$$\|[(x_n)]_\sim\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|, \quad [(x_n)]_\sim \in \mathcal{X}, \tag{0.9}$$

wird $\mathcal{X}$ zu einem normierten Banachraum.

Eine **Reihe** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, wobei $x_n \in \mathbf{X}$, nennt man **konvergent**, falls die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ der Partialsummen konvergiert. Unter ihrer **Summe** versteht man den Grenzwert der Folge der Partialsummen, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Man nennt die Reihe **absolut konvergent**, wenn die Zahlenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konvergiert.

Satz 0.20 *Ein normierter Raum* $\mathbf{X}$ *ist genau dann Banachraum, wenn in ihm jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist.*

0.6 Räume mit Skalarprodukt

Es sei $\mathbf{H}$ ein linearer Raum (i.a. über dem Körper der komplexen Zahlen). Eine Abbildung $\mathbf{H}\times\mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ heißt **Skalarprodukt** oder **inneres Produkt** auf $\mathbf{H}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(S1) $\langle x,x\rangle \ge 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}$ und $\langle x,x\rangle = 0 \iff x = \Theta$,

(S2) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall\, x,y \in \mathbf{H}$,

(S3) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad \forall\, x,y,z \in \mathbf{H},\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

Es gilt die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \quad \forall\, x, y \in \mathbf{H}\,. \tag{0.10}$$

Unter Verwendung dieser Ungleichung kann man zeigen, dass durch

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{0.11}$$

eine Norm auf $\mathbf{H}$ definiert wird. Ein Raum $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ mit Skalarprodukt heißt **unitärer Raum**, wenn $(\mathbf{H}, \|.\|)$ mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ein Banachraum ist. Einen unitären Raum $\mathbf{H}$ nennt man **Hilbertraum**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ ein linear unabhängiges System in $\mathbf{H}$ mit genau n Elementen existiert.

Folgerung 0.21 *Es sei* $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ *ein Raum mit Skalarprodukt.*

(a) *Die Abbildung* $\langle .,. \rangle : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ *ist stetig.*

(b) *Ist* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$, *so ist*

$$\mathbf{L}^\perp := \{x \in \mathbf{H} : \langle x, y\rangle = 0 \ \forall\, y \in \mathbf{L}\}$$

ein abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathbf{H}$. *Dabei gilt* $\mathbf{L} \cap \mathbf{L}^\perp = \{\Theta\}$.

Folgerung 0.22 *Es sei* $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ *ein unitärer Raum.*

(a) *Ist* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein abgeschlossener linearer Teilraum von* $\mathbf{H}$, *so lässt sich jedes* $x \in \mathbf{H}$ *auf eindeutige Weise in der Form* $x = y + z$ *mit* $y \in \mathbf{L}$ *und* $z \in \mathbf{L}^\perp$ *darstellen. Dabei gilt*

$$\|x - y\| := \inf\{\|x - w\| : w \in \mathbf{L}\}\ .$$

Der Vektor y *heißt* **orthogonale Projektion** *von* x *auf* $\mathbf{L}$, *und* $\mathbf{L}^\perp$ **orthogonales Komplement** *zu* $\mathbf{L}$. *Man schreibt auch* $\mathbf{H} = \mathbf{L} \oplus \mathbf{L}^\perp$.

(b) *Es sei* $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$ *ein linearer Teilraum. Dann gilt* $\overline{\mathbf{L}} = \mathbf{H}$ *genau dann wenn* **kein** $x^* \in \mathbf{H}\backslash\{\Theta\}$ *existiert, so dass* $\langle x, x^*\rangle = 0$ *für alle* $x \in \mathbf{L}$ *gilt.*

Ein System $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots\} = \{b_n\}_{n=0}^\infty \subset \mathbf{H}$ heißt **linear unabhängig**, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. Das System B nennt man ein **Orthonormalsystem** (ONS), wenn $\langle b_j, b_k\rangle = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt. Man beachte, dass ein ONS automatisch linear unabhängig ist.

Folgerung 0.23 (Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren) *Es sei* $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ *ein linear unabhängiges System. Wir setzen*

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\langle b_0, b_0\rangle}}\, b_0\,.$$

Dann gilt $\langle a_0, a_0\rangle = 1$. *Wir bestimmen* $\beta_{10} \in \mathbb{C}$ *so, dass*

$$\widetilde{a}_1 = b_1 + \beta_{10} a_0$$

orthogonal zu a_0 *ist, d.h.* $\beta_{10} = -\langle b_1, a_0\rangle$. *Da* $\widetilde{a}_1 \ne \Theta$ *gilt, können wir*

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_1, \widetilde{a}_1\rangle}}\, \widetilde{a}_1$$

setzen. Sind $a_0, \dots, a_{m-1} \in \operatorname{span}\{b_0, \dots, b_{m-1}\}$ *so bestimmt, dass*

$$\langle a_j, a_k \rangle = \delta_{jk}\,, \quad j,k = 0,1,\dots,m-1\,,$$

gilt, so setzen wir

$$\widetilde{a}_m = b_m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} a_k \quad mit \quad \beta_{mk} = -\langle b_m, a_k \rangle$$

und

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{a}_m, \widetilde{a}_m \rangle}}\, \widetilde{a}_m\,.$$

Auf diese Weise erhalten wir ein ONS $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *mit der Eigenschaft*

$$\operatorname{span}\{a_0, \dots, a_n\} = \operatorname{span}\{b_0, \dots, b_n\}\,, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Folgerung 0.24 *Es seien* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein ONS inm Hilbertraum* $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{L}_m = \operatorname{span}\{e_0, \dots, e_m\}\,, \quad m = 0,1,2,\dots\,,$$

und

$$\mathbf{L} = \overline{\left\{ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k e_k : \alpha_k \in \mathbb{C},\, m = 0,1,2,\dots \right\}}\,.$$

Dann ist

$$\sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$$

die **beste Approximation** *an* $x \in \mathbf{H}$ *durch Elemente aus* $\mathbf{L}_m$. *Die Zahlen* $\gamma_k = \langle x, e_k \rangle$ *werden die* **Fourierkoeffizienten** *von* x *bzgl. des ONS* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *genannt. Dabei gilt die* **Bessel'sche Ungleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Ist $\mathbf{L} = \mathbf{H}$, *so gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \left\| x - \sum_{k=0}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0\,, \text{ d.h. } x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k\,,\ \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

In diesem Fall gilt die **Parseval'sche Gleichung**

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,,$$

und man nennt $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein* **vollständiges Orthonormalsystem** *(VONS) in* $\mathbf{H}$ *und die Abbildung* $\mathcal{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \ell^2,\ x \mapsto (\langle x, e_n \rangle)_{n=0}^{\infty}$ **Fouriertransformation**, *die wegen der Parsevalschen Gleichung ein* **isometrischer Isomorphismus** *ist.*

Folgerung 0.25 *Ist* $(e_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ *ein ONS im Hilbertraum* $\mathbf{H}$ *und gilt die Parsevalsche Gleichung für jedes* $x \in \mathbf{H}$, *so ist* $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ *ein VONS.*

Beispiel 0.26 *Das System* $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ *mit* $e_n = (\delta_{nk})_{k=0}^{\infty}$ *ist VONS in* ℓ^2.

Beispiel 0.27 *Wir versehen den Raum* $\mathbf{C}[-1,1] = \{f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig*$\}$ *der stetigen komplexwertigen Funktionen über dem Interval* $[-1,1]$ *mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dann ist $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ *mit*

$$T_0(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \textit{und} \quad T_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n \arccos x)\,, \ \ n = 1, 2, \ldots,$$

ein ONS in $\mathbf{H} = (\mathbf{C}[-1,1], \langle .,. \rangle)$, *wobei aber* **H kein** *Hilbertraum ist.*

0.7 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Definitionen (0.8) und (0.9) korrekt sind und durch (0.9) tatsächlich eine Norm auf $\mathcal{X}$ definiert wird.
2. Beweisen Sie Satz 0.20.
3. Welche der Räume aus Beispiel 0.7 sind Hilberträume?
4. Zeigen Sie, dass die Vervollständigung eines Raumes mit Skalarprodukt ein unitärer Raum ist.

Kapitel 1

Lineare Operatoren in normierten Räumen

1.1 Stetigkeit und Beschränktheit

Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ lineare Räume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder der komplexen Zahlen. Bekanntlich nennen wir eine Abbildung $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, $x \mapsto f(x)$ **linear**, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

gilt. Oft nennen wir eine solche lineare Abbildung auch **linearen Operator** und schreiben $f(x)$ in der Form Ax. Die Menge aller linearen Operatoren zwischen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ bezeichnen wir mit $L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Sie ist mit der Definition

$$(\alpha A + \beta B)x := \alpha(Ax) + \beta(Bx), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \ A, B \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

selbst wieder ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.

Satz 1.1 *Es seien $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{X}})$ und $(\mathbf{Y}, \|.\|_{\mathbf{Y}})$ zwei normierte Räume über $\mathbb{K}$ sowie $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist eine stetige Abbildung.*

(b) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist im Punkt Θ stetig.*

(c) *Es existiert eine Konstante $M \geq 0$ mit der Eigenschaft*

$$\|Ax\|_{\mathbf{Y}} \leq M \|x\|_{\mathbf{X}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}. \tag{1.1}$$

(d) $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *ist gleichmäßig stetig.*

Wenn es nicht zu Missverständnissen kommen kann, verzichten wir im weiteren auf die Indizierung der Normen.

Die Menge der Operatoren $A \in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, für die eine (und somit jede) der Aussagen (a)-(d) des Satzes 1.1 erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Definieren wir für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$

$$\|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}} := \sup\left\{\|Ax\| : x \in \mathbf{X},\ \|x\| \le 1\right\}, \tag{1.2}$$

so wird $(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}})$ zu einem normierten Raum, dem Raum der **beschränkten linearen Operatoren**. Die Zahl $\|A\| = \|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}$ ist die kleinste aller Zahlen M, für die $\|Ax\| \le M\,\|x\|$ $\forall\, x \in \mathbf{X}$ gilt.

Satz 1.2 *Ist $\mathbf{Y}$ ein Banachraum, so ist auch $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ ein Banachraum.*

Beispiel 1.3 *Wir betrachten den Operator $A : \left(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_j\right) \longrightarrow \left(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_k\right)$ mit*

$$(Af)(t) = t f(t)\,, \quad 0 \le t \le 1\,,$$

für

$$\|f\|_1 = \max\left\{|f(t)| : t \in [0,1]\right\} \quad \textit{und} \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}\,.$$

Die Elemente von $L(\mathbf{X},\mathbb{K})$ nennt man **lineare Funktionale**. Der Raum $(\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbb{K}), \|.\|_{\mathbf{X}\to\mathbb{K}})$ der linearen stetigen Funktionale heißt **dualer Raum** zu $\mathbf{X}$ und wird mit $\mathbf{X}^*$ bezeichnet. Ist $f \in \mathbf{X}^*$, so schreibt man für $f(x)$, $x \in \mathbf{X}$, auch $\langle x, f\rangle$.

Theorem 1.4 (Riesz'sches Darstellungstheorem) *Es seien $\mathbf{H}$ ein unitärer Raum und $f \in \mathbf{H}^*$. Dann existiert genau ein $x_f \in \mathbf{H}$, so dass*

$$f(x) = \langle x, x_f\rangle \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Dabei gilt $\|f\|_{\mathbf{H}^*} = \|x_f\|_{\mathbf{H}}$.

Man kann also $\mathbf{H}^*$ mit $\mathbf{H}$ identifizieren.

Zwei normierte Räume $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ nennt man zueinander **isometrisch isomorph**, wenn ein linearer isometrischer Operator $U : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ (d.h. $\|Ux_1 - Ux_2\| = \|x_1 - x_2\|\ \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$) mit $U(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$ existiert. Zueinander isometrisch isomorphe Räume werden oft miteinander identifiziert.

Beispiel 1.5 *Es gilt $c_0^* = \ell^1$, $(\ell^1)^* = \ell^\infty$ und $(\ell^p)^* = \ell^q$, wobei $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

1.2 Das Theorem von Banach-Steinhaus

Lemma 1.6 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ normierte Räume und $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ eine Familie linearer stetiger Operatoren, die auf $\mathbf{X}$ punktweise beschränkt ist, d.h.*

$$\sup\left\{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}\right\} < \infty \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Existieren ein $x^* \in \mathbf{X}$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$M(x^*,\varepsilon) := \sup\left\{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}\,, x \in \mathbf{X}\,, \|x - x^*\| \le \varepsilon\right\} < \infty$$

gilt, so ist $\sup\left\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\right\} < \infty$.

Das folgende Theorem konstatiert ein fundamentales Resultat der Funktionalanalysis, das **Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit**.

Theorem 1.7 *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum und* $\mathbf{Y}$ *ein normierter Raum. Ist eine Familie* $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *linearer stetiger Operatoren punktweise beschränkt auf* $\mathbf{X}$, *so ist* $\mathcal{F}$ *gleichmäßig beschränkt, d.h.* $\sup\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Für Folgen $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ linearer beschränkter Operatoren unterscheiden wir drei Konvergenzbegriffe:

- **Normkonvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = 0$
  (in Zeichen: $A = \lim_{n\to\infty} A_n$)
- **starke Konvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\|_{\mathbf{Y}} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$
  (in Zeichen: $A_n \longrightarrow A$)
- **schwache Konvergenz**: $\exists\, A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \lim_{n\to\infty} f(A_n x) = f(Ax) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,, \quad \forall\, f \in \mathbf{Y}^*$
  (in Zeichen: $A_n \rightharpoonup A$)

Bemerkung 1.8 *Aus der Normkonvergenz folgt die starke Konvergenz, aus der starken Konvergenz die schwache.*

Satz 1.9 (Banach-Steinhaus) *Es seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume,* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ *eine in* $\mathbf{X}$ *dichte Teilmenge und* $A_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $n \in \mathbb{N}$. *Die Folge* $(A_n)_{n=1}^\infty$ *konvergiert genau dann stark, wenn* $(A_n x)_{n=1}^\infty$ *für jedes* $x \in \mathbf{X}_0$ *eine Cauchyfolge und die Zahlenfolge* $(\|A_n\|)_{n=1}^\infty$ *beschränkt sind.*

1.3 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ die Gleichungen (vgl. (1.2))
$$\|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}} = \sup\{\|Ax\| : x \in \mathbf{X},\ \|x\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbf{X} \setminus \{\Theta\}\right\}$$
gelten.

2. Sind folgende Operatoren linear und stetig? Berechnen Sie gegebenenfalls deren Norm.
   (a) $V : \ell^p \longrightarrow \ell^p\,,\ (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$
   (b) $\mathcal{J} : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ f(t) \mapsto \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$
   (c) $\mathcal{D}_0 : \mathbf{C}^{(1)}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ f \mapsto f'$
   (d) $\mathcal{D}_1 : \left(\mathbf{C}^{(1)}[0,1], \|.\|_\infty\right) \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ f \mapsto f'$
   (e) $T : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]\,,\ (Tf)(t) = \displaystyle\int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds$, wobei $k : [0,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion sei.

3. Unter welchen Voraussetzungen an die Zahlen α_{jk} , $j,k = 0,1,2,\dots$, ist der Operator
$$A : \ell^p \longrightarrow \ell^q\,, \quad \xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto \left(\sum_{k=0}^\infty \alpha_{nk}\xi_k\right)_{n=0}^\infty$$
stetig?

4. Wie kann man den dualen Raum c_{00}^* beschreiben?

5. Ist $f : c_{00} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^\infty \xi_n$ ein lineares stetiges Funktional?

6. Es seien λ_{nk} und $t_{nk} \in [0,1]$, $k = 1,2,\dots,n$, $n = 1,2,\dots$, gegebene Zahlen mit folgenden Eigenschaften:
   - $\sup\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^n |\lambda_{nk}| : n = 1,2,\dots\right\} < \infty$,
   - $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_{nk} p(t_{nk}) = \int_0^1 p(t)\,dt$
     für jedes Polynom $p(t)$, dessen Grad kleiner n ist, $n = 1,2,\dots$

   Man zeige, dass dann
   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} f(t_{nk}) = \int_0^1 f(t)\,dt$$
   für jede stetige Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt.

1.4 Invertierbare Operatoren

Es seien $\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}$ normierte Räume über dem Zahlenkörper $\mathbb{K}$ und $A \in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $B \in L(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$. Unter dem Produkt BA der Operatoren A und B versteht man die Abbildung $BA : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Z}$, $x \mapsto (B\circ A)x = B(Ax)$, d.h. die Verknüpfung der beiden Abbildungen $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ und $B : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$. Offenbar ist dann auch $BA \in L(\mathbf{X},\mathbf{Z})$. Folgendes ist leicht einzusehen:

- Sind $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, so gilt auch $BA \in \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Z})$, wobei
$$\|BA\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Z}} \le \|B\|_{\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}}\,\|A\|_{\mathbf{X}\to\mathbf{Y}}\,.$$
- Ist außerdem $C \in L(\mathbf{Z},\mathbf{W})$, so gilt $C(BA) = (CB)A$.
- Sind $A, A_1, A_2 \in L(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ und $B, B_1, B_2 \in L(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ sowie $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{K}$, so gilt
$$B(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) = \alpha_1(BA_1) + \alpha_2(BA_2)$$
und
$$(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A = \alpha_1(B_1 A) + \alpha_2(B_2 A)\,.$$
- Die Abbildung $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \times \mathcal{L}(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Z})$, $(A,B) \mapsto BA$ ist stetig.

Beschreibt der Operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ eine bijektive Abbildung, so bezeichnen wir mit $A^{-1} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ den Operator, der die entsprechende Umkehrabbildung realisiert. Es gilt dann also $A^{-1}A = I_{\mathbf{X}}$ und $AA^{-1} = I_{\mathbf{Y}}$, wobei $I_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}$, $x \mapsto x$ die identische Abbildung in $\mathbf{X}$ ist. In diesem Fall nennen wir den Operator $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ **invertierbar** und $A^{-1} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$ den zu A **inversen Operator**.

Lemma 1.10 *Ist $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ invertierbar, so ist $A^{-1} \in L(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.*

Mit $N(A)$ bezeichnen wir den **Nullraum** des linearen Operators A (auch **Kern** von A genannt),

$$N(A) = \{x \in \mathbf{X} : Ax = \Theta_{\mathbf{Y}}\} \ .$$

Lemma 1.11 *Ein Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ realisiert genau dann eine injektive Abbildung $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, wenn $N(A) = \{\Theta_{\mathbf{X}}\}$ gilt.*

Gilt $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, so nennen wir den Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ **stetig invertierbar**. Die Menge der stetig invertierbaren Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bezeichnen wir mit $G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Satz 1.12 *Ist $\mathbf{X}$ ein Banachraum, so ist $I_{\mathbf{X}} - E \in G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ für alle $E \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ mit $\|E\| < 1$. Dabei gilt*

$$(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E^n \quad \textit{und} \quad \left\|(I_{\mathbf{X}} - E)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|} \ .$$

Folgerung 1.13 *Ist $\mathbf{Y}$ ein Banachraum, so ist $G\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

Lemma 1.14 *Ein Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ist genau dann stetig invertierbar, wenn $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ eine surjektive Abbildung ist und wenn eine Konstante $m > 0$ existiert, so dass $\|Ax\| \geq m\,\|x\|$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt.*

Im nächsten Abschnitt lernen wir den **Satz von Banach** kennen, welcher besagt, dass jeder bijektive lineare und beschränkte Operator zwischen Banachräumen auch stetig invertierbar ist.

1.5 Das Theorem vom abgeschlossenen Graphen

Definition 1.15 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ normierte Räume. Ein Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ heißt* **abgeschlossen**, *wenn aus $x_n \longrightarrow x$ und $Ax_n \longrightarrow y$ folgt $Ax = y$. Das ist gleichbedeutend damit, dass der Graph $\{(x, Ax) : x \in \mathbf{X}\}$ des Operators A eine abgeschlossene Menge in $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ ist.*

Ein weiteres fundamentales Prinzip der Funktionalanalysis (nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit) wird im folgenden **Theorem vom abgeschlossenen Graphen** formuliert.

Theorem 1.16 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume. Ist ein Operator $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ abgeschlossen, so ist er stetig.*

Der Satz von Banach ist nun eine leichte Folgerung.

Satz 1.17 (Banach) *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume. Realisiert der Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ eine bijektive Abbildung $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$, so ist er stetig invertierbar.*

Wir erinnern an die Definition der Äquivalenz von Normen: Man nennt zwei Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ auf einem linearen Raum $\mathbf{X}$ zueinander **äquivalent**, falls positive Konstanten c_1, c_2 existieren, so dass

$$c_1 \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2 \|x\|_1 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}$$

gilt.

Folgerung 1.18 *Es seien $(\mathbf{X}, \|x\|_1)$ und $(\mathbf{X}, \|x\|_2)$ Banachräume und aus der $\|.\|_1$-Konvergenz folge die $\|.\|_2$-Konvergenz. Dann sind die zwei Normen zueinander äquivalent.*

1.6 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass der Operator $\mathcal{D}_1$ aus Aufgabe 2,(d), Abschnitt 1.3 abgeschlossen ist.

2. Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume und $A \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Ferner sei $\mathbf{Y}_0^* \subset \mathbf{Y}^*$ eine Menge von Funktionalen, die die Punkte von $\mathbf{Y}$ separiert, d.h., für zwei beliebige Punkte $y_1, y_2 \in \mathbf{Y}$ mit $y_1 \neq y_2$ existiert ein Funktional $f \in \mathbf{Y}_0^*$, so dass $f(y_1) \neq f(y_2)$. Man zeige: Ist die Abbildung $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(Ax)$ für jedes $f \in \mathbf{Y}_0^*$ stetig, so ist auch $A : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ stetig.

3. Auf dem Raum $\mathbf{C}[0,1]$ der stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ sei eine Norm $\|.\|_0$ gegeben, so dass $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_0)$ ein Banachraum ist und dass aus $\|f_n - f\|_0 \longrightarrow 0$, $f_n, f \in \mathbf{C}[0,1]$, folgt $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Man zeige, dass $\|.\|_0$ zu $\|.\|_\infty$ äquivalent ist.

4. Es seien $\mathbf{X}$ ein Banachraum und $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ ein in $\mathbf{X}$ **stetig eingebetteter** Banachraum, d.h. der Einbettungsoperator $\mathcal{E} : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{X}$, $y \mapsto y$ ist stetig. Ferner seien $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ und $Ay \in \mathbf{Y}\ \forall\, y \in \mathbf{Y}$. Man zeige, dass dann $A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ gilt.

1.7 Faktorräume

Es sei $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum des normierten Raumes $\mathbf{X}$. Dann wird auf $\mathbf{X}$ durch "$x \sim y \iff x - y \in \mathbf{M}$" eine Äquivalenzrelation definiert. Die entsprechenden Äquivalenzklassen sind von der Form

$$[x]_\sim = x + \mathbf{M} := \{x + z : z \in \mathbf{M}\}\,, \quad x \in \mathbf{X}\,.$$

Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen heißt **Faktorraum** von $\mathbf{X}$ bez. $\mathbf{M}$ und wird mit $\mathbf{X}/\mathbf{M}$ bezeichnet. Wir definieren

$$\|[x]_\sim\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}} = \inf\left\{\|x + z\|_{\mathbf{X}} : z \in \mathbf{M}\right\}\,, \quad x \in \mathbf{X}\,,$$

und

$$\alpha[x]_\sim + \beta[y]_\sim = [\alpha x + \beta y]_\sim\,, \quad x, y \in \mathbf{X},\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\,.$$

Man nennt eine Abbildung zwischen metrischen Räumen eine **offene Abbildung**, wenn das Bild jeder offenen Menge offen ist.

Satz 1.19 *Für die obige Konstruktion gelten folgende Aussagen:*

(a) $\left(\mathbf{X}/\mathbf{M}, \|.\|_{\mathbf{X}/\mathbf{M}}\right)$ *ist ein normierter Raum.*

(b) *Die Faktorabbildung* $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}/\mathbf{M}$, $x \mapsto [x]_\sim$ *ist stetig und offen.*

(c) *Ist* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum, so auch* $\mathbf{X}/\mathbf{M}$.

Beispiel 1.20 *Es seien* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $\mathbf{M} = N(A)$. *Dann ist die Abbildung*

$$\widetilde{A} : \mathbf{X}/\mathbf{M} \longrightarrow A(\mathbf{X}), \ [x]_\sim \mapsto Ax$$

linear, stetig und bijektiv.

Beispiel 1.21 *Wir wählen* $\mathbf{X} = \mathbf{C}[0,1]$, $t_0 \in [0,1]$, $\mathbf{M} = \{f \in \mathbf{X} : f(t_0) = 0\}$ *und beschreiben* $\mathbf{X}/\mathbf{M}$.

Satz 1.22 (Open Mapping Theorem) *Es seien* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume. Ist die Abbildung* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *surjektiv, so ist sie auch offen.*

Als Folgerung aus diesem Satz ergibt sich unter Verwendung von Satz 0.5,(c) wiederum der Satz von Banach (Satz 1.17).

1.8 Das Theorem von Hahn-Banach

Hier lernen wir nun das letzte der drei fundamentalen Prinzipien der Funktionalanalysis kennen, das Theorem von Hahn-Banach, welches sich mit dem Problem der Fortsetzung linearer stetiger Funktionale von linearen Teilräumen auf den gesamten normierten Raum befasst. Zur Vorbereitung auf seinen Beweis beleuchten wir einige Grundlagen der Mathematik, die im Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom von Zermelo stehen.

Eine beliebige (nichtleere) Menge $\mathcal{A}$ heißt **partiell geordnet** (mit der Ordnungsrelation $\le$), wenn

(O1) $a \le a \ \forall\, a \in \mathcal{A}$,

(O2) aus $a \le b$ und $b \le a$ stets $a = b$ folgt,

(O3) aus $a \le b$ und $b \le c$ stets $a \le c$ folgt.

Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ nennt man **linear geordnet**, wenn für ein beliebiges Paar $(a,b) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ wenigstens eine der Relationen $a \le b$ oder $b \le a$ gilt. Eine linear geordnete Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ heißt **maximal**, wenn für jede linear geordnete Teilmenge $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ die Gleichheit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ folgt.

Axiom: *Jede partiell geordnete Menge besitzt eine maximale linear geordnete Teilmenge.*

Ein Element $b_0 \in \mathcal{A}$ nennt man **obere Schranke** der Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, wenn $b \le b_0$ für alle $b \in \mathcal{B}$ gilt. Ein Element $a_0 \in \mathcal{A}$ heißt **maximal**, wenn aus $a_0 \le a$ stets $a_0 = a$ folgt.

Lemma 1.23 (Zorn) *Besitzt jede linear geordnete Teilmenge einer partiell geordneten Menge* $\mathcal{A}$ *eine obere Schranke, so existiert in* $\mathcal{A}$ *ein maximales Element.*

Lemma 1.24 (Zermelo) *Es sei* $\{\mathcal{M}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ *ein beliebiges System nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Menge* $\mathcal{M}$ *mit der Eigenschaft* $\mathcal{M} = \{m_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$, *wobei* $m_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ *für alle* $\alpha \in \mathcal{I}$.

Lemma 1.24 wird auch **Auswahlaxiom** genannt und ist zu obigem Axiom, welches auch **Maximalkettensatz** heißt, äquivalent. Wir verweisen noch auf das Theorem von Zermelo, welches mittels des Zornschen Lemmas bewiesen werden kann. Eine linear geordnete Menge $\mathcal{N}$ nennt man **wohlgeordnet** oder **vollständig geordnet**, wenn jede nichtleere Teilmenge von $\mathcal{N}$ ein kleinstes Element enthält.

Theorem 1.25 (Zermelo) *Auf jeder nichtleeren Menge* $\mathcal{N}$ *kann man eine Ordnung einführen, bezüglich der* $\mathcal{N}$ *wohlgeordnet ist.*

Nun zum Theorem von Hahn-Banach. Es sei $\mathbf{X}$ ein Vektorraum. Eine Abbildung $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ nennt man **sublineares Funktional**, wenn folgende zwei Eigenschaften erfüllt sind:

(L1) $p(x+y) \le p(x) + p(y) \;\; \forall\, x, y \in \mathbf{X}$,

(L2) $p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \;\; \forall\, x \in \mathbf{X}, \forall\, \alpha \ge 0$.

Die Abbildung $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_{\mathbf{X}}$ ist ein Beispiel für ein sublineares Funktional. Wir beweisen zuerst die reelle Version des Theorems von Hahn-Banach.

Theorem 1.26 (Hahn-Banach) *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein reeller Vektorraum und* $p : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ein sublineares Funktional sowie* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *ein linearer Teilraum. Ist* $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ein lineares Funktional mit der Eigenschaft* $f(x) \le p(x) \; \forall\, x \in \mathbf{M}$, *so existiert ein lineares Funktional* $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, *welches den Bedingungen* $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{M}$, *und* $F(x) \le p(x)$, $x \in \mathbf{X}$, *genügt.*

Sind nun $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $F = f + \mathbf{i}g \in L(\mathbf{X}, \mathbb{C})$ mit $f = \mathsf{Re}\, F$, $g = \mathsf{Im}\, F$, so folgt aus $F(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}F(x)$, dass $f(\mathbf{i}x) + \mathbf{i}g(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}f(x) - g(x)$ und somit $f(\mathbf{i}x) = -g(x)$. Es folgt $F(x) = f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x)$. Ist umgekehrt F von dieser Gestalt mit einem $\mathbb{R}$-linearen Funktional $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, so ist $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x)$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf $\mathbf{X}$.

Theorem 1.27 (Hahn-Banach) *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein normierter Raum über* $\mathbb{K}$ *und* $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ *ein linearer Teilraum von* $\mathbf{X}$. *Ist* $f : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbb{K}$ *ein lineares Funktional mit* $|f(x)| \le \|x\|$, $x \in \mathbf{M}$, *so existiert ein lineares Funktional* $F : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ *mit* $F(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{M}$, *und* $|F(x)| \le \|x\|$, $x \in \mathbf{X}$.

Ist ein normierter Raum $\mathbf{Y}$ stetig in einen normierten Raum $\mathbf{X}$ eingebettet, so ist leicht zu sehen, dass $\mathbf{X}^*$ stetig in $\mathbf{Y}^*$ eingebettet ist. Die erste Folgerung 1.28 aus dem Theorem von Hahn-Banach zeigt, dass für einen linearen Teilraum $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ mit der durch $\mathbf{X}$ induzierten Norm der duale Raum $\mathbf{X}_0^*$ “nicht größer” als $\mathbf{X}^*$ ist.

Folgerung 1.28 *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein normierter Raum und* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ *ein linearer Teilraum von* $\mathbf{X}$, *versehen mit der durch* $\mathbf{X}$ *induzierten Norm. Ist* $f_0 \in \mathbf{X}_0^*$, *so existiert ein* $f \in \mathbf{X}^*$ *mit* $f(x) = f_0(x)$, $x \in \mathbf{X}_0$, *und* $\|f\|_{\mathbf{X}^*} = \|f_0\|_{\mathbf{X}_0^*}$.

Folgerung 1.29 *Es seien* $\mathbf{X}$ *ein normierter Raum,* $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ *ein linearer Teilraum von* $\mathbf{X}$ *und* $x_0 \in \mathbf{X}$, *wobei* $d := \operatorname{dist}(x_0, \mathbf{X}_0) > 0$. *Dann existiert ein* $f_0 \in \mathbf{X}^*$ *mit* $\|f_0\|_{\mathbf{X}^*} = 1$, $f_0(x) = 0$ $\forall\, x \in \mathbf{X}_0$ *und* $f_0(x_0) = d$.

Folgerung 1.30 *Sind* $\mathbf{X}$ *ein normierter Raum und* $x_0 \in \mathbf{X} \setminus \{\Theta\}$, *so existiert ein Funktional* $f_0 \in \mathbf{X}^*$, *so dass* $\|f_0\|_{\mathbf{X}^*} = 1$ *und* $f(x_0) = \|x_0\|_{\mathbf{X}}$ *gilt. Insbesondere trennen die Funktionale aus* $\mathbf{X}^*$ *die Punkte von* $\mathbf{X}$.

Folgerung 1.30 nennt man auch den **Satz über die ausreichende Anzahl von Funktionalen**.

Folgerung 1.31 *Ist* $\mathbf{X}$ *ein normierter Raum, so gilt für jedes* $x \in \mathbf{X}$

$$\|x\|_{\mathbf{X}} = \sup\left\{|f(x)| : f \in \mathbf{X}^*, \ \|f\|_{\mathbf{X}^*} \le 1\right\} .$$

Wir zeigen nun, dass man die Aussage des Satzes 1.2 umkehren kann.

Satz 1.32 *Ist* $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *ein Banachraum, so ist auch* $\mathbf{Y}$ *ein Banachraum.*

Jedes $x \in \mathbf{X}$ erzeugt über die Formel $j_x(f) = f(x)$ ein lineares stetiges Funktional $j_x : \mathbf{X}^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Folgerung 1.31 liefert sogar

$$\|j_x\| = \sup\left\{|f(x)| : f \in \mathbf{X}^*, \ \|f\|_{\mathbf{X}^*} \le 1\right\} = \|x\|_{\mathbf{X}} . \tag{1.3}$$

$J_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \longrightarrow (\mathbf{X}^*)^* =: \mathbf{X}^{**}$, $x \mapsto j_x$ ist also eine lineare Isometrie. Man nennt den normierten Raum $\mathbf{X}$ **reflexiv**, wenn $J_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{**}$ gilt. $\mathbf{X}^{**}$ nennt man den **bidualen Raum** zu $\mathbf{X}$. Aus Satz 1.2 folgt, dass ein reflexiver normierter Raum mit Notwendigkeit ein Banachraum ist.

Satz 1.33 *Jeder abgeschlossene lineare Teilraum eines reflexiven normierten Raumes ist ebenfalls reflexiv.*

Für Teilmengen $Y \subset \mathbf{X}$ und $Y_* \subset \mathbf{X}^*$ definieren wir

$$Y^\perp = \{f \in \mathbf{X}^* : f(y) = 0 \quad \forall\, y \in Y\} \quad \text{und} \quad {}^\perp Y_* = \{x \in \mathbf{X} : f(x) = 0 \quad \forall\, f \in Y_*\} .$$

Man nennt nun einen abgeschlossenen linearen Teilraum $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$ **gesättigt**, wenn für jedes $f \in \mathbf{X}^* \setminus \mathbf{Y}_*$ ein $x \in {}^\perp\mathbf{Y}_*$ mit der Eigenschaft $f(x) \neq 0$ existiert. Aus Folgerung 1.29 ergibt sich, dass jeder abgeschlossene Teilraum $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$ im Falle eines reflexiven normierten Raumes $\mathbf{X}$ gesättigt ist.

Lemma 1.34 *Ein Teilraum* $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$ *ist genau dann gesättigt, wenn eine Teilmenge* $Y \subset \mathbf{X}$ *existiert, so dass* $\mathbf{Y}_* = Y^\perp$ *gilt.*

Folgerung 1.35 *Ein Teilraum* $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$ *ist genau dann gesättigt, wenn* $\mathbf{Y}_* = ({}^\perp\mathbf{Y}_*)^\perp$ *gilt.*

Eine Teilmenge $Y_* \subset \mathbf{X}^*$ nennen wir ***schwach abgeschlossen**, wenn aus $f \in \mathbf{X}^*$ und aus der Tatsache, dass für jedes $x \in \mathbf{X}$ eine Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset Y_*$ mit der Eigenschaft $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ existiert, folgt, dass $f \in Y_*$ gilt.

Satz 1.36 *Ein linearer Teilraum* $\mathbf{Y}_* \subset \mathbf{X}^*$ *ist genau dann gesättigt, wenn er* **schwach abgeschlossen ist.*

Satz 1.37 *Ein Banachraum* $\mathbf{X}$ *ist genau dann reflexiv, wenn jeder abgeschlossene lineare Teilraum von* $\mathbf{X}^*$ *gesättigt ist.*

Abschließend beleuchten wir noch die Eigenschaft der Separabilität von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{X}^*$.

Satz 1.38 *Ist* $\mathbf{X}^*$ *separabel, so gilt dies auch für* $\mathbf{X}$.

Folgerung 1.39 *Ist* $\mathbf{X}$ *reflexiv und separabel, so hat auch* $\mathbf{X}^*$ *diese Eigenschaften.*

1.9 Schwache und *schwache Konvergenz

Es sei $\mathbf{X}$ ein Banachraum. Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}^*$ heißt ***schwach konvergent** gegen $f \in \mathbf{X}^*$, wenn $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt.

Lemma 1.40 *Eine *schwach konvergente Folge ist beschränkt.*

Folgerung 1.41 *Eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann *schwach gegen $f \in \mathbf{X}^*$, wenn $(\|f_n\|)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist und $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ für alle x aus einer in $\mathbf{X}$ dichten Teilmenge gilt.*

Theorem 1.42 *Ist $\mathbf{X}$ separabel, so besitzt jede beschränkte Folge in $\mathbf{X}^*$ eine *schwach konvergente Teilfolge.*

Man nennt eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{X}$ **schwach konvergent** gegen $x \in \mathbf{X}$, wenn die Bedingung $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ für alle $f \in \mathbf{X}^*$ gilt (in Zeichen: $x_n \rightharpoonup x$).

Lemma 1.43 *Eine schwach konvergente Folge ist beschränkt.*

Folgerung 1.44 *Eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann schwach gegen $x \in \mathbf{X}$, wenn $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist und $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ für alle f aus einer in $\mathbf{X}^*$ dichten Teilmenge gilt.*

Theorem 1.45 *In einem reflexiven normierten Raum hat jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

1.10 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass jeder endlichdimensionale Teilraum von $\mathbf{X}^*$ gesättigt ist.
2. Man zeige, dass jeder endlichdimensionale normierte Raum reflexiv ist.

Kapitel 2

Banachalgebren

2.1 Grundlagen

Definition 2.1 *Ein Banachraum $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ wird* **Banachalgebra** *genannt, wenn $\mathcal{A}$ nicht nur aus dem Nullelement besteht, eine Abbildung $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, $(a,b) \mapsto ab$ erklärt ist und ein Element $e \in \mathcal{A}$ existiert, so dass folgende Axiome erfüllt sind: $\forall\, a,b,c \in \mathcal{A}$ und $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

(B1) $(\alpha a + \beta b)c = \alpha(ac) + \beta(bc)\,,\ c(\alpha a + \beta b) = \alpha(ca) + \beta(cb)\,,$

(B2) $a(bc) = (ab)c\,,$

(B3) $ea = ae = a\,,$

(B4) $\|ab\| \le \|a\|\,\|b\|\,.$

Man spricht von einer **kommutativen Banachalgebra** *$\mathcal{A}$, wenn $ab = ba$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt.*

Das Element e heißt **Einselement** und ist eindeutig bestimmt. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ nennt man **regulär**, wenn ein Element b existiert, so dass $ab = ba = e$ gilt. Das Element b ist dann eindeutig bestimmt, wird mit a^{-1} bezeichnet und **Inverses** von a genannt. Die Menge der regulären Elemente von $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $G\mathcal{A}$. Unter der **Resolvente** $\rho(a)$ eines Elementes $a \in \mathcal{A}$ versteht man die Menge der Skalare $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $a - \lambda e$ regulär ist. Das **Spektrum** $\sigma(a)$ ist definiert als $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$.

Theorem 2.2 *Es seien $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra und $a \in \mathcal{A}$.*

(a) *Ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| < \infty$, so ist $e - a \in G\mathcal{A}$ und es gilt*

$$(e-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,. \tag{2.1}$$

(b) *Ist $\|a\| < 1$, so ist $e - a \in G\mathcal{A}$ und es gilt* (2.1).

(c) *Der Grenzwert $r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$ existiert und ist endlich. Dabei gilt*

$$r(a) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \qquad (\textbf{Spektralradius}\ \textit{von}\ a).$$

(d) *Für $|\zeta| > r(a)$ ist $\zeta e - a$ regulär, und es gilt*

$$(\zeta e - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} a^n \,.$$

(e) *Die Resolvente $\rho(a)$ ist eine offene Menge in $\mathbb{C}$.*

Theorem 2.3 *Ist $p(\zeta)$ ein Polynom in ζ, so gilt für jedes $a \in \mathcal{A}$*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\} \,.$$

Satz 2.4 *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ ist $\sigma(a)$ nicht leer.*

Beispiel 2.5 *Ist $\mathbf{X}$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$, so ist $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ eine Banachalgebra.*

Beispiel 2.6 *Ist $\mathbf{E}$ ein kompakter metrischer Raum, so ist der Raum $\left(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\right)$ der komplexwertigen stetigen Funktionen auf $\mathbf{E}$ mit $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbf{E}\}$ eine kommutative Banachalgebra.*

2.2 Kommutative Banachalgebren

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra.

Ein lineares Funktional $m \in L(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ nennt man **multiplikativ**, wenn $m \neq \Theta$ und

$$m(ab) = m(a)m(b) \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}$$

gilt. Die Menge der linearen multiplikativen Funktionale auf $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $\mathbf{M}_{\mathcal{A}}$.

Lemma 2.7 *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ gilt $\{m(a) : m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}\} \subset \sigma(a)$.*

Ein linearer Teilraum $\mathcal{N}$ von $\mathcal{A}$ heißt **Ideal**, wenn aus $a \in \mathcal{N}$ und $b \in \mathcal{A}$ folgt $ab \in \mathcal{N}$. Man nennt das Ideal $\mathcal{N}$ **maximal**, wenn jedes $a \in \mathcal{A}$ auf eindeutige Weise in der Form $a = a_0 + \lambda e$, $a_0 \in \mathcal{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, darstellbar ist.

Beispiel 2.8 *Ist $E_0 \subset \mathbf{E}$ eine Teilmenge des kompakten metrischen Raumes $\mathbf{E}$, so ist*

$$\mathcal{N}(E_0) = \{f \in \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}) : f(x) = 0\,,\ x \in E_0\}$$

ein Ideal in $\left(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\right)$. Dieses Ideal ist genau dann maximal, wenn E_0 aus genau einem Punkt $x_0 \in \mathbf{E}$ besteht.

Beispiel 2.9 *Ist $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$, so ist $N(m) = \{a \in \mathcal{A} : m(a) = 0\}$ ein maximales Ideal.*

Satz 2.10 *Jedes Ideal $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$ ist in einem maximalen Ideal enthalten.*

Beispiel 2.9 kann man in gewisser Weise umkehren, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.11 *Ist $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$ ein Ideal, so existiert ein $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ mit der Eigenschaft $\mathcal{N} \subset N(m)$.*

Theorem 2.12 *Für jedes $a \in \mathcal{A}$ gilt $\sigma(a) = \{m(a) : m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}\}$.*

Wir listen noch einige Eigenschaften maximaler Ideale bzw. linearer multiplikativer Funktionale auf.

Satz 2.13 *In einer kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$ gilt:*

(a) *Jedes maximale Ideal ist abgeschlossen.*

(b) *Aus $m \in \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$ folgt $m \in \mathcal{A}^*$ und $\|m\| \le 1$.*

(c) *Das Ideal $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{N} \neq \mathcal{A}$, ist genau dann maximal, wenn für jedes Ideal $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ mit $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}$ und $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ folgt $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.*

2.3 Übungsaufgaben

1. Es sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$, der die Axiome (B1), (B2) und (B4) erfüllt und kein Einselement besitzt. Man zeige, dass dann die Menge

$$\mathcal{A} = \{(\beta, b) : \beta \in \mathbb{C},\ b \in \mathcal{B}\}$$

mit den Verknüpfungen

$$(\beta, b) + (\gamma, c) = (\beta + \gamma, b + c), \quad \alpha(\beta, b) = (\alpha\beta, \alpha b), \quad (\beta, b)(\gamma, c) = (\beta\gamma, bc + \beta c + \gamma b)$$

und der Norm

$$\|(\beta, b)\|_{\mathcal{A}} = |\beta| + \|b\|_{\mathcal{B}}$$

eine Banachalgebra ist.

2. Ist

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ \xi = (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} : \xi_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n| < \infty \right\}$$

mit der Norm $\|\xi\| = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\xi_n|$ und der Multiplikation

$$\xi * \eta = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k}\eta_k \right)_{n=-\infty}^{\infty}$$

eine Banachalgebra?

3. Es sei $(\Gamma, \cdot)$ mit $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ eine endliche Gruppe. Mit $L_1(\Gamma)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ und versehen diese mit der linearen Struktur

$$(\alpha f + \beta g)(\gamma) = \alpha f(\gamma) + \beta g(\gamma), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \gamma \in \Gamma,$$

der Multiplikation

$$(f * g)(\gamma_k) = \sum_{j=1}^{n} f(\gamma_k \gamma_j^{-1}) g(\gamma_j)$$

und der Norm $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |f(\gamma_k)|$. Ist $L_1(\Gamma)$ eine Banachalgebra?

4. Man zeige, dass die Abschließung jedes Ideals wieder ein Ideal ist.

5. Mit $\mathcal{R}$ bezeichnen wir den Durchschnitt aller maximalen Ideale der kommutativen Banachalgebra $\mathcal{A}$, das sogenannte **Radikal** von $\mathcal{A}$. Man nennt $\mathcal{A}$ **halbeinfach**, wenn $\mathcal{R} = \{\Theta\}$ ist. Man zeige:

   (a) Ist $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal, so ist die Faktoralgebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ eine kommutative Banachalgebra ($[a][b] := [ab]$).

   (b) $\mathcal{A}/\mathcal{R}$ ist halbeinfach.

   (c) $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ ist isomorph zu $\mathbb{C}$, falls $\mathcal{M}$ ein maximales Ideal ist. Bezeichnet $j_{\mathcal{M}} : \mathcal{A}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ den entsprechenden Isomorphismus, so hat die Abbildung $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto [a]_{\mathcal{M}} = a + \mathcal{M} \mapsto j_{\mathcal{M}}([a]_{\mathcal{M}}) =: a(\mathcal{M})$ folgende Eigenschaften:

      i. $(a+b)(\mathcal{M}) = a(\mathcal{M}) + b(\mathcal{M})$,
      ii. $(\alpha a)(\mathcal{M}) = \alpha\, a(\mathcal{M})$,
      iii. $(ab)(\mathcal{M}) = a(\mathcal{M}) b(\mathcal{M})$,
      iv. $a(\mathcal{M}) = 0 \iff a \in \mathcal{M}$,
      v. $e(\mathcal{M}) = 1$,
      vi. $|a(\mathcal{M})| \le \|a\|$.

   (d) Mit $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ bezeichnen wir die Menge der maximalen Ideale in $\mathcal{A}$. Für $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$ definieren wir $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto a(\mathcal{M})$. Man zeige, dass die Abbildung $\mathbf{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbf{M}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{M} \mapsto f_{\mathcal{M}}$ eine bijektive Abbildung ist.

2.4 Der Raum der maximalen Ideale

Definition 2.14 *Ein geordnetes Paar* $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ *aus einer nichtleeren Menge* $\mathbf{X}$ *und einem System* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ *von Teilmengen von* $\mathbf{X}$ *nennt man* **topologischen Raum**, *wenn folgende Axiome erfüllt sind:*

(T1) $\emptyset, \mathbf{X} \in \mathcal{F}$.

(T2) *Eine beliebige Vereinigung von Mengen aus* $\mathcal{F}$ *gehört zu* $\mathcal{F}$.

(T3) *Der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus* $\mathcal{F}$ *gehört zu* $\mathcal{F}$.

Die Elemente von $\mathcal{F}$ *nennt man* **offene Mengen** *in* $\mathbf{X}$. *Der topologische Raum* $\mathbf{X}$ *heißt* **kompakt**, *wenn aus jeder offenen Überdeckung von* $\mathbf{X}$ *eine endliche Teilüberdeckung von* $\mathbf{X}$ *ausgewählt werden kann. Man nennt* $\mathbf{X}$ *einen* **Hausdorff-Raum**, *wenn die Topologie* $\mathcal{F}$ *die Punkte von* $\mathbf{X}$ *trennt, d.h., wenn für beliebige* $x, y \in \mathbf{X}$ *mit* $x \neq y$ *zwei Mengen* $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ *existieren, so dass* $x \in F_1$, $y \in F_2$ *und* $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ *gilt.*

Eine Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen nennt man **stetig**, wenn das vollständige Urbild jeder offenen Menge bez. dieser Abbildung offen ist. Unter einer **Basis** des Systems der offenen Mengen versteht man ein Teilsystem $\mathcal{F}_0$ von $\mathcal{F}$ mit der Eigenschaft, dass jede Menge $F \in \mathcal{F}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{F}_0$ geschrieben werden kann. Es gibt noch den Begriff der **Subbasis**, der ein System $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ meint, für welches das System aller Durchschnitte endlich vieler Mengen aus $\mathcal{G}$ eine Basis von $\mathcal{F}$ ergibt.

In der Aufgabe 2.3, 5(c) haben wir die Abbildung $a \mapsto a(\mathcal{M})$ bei festem $\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A})$ betrachtet. Hält man dagegen $a \in \mathcal{A}$ fest, so ergibt sich eine Abbildung $\widehat{a} : \mathbf{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ \mathcal{M} \mapsto a(\mathcal{M})\,.$ Unter dem **Raum der maximalen Ideale** versteht man die Menge $\mathbf{M}(\mathcal{A})$, versehen mit der schwächsten Topologie, in der alle Funktionen $\widehat{a} : \mathbf{M}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{C}\,,\ a \in \mathcal{A}$, stetig sind. Eine geeignete Subbasis

$$\{U(\widehat{a}, \mathcal{M}_0, \varepsilon) : a \in \mathcal{A}\,,\ \mathcal{M}_0 \in \mathbf{M}(\mathcal{A})\,,\ \varepsilon > 0\}$$

für diese Topologie bilden die Mengen

$$U(\widehat{a}, \mathcal{M}_0, \varepsilon) = \{\mathcal{M} \in \mathbf{M}(\mathcal{A}) : |\widehat{a}(\mathcal{M}) - \widehat{a}(\mathcal{M}_0)| < \varepsilon\}\ .$$

Theorem 2.15 *Der Raum der maximalen Ideale $\mathbf{M}(\mathcal{A})$ ist ein kompakter Hausdorff-Raum.*

Beispiel 2.16 *Der Raum der maximalen Ideale $\mathbf{M}((\ell^1(\mathbb{Z}), *))$ (vgl. Aufgabe 2.3, 2) ist gleich (bis auf Homöomorphie) dem Einheitskreis der komplexen Ebene.*

Kapitel 3

Die Fredholmsche Alternative

In diesem Kapitel beschreiben wir eine Klasse von linearen beschränkten Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ in einem Banachraum $\mathbf{X}$ mit der Eigenschaft, dass die Gleichung

$$Ax = y \tag{3.1}$$

genau dann für jedes $y \in \mathbf{X}$ lösbar ist, wenn die homogene Gleichung

$$Ax = \Theta \tag{3.2}$$

nur die triviale Lösung besitzt.

3.1 Der adjungierte Operator

Für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ definiert man den **adjungierten Operator** $A^* : \mathbf{Y}^* \longrightarrow \mathbf{X}^*$ durch

$$(A^*g)(x) = g(Ax) \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,.$$

Lemma 3.1 *Es gilt* $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$ *und* $\|A^*\|_{\mathbf{Y}^* \to \mathbf{X}^*} = \|A\|_{\mathbf{X} \to \mathbf{Y}}$.

Es gilt ferner

(a) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$,

(b) $(AB)^* = B^* A^*$, $A \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Lemma 3.2 (Riesz'sches Lemma, vgl. Theorem 1.4) *Sind* $(\mathbf{H}, \langle .,. \rangle)$ *ein unitärer Raum und* $f \in \mathbf{H}^*$ *, so existiert genau ein* $x_f \in \mathbf{H}$ *mit*

$$f(x) = \langle x, x_f \rangle \quad \forall\, x \in \mathbf{H}\,.$$

Dabei gilt $\|f\|_{\mathbf{H}^*} = \|x_f\|_{\mathbf{H}}$.

Sind $(\mathbf{H}_j, \langle .,. \rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei unitäre Räume und $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, so kann wegen Lemma 3.2 der adjungierte Operator $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2^*, \mathbf{H}_1^*)$ identifiziert werden mit dem Operator $A^* \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1)$, für den gilt

$$\langle Ax, y \rangle_2 = \langle x, A^* y \rangle_1 \quad \forall\, x \in \mathbf{H}_1\,,\ \forall\, y \in \mathbf{H}_2\,.$$

Genauer: Sind $J_k : \mathbf{H}_k^* \longrightarrow \mathbf{H}_k$, $f \mapsto x_f$ und $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle\ \forall\, x, y \in \mathbf{H}$, so folgt, $\forall\, f \in \mathbf{H}_2^*$, $\forall\, x \in \mathbf{H}_1$,

$$(A^* f)(x) = \langle x, J_1 A^* f\rangle = f(Ax) = \langle Ax, J_2 f\rangle = \langle x, BJ_2 f\rangle\,,$$

also

$$J_1 A^* = BJ_2 \quad \text{bzw.} \quad A^* = J_1^{-1} B J_2\,.$$

Die Menge $A(\mathbf{X}) = \{Ax : x \in \mathbf{X}\}$ nennen wir **Bild des Operators** A und bezeichnen sie mit $R(A)$. Die Mengen $N(A)$ und $R(A)$ sind lineare Teilräume von $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$. Das Element x ist genau dann Lösung von (3.2), wenn $x \in N(A)$ gilt, und die Gleichung (3.1) ist genau dann lösbar, wenn $y \in R(A)$ gilt.

Aus $y \in R(A)$ folgt $g(y) = 0$ für alle $g \in N(A^*)$, d.h.

$$R(A) \subset {}^{\perp}N(A^*)\,.$$

Frage. Wann gilt in dieser Beziehung die Gleichheit?

Satz 3.3 *Für $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ gilt stets $\overline{R(A)} = {}^{\perp}N(A^*)$.*

Folgerung 3.4 *Es gilt $R(A) = {}^{\perp}N(A^*)$ genau dann, wenn $R(A)$ abgeschlossen (in $\mathbf{Y}$) ist.*

Frage: Wann ist $R(A)$ abgeschlossen?

3.2 Operatoren mit abgeschlossenem Bild

Lemma 3.5 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume sowie $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ mit $N(A) = \{\Theta\}$. Dann ist $R(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass*

$$\|x\|_{\mathbf{X}} \le c\,\|Ax\|_{\mathbf{Y}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,. \tag{3.3}$$

Satz 3.6 *Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume sowie $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Dann ist $R(A)$ genau dann abgeschlossen, wenn eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass*

$$\operatorname{dist}(x, N(A)) \le c\,\|Ax\|_{\mathbf{Y}} \quad \forall\, x \in \mathbf{X}\,. \tag{3.4}$$

3.3 Kompakte Operatoren

Definition 3.7 *Einen Operator $T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ nennt man* **kompakt** *oder* **vollstetig***, wenn für jede beschränkte Menge $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ das Bild $T(\mathbf{X}_0) \subset \mathbf{Y}$ relativ kompakt ist.*

Die Menge der kompakten Operatoren $T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, im Fall $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ mit $\mathcal{K}(\mathbf{X})$.

Lemma 3.8 *$T \in L(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ist genau dann kompakt, wenn $T\,(U_1(\Theta))$ relativ kompakt ist. Ferner gilt $\mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \subset \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

Eine Familie $\mathcal{F}$ von Funktionen $f : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{C}$ auf einem metrischen Raum $(\mathbf{E}, d)$ nennt man **gleichgradig stetig**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathcal{F}\,,\ \forall\, x, y \in \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad d(x,y) < \delta$$

gilt. $\mathcal{F}$ heißt **gleichmäßig beschränkt**, wenn eine Konstante $M > 0$ existiert, so dass

$$|f(x)| \le M \quad \forall\, f \in \mathcal{F}\,,\ \forall\, x \in \mathbf{E}\,.$$

Theorem 3.9 (Arzela-Ascoli) *Es seien $\mathbf{E}$ ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ eine Teilmenge der komplexwertigen und stetigen Funktionen auf $\mathbf{E}$. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann relativ kompakt in $(\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$, wenn die Funktionen aus $\mathcal{F}$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind.*

Beispiel 3.10 *Es seien $k : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $T : \mathbf{C}[0,1] \longrightarrow \mathbf{C}[0,1]$ mit*

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds\,, \quad t \in [0,1]\,. \tag{3.5}$$

Dann gilt $T \in \mathcal{K}(\mathbf{C}[0,1])$.

Das folgende Lemma bezieht sich auf Folgerung 0.4.

Lemma 3.11 *Eine Teilmenge $\mathbf{X}_0$ eines vollständigen metrischen Raumes $\mathbf{X}$ ist genau dann relativ kompakt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz für $\mathbf{X}_0$ existiert.*

Satz 3.12 *Aus $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ folgt $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$.*

3.4 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass $\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}$ genau dann relativ kompakt ist, wenn jede Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}_0$ eine in $\mathbf{X}$ konvergente Teilfolge besitzt.

2. Man zeige, dass eine Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Raumes genau dann relativ kompakt ist, wenn sie beschränkt ist.

3. Ist die Menge $\left\{\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \ell^\infty : |\xi_n| \le (n+1)^{-1},\ n = 0, 1, 2, \ldots\right\}$ kompakt in ℓ^∞?

4. Ist $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(\mathbf{X})$?

3.5 Fredholmoperatoren

Einen Operator $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ nennt man **Fredholmoperator**, wenn er ein abgeschlossenes Bild hat und sowohl $N(A)$ als auch $N(A^*)$ endlichdimensional sind.

Lemma 3.13 *Ist $\mathbf{X}_0 \ne \mathbf{X}$ ein abgeschlossener Teilraum des normierten Raumes $\mathbf{X}$, so existiert für jedes $\theta \in (0,1)$ ein $x_\theta \in \mathbf{X}$ mit $\|x_\theta\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_\theta, \mathbf{X}_0) \ge \theta$.*

Lemma 3.14 *Ist* $S_{\mathbf{X}} = \{x \in \mathbf{X} : \|x\| = 1\}$ *kompakt, so ist der normierte Raum* $\mathbf{X}$ *endlichdimensional.*

Lemma 3.15 *Sind* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *Banachräume,* $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *und* $R(A)$ *abgeschlossen, so gilt* $R(A^*) = N(A)^{\perp}$ *. Insbesondere ist* $R(A^*)$ *auch abgeschlossen.*

Theorem 3.16 *Sind* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum,* $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ *und* $A = I - T$ *, so gilt* $R(A) = \overline{R(A)}$ *. Außerdem ist* $\dim N(A) = 0$ *genau dann, wenn* $\dim N(A^*) = 0$ *gilt.*

Folgerung 3.17 *Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.16 gilt entweder* $R(A) = \mathbf{X}$ *und* $N(A) = \{\Theta\}$ *oder* $R(A) \neq \mathbf{X}$ *und* $N(A) \neq \{\Theta\}$ *.*

Bemerkung 3.18 *Unter den Voraussetzungen von Theorem 3.16 sind die Nullräume* $N(A)$ *und* $N(A^*)$ *endlichdimensional und ihre Dimensionen gleich.*

3.6 Über das Spektrum kompakter Operatoren

Das Spektrum $\sigma(A)$ eines Operators $A \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ (vgl. Abschnitt 2.1) besteht aus allen Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $A - \lambda I$ nicht invertierbar ist. Man nennt $\lambda \in \sigma(A)$ einen **Eigenwert** von A, wenn $\dim N(A - \lambda I) > 0$ gilt.

Beispiel 3.19 *Für den Verschiebungsoperator* $V : \ell^p \longrightarrow \ell^p$, $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ *ist* $\sigma(V) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ *, wobei nur* λ *mit* $|\lambda| < 1$ *Eigenwerte sind.*

Theorem 3.20 *Sind* $\mathbf{X}$ *ein Banachraum und* $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$ *, so besteht* $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, deren einzig möglicher Häufungspunkt die Null ist.*

Kapitel 4

Anhang A: Räume messbarer Funktionen

4.1 Einiges aus der Integrationstheorie

Im weiteren verstehen wir unter dem Tripel (Ω, Σ, P) einen **Maßraum**, d.h., $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra über der nichtleeren Menge Ω und $P : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ ein (σ-additives und σ-endliches) Maß:

(M1) $A_n \in \Sigma \; (n = 1, 2, \ldots)\,,\; A_j \cap A_k = \emptyset \; (j \neq k) \Longrightarrow P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)\,,$

(M2) $\exists\, A_n \in \Sigma : \; \Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\,,\; P(A_n) < \infty\,,\; n = 1, 2, \ldots$

Die Mengen $A \in \Sigma$ nennt man **messbar**. Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$ heißt **messbar**, wenn für jede offene Menge $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ das vollständige Urbild $f^{-1}(B)$ messbar ist. Wir sagen, dass eine Eigenschaft P-fast überall (P-f.ü.) gilt, wenn sie mit eventueller Ausnahme einer Menge vom P-Maß Null erfüllt ist.

Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ nennt man **Treppenfunktion**, wenn sie nur endlich viele Werte $z_1\,, z_2\,, \ldots\,, z_m$ ($m = m(f)\,,\; z_j \neq z_k$ für $k \neq j$) annimmt. Eine solche Treppenfunktion ist genau dann messbar, wenn alle Mengen $A_k := f^{-1}(\{z_k\})\,,\; k = 1, \ldots, m\,,$ messbar sind. Man nennt eine solche Treppenfunktion P-**integrierbar**, wenn die Summe $\sum\limits_{k=1}^{m} |z_k| P(A_k)$ endlich ist, und definiert das Integral einer integrierbaren Treppenfunktion als

$$\int\limits_{\Omega} f(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=1}^{m} z_k P(A_k)\,.$$

Eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ heißt P-**integrierbar**, wenn eine Folge (f_n) P-integrierbarer Treppenfunktionen existiert, so dass $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ P-f.ü. auf Ω gilt und für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert mit

$$\int\limits_{\Omega} |f_n(\omega) - f_m(\omega)| P(d\omega) < \varepsilon \quad \forall\, m, n > N\,.$$

Offenbar existiert dann der (endliche) Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) P(d\omega) .$$

Dieser ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) und wird mit

$$\int_\Omega f(\omega) P(d\omega) \tag{4.1}$$

bezeichnet. Die Menge der P-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\Omega, \Sigma, P)$. Für $A \in \Sigma$ definiert man

$$\int_A f(\omega) P(d\omega) := \int_\Omega \chi_A(\omega) f(\omega) P(d\omega) ,$$

wobei $\chi_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \omega \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & \omega \in A , \\ 0 & : & \omega \notin A , \end{array} \right\}$ die **charakteristische Funktion** der Menge A bezeichnet. Das Integral (4.1) hat u.a. folgende Eigenschaften:

1. $f, g \in \mathbf{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in \mathbf{L}$,

$$\int_\Omega [\alpha f(\omega) + \beta g(\omega)] P(d\omega) = \alpha \int_\Omega f(\omega) P(d\omega) + \beta \int_\Omega g(\omega) P(d\omega) ,$$

2. $f \in \mathbf{L} \iff |f| \in \mathbf{L}$,

3. $f \in \mathbf{L}$, $f(\omega) \geq 0$ P-f.ü. auf $\Omega \Longrightarrow$

$$\int_\Omega f(\omega) P(d\omega) \geq 0 \quad \text{und} \quad = 0 \iff f(\omega) = 0 \ P\text{-f.ü.}$$

4. Ist $f \in \mathbf{L}$, so ist die Mengenfunktion $Q : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$A \mapsto \int_A f(\omega) P(d\omega)$$

σ-additiv und absolut stetig. (Man nennt eine Mengenfunktion $Q : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C}$ absolut stetig, wenn aus $P(A) = 0$ stets $Q(A) = 0$ folgt. Dies ist äquivalent dazu, dass $\lim_{P(A)\to 0} Q(A) = 0$ gleichmäßig bzgl. $A \in \Sigma$ gilt.)

Sind $(\Omega_j, \Sigma_j, P_j)$, $j = 1, 2$, zwei Maßräume, so bezeichnet man mit $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen der Gestalt $A_1 \times A_2$ mit $A_j \in \Sigma_j$ enthält. Auf $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ existiert ein eindeutig bestimmtes (σ-additives und σ-endliches) Maß $P_1 \times P_2$ mit der Eigenschaft

$$(P_1 \times P_2)(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) P_2(A_2) , \quad A_j \in \Sigma_j .$$

Das Integral bzgl. dieses Maßes bezeichnen wir mit

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2)(P_1 \times P_2)(d\omega_1 d\omega_2) \quad \text{oder} \quad \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) P_1(d\omega_1) P_2(\omega_2) . \tag{4.2}$$

Theorem 4.1 (Fubini-Tonelli) *Eine $\Sigma_1 \times \Sigma_2$-messbare Funktion $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ist genau dann $P_1 \times P_2$-integrierbar, wenn eines der iterierten Integrale*

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\int\limits_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_1) \right] P(d\omega_2) \quad \textit{oder} \quad \int\limits_{\Omega_1} \left[\int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) P(d\omega_2) \right] P(d\omega_1)$$

existiert. Diese beiden Integrale sind dann gleich dem Integral (4.2).

4.2 Der Raum S

Auf der Menge $\mathcal{S}$ der bez. des Lebesgue-Maßes m messbaren Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g \qquad \Longleftrightarrow \qquad m\{t \in [0,1] : f(t) \neq g(t)\} = 0$$

und identifizieren im weiteren die messbare Funktion f mit der zugehörigen Äquivalenzklasse $[f]_\sim$. Mit $\mathbf{S} = \mathbf{S}[0,1]$ bezeichnen wir den Raum dieser Äquivalenzklassen versehen mit der Metrik

$$\rho(f,g) = \int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|}\, dt\,.$$

Satz 4.2 *Die Konvergenz in* $\mathbf{S}$ *ist die Konvergenz dem Maße nach, d.h., es gilt* $f_n \longrightarrow f$ *in* $\mathbf{S}$ *genau dann, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} m\{t \in [0,1] : |f_n(t) - f(t)| > \varepsilon\} = 0\,.$$

Satz 4.3 *Der metrische Raum* $\mathbf{S}$ *ist vollständig und separabel.*

4.3 Die $\mathbf{L}^p$-Räume

Sei $1 \le p < \infty$. Unter $\mathbf{L}^p = \mathbf{L}^p[0,1]$ verstehen wir den Teilraum von $\mathbf{S}$ der Funktionen (genauer Äquivalenzklassen von Funktionen) f, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Auf $\mathbf{L}^p$ definieren wir

$$\|.\|_p : \mathbf{L}^p \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Satz 4.4 *Die Räume* $(\mathbf{L}^p, \|.\|_p)$, $1 \le p < \infty$, *sind separable Banachräume.*

Mit $\mathbf{L}^\infty = \mathbf{L}^\infty[0,1]$ bezeichnet man die Teilmenge von $\mathbf{S}$ der wesentlich beschränkten Funktionen. Man definiert $\|.\|_\infty : \mathbf{L}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f \mapsto \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [0,1]\} := \inf\{M \in \mathbb{R} : m\{t \in [0,1] : |f(t)| > M\} = 0\}\,.$$

Satz 4.5 $(\mathbf{L}^\infty, \|.\|_\infty)$ *ist ein Banachraum.*

4.4 Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung für Integrale und leiten Sie daraus die Dreiecksungleichung für die $\mathbf{L}^p$-Norm, $1 < p < \infty$, ab (vgl. Abschnitt 0.1 und Beweis von Satz 4.4).

2. Zeigen Sie, dass die Konvergenz in $\mathbf{L}^\infty$ die gleichmäßige Konvergenz f.ü. ist.

Kapitel 5

Anhang B: Ausgewählte Beweise

5.1 Zum Abschnitt 0.2 (Metrische Räume)

Beweis von Satz 0.9. Aus $d(x_m, x_n) \le \varepsilon_n \ \forall m \ge n$ folgt, dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge ist. Somit existiert $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$, und aus $x_{n+m} \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$, $m = 0, 1, \ldots$ folgt $x^* \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Für ein weiteres $y^* \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, wäre wegen

$$d(x^*, y^*) \le d(x^*, x_n) + d(x_n, y^*) \le 2\varepsilon_n \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$$

$y^* = x^*$. □

Beweis von Satz 0.10. Wir nehmen an, dass $\mathbf{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mit nirgends dichten Mengen A_n gilt. Wir setzen $\varepsilon_0 = 1$ und wählen $x_0 \in \mathbf{X}$ beliebig. Die Kugel $K_{\varepsilon_0}(x_0)$ enthält eine Kugel $K_{\varepsilon_1}(x_1)$, die zu A_1 durchschnittsfremd ist, wobei $\varepsilon_1 \le 1/2$ gewählt werden kann. Diese Prozedur lässt sich beliebig fortsetzen:

$$K_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n), \quad K_{\varepsilon_n}(x_n) \cap A_n = \emptyset, \quad \varepsilon_n \le \frac{1}{n+1}.$$

Nach Satz 0.9 existiert ein $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}(x_n)$. Aber $x^* \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{X}$. □

5.2 Zum Abschnitt 1.2 (Das Theorem von Banach-Steinhaus)

Beweis von Lemma 1.6. Nach Voraussetzung existieren Zahlen $c_M, d \in (0, \infty)$, so dass $\|Ax\| \le c_M \ \forall A \in \mathcal{F}, \forall x \in K_\varepsilon(x^*)$ und $\|Ax^*\| \le d$ gilt. Seien $x \in \mathbf{X}$, $\|x\| \le 1$ und $\widetilde{x} = \varepsilon x + x^*$, so dass $\widetilde{x} \in K_\varepsilon(x^*)$. Es folgt

$$\|A\widetilde{x}\| = \|\varepsilon Ax + Ax^*\| \ge \varepsilon \|Ax\| - \|Ax^*\|,$$

also

$$\|Ax\| \le \frac{\|A\widetilde{x}\| + \|Ax^*\|}{\varepsilon} \le \frac{c_M + d}{\varepsilon}.$$

□

Beweis von Theorem 1.7. Wir nehmen an, dass $\sup\{\|A\| : A \in \mathcal{F}\} = \infty$ ist, und wählen ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $x_0 \in \mathbf{X}$ beliebig. Nach Lemma 1.6 ist $M(x_1, \varepsilon_1)$ unbeschränkt, so dass ein $x_1 \in K_{\varepsilon_0}(x_0)$ und ein $A_1 \in \mathcal{F}$ mit $\|A_1 x_1\| > 1$ existieren. Aus der Stetigkeit von A_1 folgt die Existenz einer Kugel $K_{\varepsilon_1}(x_1) \subset K_{\varepsilon_0}(x_0)$ mit $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ und $\|A_1 x\| > 1 \ \forall\, x \in K_{\varepsilon_1}(x_1)$. Auf diese Weise folgt die Existenz einer Folge $(K_{\varepsilon_n}(x_n))_{n=1}^\infty$ abgeschlossener Kugeln mit $K_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset K_{\varepsilon_n}(x_n)$, $\varepsilon_n \longrightarrow 0$, und einer zugehörigen Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ von Operatoren $A_n \in \mathcal{F}$ mit $\|A_n x\| > n$ $\forall\, x \in K_{\varepsilon_n}(x_n)$. Nach Satz 0.9 existiert ein $x^* \in \bigcap_{n=1}^\infty K_{\varepsilon_n}(x_n)$ woraus $\|A_n x^*\| > n \ \forall\, n = 1, 2, \ldots$ im Widerspruch zur punktweisen Beschränkheit der Familie $\mathcal{F}$ folgt. $\square$

5.3 Zum Abschnitt 3.3 (Kompakte Operatoren)

Beweis von Theorem 3.9. Es seien $\mathcal{F}$ präkompakt und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen Folgerung 0.4 ist $\mathcal{F}$ beschränkt, d.h. die Funktionen aus $\mathcal{F}$ sind gleichmäßig beschränkt, und außerdem existiert eine endliches ε-Netz $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ für $\mathcal{F}$. Für jedes $f \in \mathcal{F}$ existieren somit ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ und ein $\delta > 0$, so dass $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon/3$ und

$$|f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3 \quad \forall\, x, y \in \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad d(x, y) < \delta\,.$$

Es folgt

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

für $x, y \in \mathbf{E}$, $d(x, y) < \delta$, womit auch die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen aus $\mathcal{F}$ gezeigt ist.

Es seien nun umgekehrt die Funktionen aus $\mathcal{F} \subset \mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Nach Folgerung 0.4 ist $\mathbf{E}$ separabel, d.h., es existiert eine in $\mathbf{E}$ dichte Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$. Für eine beliebige Folge $(f_n)_{n=1}^\infty = \left(f_n^1\right)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ hat die Zahlenfolge $\left(f_n^1(x_1)\right)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $\left(f_n^2(x_1)\right)_{n=1}^\infty$. Ebenso hat $\left(f_n^2(x_2)\right)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $\left(f_n^3(x_2)\right)_{n=1}^\infty$. Setzen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir eine Folge von Funktionenfolgen $\left(f_n^k\right)_{n=1}^\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, mit der Eigenschaft, dass $\left(f_n^{k+1}\right)_{n=1}^\infty$ Teilfolge von $\left(f_n^k\right)_{n=1}^\infty$ ist und die Zahlenfolgen $\left(f_n^k(x_{k-1})\right)_{n=1}^\infty$ konvergieren. Es folgt die Konvergenz jeder Zahlenfolge $(f_n^n(x_k))_{n=1}^\infty$, $k = 1, 2, \ldots$ Wir zeigen, dass $(f_n^n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{C}(\mathbf{E}, \mathbb{C})$ ist. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f_n^n(x) - f_n^n(y)| < \varepsilon/3$ für alle $x, y \in \mathbf{E}$ mit $d(x, y) < \delta$ und für alle $n = 1, 2, \ldots$ Da $\mathbf{E}$ kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\mathbf{E} = \bigcup_{k=1}^N U_\delta(x_k)$. Ferner existiert ein $M \in \mathbb{N}$, für das

$$|f_n^n(x_k) - f_m^m(x_k)| < \varepsilon/3 \quad \forall\, k = 1, \ldots, N\,,\ \forall\, m, n \ge M$$

gilt. Ist nun $x \in \mathbf{E}$ beliebig, so existiert ein $j = j(x) \in \{1, \ldots, N\}$, so dass $x \in U_\delta(x_j))$. Es folgt für $m, n \ge M$

$$|f_n^n(x) - f_m^m(x)| \le |f_n^n(x) - f_n^n(x_j)| + |f_n^n(x_j) - f_m^m(x_j)| + |f_m^m(x_j) - f_m^m(x)| < \varepsilon\,.$$

$\square$

Beweis von Lemma 3.11. Nach Folgerung 0.4 genügt jede relativ kompakte Menge der angegebenen Bedingung. Wir nehmen umgekehrt an, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz

$\{y_1^\varepsilon, \ldots, y_m^\varepsilon\}$, $m = m(\varepsilon)$, für $\mathbf{X}_0$ existiert, und betrachten eine beliebige Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}_0$. Wir setzen $x_n^0 = x_n$. Dann existieren Teilfolgen $\left(x_n^k\right)_{n=1}^\infty \subset \left(x_n^{k-1}\right)_{n=1}^\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, mit $\left(x_n^k\right)_{n=1}^\infty \subset U_{1/k}\left(y_j^{1/k}\right)$, $j = j(k)$. Die Teilfolge $(x_n^n)_{n=1}^\infty \subset (x_n)_{n=1}^\infty$ ist dann Cauchyfolge. □

Beweis von Satz 3.12. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, existieren $x_1, \ldots, x_m \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta) = \{x \in \mathbf{X} : \|x\|_{\mathbf{X}} < 1\}$, so dass $\|Tx - Tx_j\|_{\mathbf{Y}} < \varepsilon/4$ für alle $x \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta)$ und ein gewisses $j = j(x) \in \{1, \ldots, m\}$. Für $g \in \mathbf{Y}^*$ definieren wir $Bg = \left[\begin{array}{ccc} g(Tx_1) & \cdots & g(Tx_m) \end{array}\right]^T \in \mathbb{C}^m$. Dann ist $B\left(U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)\right)$ relativ kompakt, so dass $g_1, \ldots, g_n \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$ existieren, für die $\|Bg - Bg_k\| < \varepsilon/4$ für alle $g \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$ und für ein gewisses $k = k(g) \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Das bedeutet

$$|g(Tx_i) - g_k(Tx_i)| < \varepsilon/4 \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}\ ,\ k = k(g)\,.$$

Wir erhalten für alle $x \in U_1^{\mathbf{X}}(\Theta)$, $g \in U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)$, $j = j(x)$ und $k = k(g)$

$$\begin{aligned} |(T^*g)(x) - (T^*g_k)(x)| &= |g(Tx) - g_k(Tx)| \\ &\le |g(Tx) - g(Tx_j)| + |g(Tx_j) - g_k(Tx_j)| + |g_k(Tx_j) - g_k(Tx)| \\ &< \|g\|\,\|Tx - Tx_j\| + \frac{\varepsilon}{4} + \|g_k\|\,\|Tx_j - Tx\| < \frac{3\varepsilon}{4}\,, \end{aligned}$$

d.h., $\{T^*g_k : k = 1, \ldots, n\}$ ist ε-Netz für $T^*\left(U_1^{\mathbf{Y}^*}(\Theta)\right)$. □

5.4 Zum Abschnitt 3.5 (Fredholmoperatoren)

Beweis von Lemma 3.15. Es sei $f \in R(A^*)$, d.h. $A^*g = f$ für ein gewisses $g \in \mathbf{Y}^*$. Aus $x \in N(A)$ folgt $f(x) = (A^*g)(x) = g(Ax) = g(\Theta) = 0$, d.h. $R(A^*) \subset N(A)^\perp$.

Sei umgekehrt $f \in N(A)^\perp$. Für $y = Ax \in R(A)$ setzen wir $g(y) = f(x)$. (Diese Definition von $g \in L(R(A), \mathbb{C})$ ist korrekt.) Für alle $z \in N(A)$ gilt dann $|g(y)| = |f(x-z)| \le \|f\|\,\|x - z\|$ und somit nach Satz 3.6 mit einer gewissen Konstanten $c > 0$

$$|g(y)| \le \|f\|\,\mathrm{dist}(x, N(A)) \le c\,\|f\|\,\|y\|\ , \quad y \in R(A)\,.$$

Sei nun $\widetilde{g} \in \mathbf{Y}^*$ eine Fortsetzung von g auf ganz $\mathbf{Y}$, so dass für alle $x \in \mathbf{X}$ gilt $\widetilde{g}(Ax) = g(Ax) = f(x)$, d.h. $f = A^*\widetilde{g} \in R(A^*)$. □

Beweis von Theorem 3.16.

1. Wir zeigen, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass

$$\mathrm{dist}(x, N(A)) \le c\,\|Ax\| \quad \forall\, x \in \mathbf{X} \tag{5.1}$$

   gilt. Wir nehmen an, es gebe eine Punktfolge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{X}$ mit den Eigenschaften

$$\|Ax_n\| > 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{dist}(x, N(A)) = c_n\,\|Ax_n\|\ ,\ c_n \longrightarrow \infty\,.$$

   Wir setzen $x_n^0 = \Big[c_n\,\|Ax_n\|\Big]^{-1} x_n$. Dann gilt

$$\mathrm{dist}(x_n^0, N(A)) = 1 \quad \text{und} \quad \left\|Ax_n^0\right\| = c_n^{-1} \longrightarrow 0\,.$$

Nun existieren $x_n^1 \in N(A)$ mit $\left\|x_n^0 - x_n^1\right\| \leq 2$. Für $z_n = x_n^0 - x_n^1$ folgt

$$\operatorname{dist}(z_n, N(A)) = 1\,, \quad \|z_n\| \leq 2 \quad \text{und} \quad \|Az_n\| \longrightarrow 0\,.$$

Da $T \in \mathcal{K}(\mathbf{X})$, existiert eine Teilfolge $\left(z_n^1\right)_{n=1}^{\infty} \subset (z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $Tz_n^1 \longrightarrow z$. Es folgt

$$z_n^1 = Tz_n^1 + Az_n^1 \longrightarrow z \quad \text{und somit} \quad Az_n^1 \longrightarrow Az = \Theta\,,$$

d.h. $z \in N(A)$. Andererseits ist aber $\left\|z_n^1 - z\right\| \geq \operatorname{dist}(z_n^1, N(A)) = 1$. Somit ist (5.1) gezeigt.

2. Ist nun $\dim N(A^*) = 0$, so folgt $R(A) = {}^{\perp}N(A^*) = \mathbf{X}$. Ist $x_1 \neq \Theta$ und $Ax_1 = \Theta$, so existieren also $x_{n+1} \in \mathbf{X}$ mit $Ax_{n+1} = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Wegen $A^n x_n = A^{n-1}x_{n-1} = \ldots = Ax_1 = \Theta$ und $A^{n-1}x_n = \ldots = Ax_2 = x_1 \neq \Theta$ steht in dieser Inklusionskette $N(A) \subset N(A^2) \subset \ldots \subset N(A^n) \subset \ldots$ nirgends das Gleichheitszeichen. In Anwendung von Lemma 3.13 erhalten wir eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n \in N(A^n)$, $\|z_n\| = 1$ und $\operatorname{dist}(z_n, N(A^{n-1})) \geq 1/2$. Somit hat $(Tz_n)_{n=1}^{\infty}$ eine konvergente Teilfolge. Andererseits gilt aber für $n > m$

$$\|Tz_n - Tz_m\| = \|z_n - (z_m - Az_m + Az_n)\| \geq \frac{1}{2}\,.$$

Also: $\dim N(A) = 0$.

3. Ist umgekehrt $\dim N(A) = 0$, so folgt wegen $R(A^*) = N(A)^{\perp} = \mathbf{X}^*$ (siehe Lemma 3.15) und $T^* \in \mathcal{K}(\mathbf{X}^*)$ (siehe Satz 3.12) wie im vorhergehenden Beweisschritt $\dim N(A^*) = 0$.

□

5.5 Zum Abschnitt 3.6 (Das Spektrum kompakter Operatoren)

Beweis von Theorem 3.20. Ist $\lambda \neq 0$ und $\dim N(T - \lambda I) = 0$, so gilt wegen Folgerung 3.17 $R(T - \lambda I) = R\left(-\lambda(I - \lambda^{-1}T)\right) = \mathbf{X}$, so dass $\lambda \in \rho(T)$.

Wir nehmen nun an, dass paarweise verschiedene $\lambda_n \in \sigma(T)$, $n = 1, 2, \ldots$, mit $|\lambda_n| \geq \varepsilon > 0$ existieren. Dann gibt es $x_n \in \mathbf{X}\backslash\{\Theta\}$, so dass $Tx_n = \lambda_n x_n$. Dann ist das System $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ linear unabhängig. Sonst würde ein Index m existieren, für den das System $\{x_1, \ldots, x_m\}$ linear unabhängig ist und $x_{m+1} = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$ gilt. Dann folgt

$$Tx_{m+1} = \lambda_{m+1}x_{m+1} = \lambda_{m+1}\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1}\alpha_m x_m$$

und

$$Tx_{m+1} = \alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_m Tx_m = \alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m x_m\,,$$

also

$$\alpha_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1)x_1 + \cdots + \alpha_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m)x_m = \Theta\,.$$

Das bedeutet aber $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ im Widerspruch zu $x_{m+1} \neq \Theta$.

Wir setzen $\mathbf{X}_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{X}_n \subset \mathbf{X}_{n+1} \subset \cdots$, wobei an keiner Stelle Gleichheit auftritt. Aus Lemma 3.13 folgt die Existenz von Elementen $y_n \in \mathbf{X}_n$ mit $\operatorname{dist}(y_n, \mathbf{X}_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ und $\|y_n\| = 1$, $n = 2, 3, \ldots$ Es gilt $T(\mathbf{X}_n) \subset \mathbf{X}_n$ und $(T - \lambda_n I)(\mathbf{X}_n) \subset \mathbf{X}_{n-1}$. Wegen

$$Ty_n - Ty_m = (T - \lambda_n I)y_n - Ty_m + \lambda_n y_n = \lambda_n\left[y_n - \lambda_n^{-1}(Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n)\right]$$

folgt für $n > m$ die Ungleichung $\|Ty_n - Ty_m\| \geq |\lambda_n|/2 \geq \varepsilon/2$, so dass $(Ty_n)_{n=1}^\infty$ keine konvergente Teilfolge besitzt im Widerspruch zur Kompaktheit von T.

Damit ist $\sigma(T) \cap \left\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \frac{1}{n}\right\}$ endlich für jedes $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sigma(T)$ höchstens abzählbar ist. □

5.6 Zum Kapitel 4 (Räume messbarer Funktionen)

Wir erinnern an einige Sätze aus der Maß- und Integrationstheorie. Dabei seien (Ω, Σ, P) ein Maßraum und $f_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ messbare Funktionen (vgl. Abschnitt 4.1).

Satz 5.1 (Beppo Levi, Lebesgue) *Gilt* $0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \ldots$ *f.ü. und* $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ *f.ü., so ist* $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ *messbar und*

$$\int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\, P(d\omega)\,.$$

Satz 5.2 (Fatou) *Für messbare Funktionen* $f_n : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ *gilt*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(\omega)\, P(d\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) P(d\omega)\,.$$

Satz 5.3 (Lebesgue) *Es seien* $g : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ *integrierbar und* $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$ *f.ü. sowie* $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ *f.ü.,* $n = 1, 2, \ldots$ *Dann ist* $f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *integrierbar, und es gilt*

$$\int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega)\, P(d\omega)\,.$$

Satz 5.4 (Lusin) *Es seien* $f \in \mathcal{S}$ *beschränkt und* $\varepsilon > 0$ *beliebig. Dann existiert eine stetige Funktion* $f_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit den Eigenschaften*

$$m\{t \in [0, 1] : f(t) \neq f_0(t)\} < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup\{|f_0(t)| : t \in [0, 1]\} \leq \sup\{|f(t)| : t \in [0, 1]\}\,.$$

Satz 5.5 (Fréchet) *Jede Funktion aus* $\mathcal{S}$ *ist Grenzwert einer dem Maße nach konvergenten Folge von Polynomen.*

Satz 5.6 (Riesz) *Konvergiert* f_n *gegen* f *dem Maße nach, so existiert eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$, *die gegen* f *f.ü. konvergiert.*

Beweis von Satz 4.2. Sind $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$, $\varepsilon > 0$ und

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \{t \in [0, 1] : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon\}\,,$$

so folgt

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, m(A_n) = \int_{A_n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\, dt \leq \int_{A_n} \frac{|f_n(t) - f(t)|\, dt}{1 + |f_n(t) - f(t)|} \leq \rho(f_n, f) \longrightarrow 0\,.$$

Sind umgekehrt $f_n \longrightarrow f$ dem Maße nach, $\varepsilon > 0$ beliebig und $A_n = A_n(\varepsilon)$ wie oben, so gilt

$$\rho(f_n, f) = \int_{A_n} \frac{|f_n(t) - f(t)|\, dt}{1 + |f_n(t) - f(t)|} + \int_{[0,1]\setminus A_n} \frac{|f_n(t) - f(t)|\, dt}{1 + |f_n(t) - f(t)|} \leq m(A_n) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \longrightarrow \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\,.$$

Da hierbei $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $\rho(f_n, f) \longrightarrow 0$. □

Beweis von Satz 4.3. Es sei $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{S}$ eine Cauchyfolge. Wir wählen $n_1 < n_2 < \ldots$ so, dass $\rho(f_n, f_{n_k}) < 2^{-k}$ für alle $n > n_k$ gilt, und setzen

$$g_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{|f_{n_{j+1}}(t) - f_{n_j}(t)|}{1 + |f_{n_{j+1}}(t) - f_{n_j}(t)|}$$

sowie $g(t) = \lim\limits_{k\to\infty} g_k(t)$. Da

$$\int_0^1 g_k(t)\, dt = \sum_{j=1}^{k} \rho(f_{n_{j+1}}, f_{n_j}) < 1\,,$$

folgt aus Satz 5.1 $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt \le 1$. Daraus schließen wir, dass $m\{t \in [0,1] : g(t) = \infty\} = 0$, so dass $g_k(t)$ für $k \longrightarrow \infty$ für fast alle $t \in [0,1]$ gegen eine endliche Zahl konvergiert. Für diese t konvergiert dann aber auch die Reihe

$$f_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t) \right] \,,$$

denn für alle hinreichend großen k ist $|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)| \le \dfrac{2|f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}{1 + |f_{n_{k+1}}(t) - f_{n_k}(t)|}$. Somit gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{S}$, gegen die f_{n_k} f.ü. und somit auch dem Maße nach konvergiert. Nach Satz 4.2 folgt $f_{n_k} \longrightarrow f$ in $\mathbf{S}$ und, da $(f_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $\mathbf{S}$ ist, $f_n \longrightarrow f$ in $\mathbf{S}$. □

Beweis von Satz 4.4. Aus $|f(t) + g(t)|^p \le (|f(t)| + |g(t)|)^p \le 2^{p-1}(|f(t)|^p + |g(t)|^p)$ folgt, dass mit $f \in \mathbf{L}^p$ und $g \in \mathbf{L}^p$ auch $f + g \in \mathbf{L}^p$ gilt.

Sind $A := \|f\|_p > 0$ und $B := \|g\|_q > 0$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$, so folgt mit $\alpha(t) = f(t)/A$ und $\beta(t) = g(t)/B$ aus der Ungleichung (0.1)

$$\int_0^1 |\alpha(t)\beta(t)|\, dt \le \frac{1}{p} \int_0^1 |\alpha(t)|^p\, dt + \frac{1}{q} \int_0^1 |\beta(t)|^q\, dt = 1$$

und somit die **Höldersche Ungleichung für Integrale**

$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\, dt \le \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |g(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \tag{5.2}$$

bzw.

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q\,, \quad f \in \mathbf{L}^p,\, g \in \mathbf{L}^q\,.$$

(Offenbar gilt letzteres auch für $p = 1$ und $q = \infty$!) Sind nun $f, g \in \mathbf{L}^p$, so folgt aus (5.2), $q(p-1) = p$ und $p/q = p - 1$

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_0^1 |f(t) + g(t)|^p \\
&\le \int_0^1 |f(t)|\, |f(t) + g(t)|^{p-1}\, dt + \int_0^1 |g(t)|\, |f(t) + g(t)|^{p-1}\, dt \\
&\le \left[\left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \right] \left(\int_0^1 |f(t) + g(t)|^{q(p-1)}\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \|f+g\|_p^{p-1}\,,
\end{aligned}$$

also die Dreiecksungleichung $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Es sei nun $(f_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbf{L}^p$ eine Cauchyfolge. Mit der Metrik ρ in $\mathbf{S}$ und der Hölderschen Ungleichung (für $g \equiv 1$ angewandt) gilt

$$\rho(f_m, f_n) \le \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\, dt \le \left(\int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|f_m - f_n\|_p \,,$$

so dass $(f_n)_{n=1}^\infty$ auch eine Cauchyfolge in $\mathbf{S}$ ist. ($\mathbf{L}^p$ ist also stetig in $\mathbf{S}$ eingebettet!) Somit existiert wegen der Vollständigkeit von $\mathbf{S}$ eine Funktion $f \in \mathbf{S}$, gegen die f_n dem Maße nach konvergiert. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig, so folgt aus den Sätzen 5.6 und 5.2 die Existenz eines m_0, so dass

$$\int_0^1 |f_m(t) - f(t)|^p\, dt \le \sup_{n \ge m} \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|^p\, dt \le \varepsilon^p \quad \forall\, m \ge m_0 \,.$$

Also gilt $f \in \mathbf{L}^p$ und $f_m \longrightarrow f$ in $\mathbf{L}^p$.

Die Separabilität von $\mathbf{L}^p$ kann man wie folgt zeigen: Für $f \in \mathbf{L}^p$ definiert man

$$f_n(t) = \begin{cases} n & : \ |f(t)| > n \,, \\ f(t) & : \ |f(t)| \le n \,. \end{cases}$$

Aus dem Satz 5.3 folgt $f_n \longrightarrow f$ in $\mathbf{L}^p$. Unter Verwendung von Satz 5.4 schlussfolgert man nun, dass der Raum $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_\infty)$ der stetigen Funktionen dicht in $\mathbf{L}^p$ ist. Es bleibt nur noch die Separabiität des Raumes $(\mathbf{C}[0,1], \|.\|_\infty)$ und seine stetige Einbettung in $\mathbf{L}^p$ anzuwenden. □

Index