

Skript
Funktionalanalysis
WS 06/07

nach einer Vorlesung von
Dr. Jürgen Schulz

Skript erstellt von
Holger Langenau

20. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Metrische Räume	5
1.1	Definitionen und Beispiele	5
1.2	Konvergenz in metrischen Räumen	7
1.3	Vollständige metrische Räume	11
1.4	Satz über die Vervollständigung metrischer Räume	13
1.5	Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen	15
1.5.1	Stetigkeit	19
1.6	Separable metrische Räume	20
1.7	Verallgemeinerung der Intervallschachtelung	22
1.8	Der Fixpunktsatz von Banach	27
1.9	Kompaktheit in metrischen Räumen	28
1.9.1	Einige Anwendungen der Kompaktheit	34
2	Banach- und Hilberträume	39
2.1	Der Banachraum	39
2.2	Der Hilbertraum	45
2.2.1	Fourier-Reihen im Hilbertraum	50
3	Lineare Operatoren in normierten Räumen	53
3.1	Stetigkeit und Beschränktheit	53
3.2	Der Raum der linearen, stetigen Operatoren	57
3.3	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	59
3.4	Invertierbarkeit von Operatoren	61
3.5	Das Theorem vom abgeschlossenen Graphen	63
3.6	Faktorräume und das Open-Mapping-Theorem	68
3.7	Die Fortsetzung linearer, stetiger Funktionale	70
3.8	Der biduale Raum und der adjungierte Operator	77
3.9	Beschreibung einiger Räume	78
4	Operatortheorie im Hilbertraum	81
4.1	Die Riesz- oder Hilbertadjungierte	81
4.2	Schwache Konvergenz im Hilbertraum	83
4.3	Vollstetige Operatoren in Hilberträumen	85
4.4	Normal auflösbare Operatoren	87
4.5	Noether'sche Operatoren	88
4.5.1	Ergänzungen zur Φ -Theorie	93
A	Zorn'sches Lemma bis Wohlordnungssatz von Zermelo	97
B	Topologische Komplemente	101
T	Topologische Grundbegriffe im metrischen Raum	105

Kapitel 1

Metrische Räume

1.1 Definitionen und Beispiele

Definition (1.1-1). Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Das Paar (X, d) heißt **metrischer Raum** und d eine **Metrik** auf X , wenn für $x, y, z \in X$ gilt:

- (1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (2) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Aufgabe (1.1-2). Siehe 1.1. Sei (X, d) metrischer Raum. Zeigen Sie, dass gilt

- (1) $d(x, y) \geq 0$
- (2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- (3) $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \quad \forall x_i \in X \quad (i = 1, \dots, n)$
- (4) $|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$
- (5) $|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w) \quad \forall x, y, z, w \in X$

Definition (1.1-3). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$ und

$$d' = d|_{X_0 \times X_0} : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Der metrische Raum (X_0, d') heißt **Teil-** bzw. **Unterraum** von (X, d) . Statt (X_0, d') schreibt man (X_0, d) .

Beispiel (1.1-4).

- (1) $X =$ Menge der reellen Zahlen, $d(x, y) = |x - y|$ ($(X, d) = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$)
- (2) (a) $X_0 = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $d(x, y) = |x - y|$
((X_0, d) ist ein Teilraum von \mathbb{R})
- (b) $X_0 = \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), $d(x, y) = |x - y|$
((X_0, d) Teilraum von \mathbb{R} .)

- (3) X – Menge aller k -Tupel reeller oder komplexer Zahlen
 $x = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, $y = \{\eta_1, \dots, \eta_k\}$, wobei $x = y \stackrel{\text{def}}{\iff} \xi_i = \eta_i \quad \forall i = 1, \dots, k$.
 Setzen

$$d_p(x, y) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^k |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_i |\xi_i - \eta_i| & , p = \infty \end{cases}$$

(X, d_p) ist für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ein metrischer Raum.

Für $p = 2$: $(X, d_2) = \mathbb{R}^k$ oder $= \mathbb{C}^k$

- (4) (a) $T \neq \emptyset$ beliebige Menge, $X := \{x : T \rightarrow \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C} : x \text{ beschränkt}\}$ mit

$$x = y \stackrel{\text{def}}{\iff} x(t) = y(t) \quad \forall t \in T, \quad d(x, y) = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|$$

$M(T) := (X, d)$ – Raum der beschränkten, reell- bzw. komplexwertigen Funktionen.

- (b) $T = [a, b]$, $X = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C} : x \text{ stetig}\}$
 $x = y \iff$ wie in a), $d(x, y) = \max_t |x(t) - y(t)|$ (Tschebyscheff-Metrik)
 $(X, d) = C[a, b] \subset M([a, b])$ (Teilraum)
- (c) $T = \mathbb{N}$, $X = \{\{\xi_i\}_{i=1}^\infty : \xi_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ beschränkt}\}$, $d(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|$
 $l_\infty = m := (X, d)$ – Raum der beschränkten Zahlenfolgen
- (5) (a) $X = \{\{\xi_i\} : \xi_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ konvergent}\}$ d wie in 4.(c) $(X, d) = c$ – Raum der konvergenten Zahlenfolgen
- (b) $X = \{\{\xi_i\} : \xi_i \rightarrow 0\}$, d wie in 4.(c)
 $(X, d) = c_0$ – Raum der Nullfolgen
 Es gilt: $c_0 \subset c \subset m$

- (6) Sei $X = \{\{\xi_i\}_{i \geq 1} : \xi_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Setzen $d(x, y) = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$
 $(X, d) =: s$ – Raum der Zahlenfolgen.

- (7) X – Menge der reellen Zahlen einschließlich der uneigentlichen Elemente $-\infty, \infty$.
 Sei $S : X \rightarrow [-1, +1]$ gegeben durch

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & -\infty < x < +\infty \\ \pm 1 & x = \pm\infty \end{cases}$$

Setzen $d(x, y) = |S(x) - S(y)|$ für $x, y \in X$. Dann ist $(X, d) = \overline{\mathbb{R}}$ ein metrischer Raum.

- (8) Sei

$$X = \left\{ \{\xi_i\}_{i \geq 1} : \xi_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^p < \infty \right\},$$

wobei $1 \leq p < \infty$ eine fixierte Zahl ist. Setzen

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$(X, d_p) = l_p$ ist metrischer Raum.

Aufgabe (1.1-5). Sei $X = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Zeigen Sie, dass folgende Funktionen Metriken auf X sind:

1. $d(n, m) = \frac{|n - m|}{nm}$
2. $d(n, m) = \begin{cases} 0 & , n = m \\ 1 + \frac{1}{n + m} & , n \neq m \end{cases}$

Aufgabe (1.1-6). Seien (X_i, d_i) ($i = 1, 2, \dots$) beliebige metrische Räume und

$$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i := \left\{ f : \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i : f(i) \in X_i \quad \forall i = 1, 2, \dots \right\}.$$

Setzen

$$\xi_i = f(i) \text{ und } f \hat{=} \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} = x \text{ mit } \xi_i \in X_i.$$

Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist, wobei

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(\xi_i, \eta_i)}{1 + d_i(\xi_i, \eta_i)}$$

ist.

Aufgabe (1.1-7). Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases} \quad (x, y \in X)$$

Ist (X, d) ein metrischer Raum?

Aufgabe (1.1-8). Sei $X \neq \emptyset$ und (Y, d) ein metrischer Raum, sowie $f : X \rightarrow Y$ eine injektive Funktion. Dann ist $d_1 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d_1(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2))$ eine Metrik auf X .

1.2 Konvergenz in metrischen Räumen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition (1.2-1). Seien $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$). Die Folge $\{x_n\}$ heißt konvergent in (X, d) , wenn ein Element $x \in X$ existiert, sodass gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > n_0.$$

x heißt **Grenzwert** der Folge $\{x_n\}$. (kurz: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x$, $x_n \rightarrow x$).

Wir sagen: $\{x_n\}$ konvergiert **der Metrik nach** gegen x .

Bemerkung (1.2-2). $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{R}} 0$

Beispiel (1.2-3). (siehe Beispiel 7 aus 1.1)
 $(X, d) = \mathbb{R}$

- a) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. Bekannt: In \mathbb{R} konvergiert $\{x_n\}$ gegen $1 \in \mathbb{R}$
 $d(x_n, x) = |S(x_n) - S(1)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$?
 richtig, da $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
 $\Rightarrow x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} 1$

b) $x_n = n$. Bekannt: $x_n = n$ divergiert in \mathbb{R} gegen $+\infty$.

Nun betrachtet in $\overline{\mathbb{R}}$:

$$d(x_n, \infty) = \left| \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ d. h. } x_n \xrightarrow{\overline{\mathbb{R}}} \infty.$$

Satz (1.2-4). Seien $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ in (X, d) . Dann gilt:

$$d(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} d(x, y)$$

(Stetigkeit der Abstandsfunktion)

Beweis. nach 1.1. Aufgabe 2 ist

$$0 \leq |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \rightarrow 0 \quad \square$$

Folgerung (1.2-5) (Eindeutigkeit des Grenzwertes). Die in (X, d) konvergente Folge $\{x_n\}$ besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis. $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow y$

$$0 = d(x_n, x_n) \rightarrow 0 = d(x, y) \Rightarrow x = y \quad \square$$

Folgerung (1.2-6). Sei $\{x_{n_k}\}$ eine Teilfolge der Folge $\{x_n\}$. Dann gilt:

Wenn $x_n \rightarrow x$, so ist $x_{n_k} \rightarrow x$.

Beweis. $d(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x) \rightarrow 0 \quad \square$

Definition (1.2-7). Die Menge $M \subseteq X$ heißt in (X, d) **beschränkt**, wenn ein $K > 0$ und ein $x_0 \in X$ existiert, sodass gilt:

$$d(x, x_0) \leq K \quad \forall x \in M.$$

Folgerung (1.2-8). $M \subseteq X$ beschränkt $\Leftrightarrow \forall \tilde{x} \in X$ ist $\{d(x, \tilde{x})\}_{x \in M}$ beschränkt in \mathbb{R} .

Satz (1.2-9). Jede im Raum (X, d) konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. $x_n \rightarrow x$, d. h. $d(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow \{d(x_n, x)\}$ beschränkt in \mathbb{R} . \square

Definition (1.2-10). Sei $X \neq \emptyset$ beliebig und d_1, d_2 Metriken auf X . Die metrischen Räume (X, d_1) und (X, d_2) heißen **topologisch gleich** und die Metriken **zueinander äquivalent**, wenn gilt:

$$x_n \rightarrow x \text{ in } (X, d_1) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x \text{ in } (X, d_2)$$

oder

$$d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d_2(x_n, x) \rightarrow 0.$$

Aufgabe (1.2-11). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Wir setzen

$$\tilde{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Zeigen Sie: \tilde{d} ist eine Metrik auf X und die Räume (X, d) und (X, \tilde{d}) sind topologisch gleich.

Lemma (1.2-12). Seien $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, k$) und $p \geq 1$. Dann gilt $\forall j = 1, \dots, k$:

$$|d_j| \leq \max_{i=1, \dots, k} |\alpha_i| \leq \left\{ \sum_{i=1}^k |\alpha_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq k^{\frac{1}{p}} \max_{i=1, \dots, k} |\alpha_i|.$$

Beweis. Offensichtlich! □

Satz (1.2-13). Die Räume (X, d_p) ($1 \leq p \leq \infty$) aus den Beispielen aus 1.1 sind alle topologisch gleich.

Beweis. Seien $x, y \in X$. Lemma (1.2-12) liefert:

$$d_\infty(x, y) \leq d_p(x, y) \leq k^{\frac{1}{p}} d_\infty(x, y) \Rightarrow \text{Behauptung.} \quad \square$$

Definition (1.2-14). Sei $\xi_i^{(n)}, \xi_i \in \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, k$). Setzen $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^k$ und $x = \{\xi_i\}_{i=1}^k$. Man sagt, die Folge $\{x_n\}$ **konvergiert koordinatenweise** gegen x , wenn gilt:

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Folgerung (1.2-15). In den Räumen (X, d_p) ($1 \leq p \leq \infty$) aus Beispiel 3 aus 1.1 ist die Konvergenz der Metrik nach die koordinatenweise Konvergenz (sogar gleichmäßig, da $k < \infty$).

Beweis. Es genügt die Behauptung für $p = \infty$ zu zeigen: Aus Lemma (1.2-12) folgt

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| = \max_{j=1, \dots, k} |\xi_j^{(n)} - \xi_j| = d_\infty(x_n, x) \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$1. \text{ Sei } d_\infty(x_n, x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$2. |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall i = 1, \dots, k, \text{ d. h.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_i : |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon \quad \forall n > n_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$\text{Setzen } n_0 = \max_{i=1, \dots, k} (n_i) \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow d_\infty(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \quad \square$$

Satz (1.2-16). Die Konvergenz der Metrik nach ist in den Räumen

(a) $C[a, b]$ die gleichmäßige Konvergenz auf $[a, b]$

(b) l_∞, c, c_0 die gleichmäßige koordinatenweise Konvergenz

(c) s die koordinatenweise Konvergenz (im Allgemeinen nicht gleichmäßig)

Beweis. (c) s : $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$, $\varphi(t) = \frac{1}{1+t}$

$$\Rightarrow \exists \varphi^{-1} : [0, 1) \rightarrow [0, \infty), \varphi^{-1}(\tau) = \frac{\tau}{1-\tau}$$

φ^{-1} stetig in $\tau = 0$.

$$x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i \geq 1}, x = \{\xi_i\} \quad (\in s)$$

$$(a) d(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i^{(n)} - \xi_i|}{1 + |\xi_i^{(n)} - \xi_i|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{Für } j \in \mathbb{N} \text{ fixiert sei } t_j^{(n)} = |\xi_j^{(n)} - \xi_j| \Rightarrow \frac{1}{2^j} \frac{t_j^{(n)}}{1 + t_j^{(n)}} \leq d(x_n, x) \rightarrow 0$$

Setzen $\tau_n = \varphi(t_j^{(n)}) \Rightarrow \tau_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow t_j^{(n)} = \varphi^{-1}(\tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\forall j$ erfüllt \Rightarrow koordinatenweise Konvergenz

(b) Sei $|\xi_j^{(n)} - \xi_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ($i = 1, 2, \dots$), d. h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_i : |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > n_i$ ($i = 1, 2, \dots$)

Da $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ konvergiert $\exists k : \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Setzen $n_0 = \max_{i=1, \dots, k} (n_i)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(x_n, x) &= \left(\sum_{i=1}^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} \right) \frac{1}{2^i} \varphi(t_i^{(n)}) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \varphi(t_i^{(n)}) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &\stackrel{\text{Monotonie von } \varphi}{\leq} \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \forall n > n_0 \end{aligned}$$

□

Aufgabe (1.2-17). Sei $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty} \in l_p$ ($1 \leq p < \infty$) ($n = 1, 2, \dots$) und $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_p$. Zeigen Sie: $d(x_n, x) \rightarrow 0$

\Leftrightarrow

$$(1) |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall i = 1, 2, \dots$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|^p < \varepsilon^p \forall N > N_0 \forall n = 1, 2, \dots$$

Beispiel (1.2-18). Sei M die Menge aller bezüglich des Lebesgue-Maßes μ messbaren Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[0, 1]$.

Betrachten die Äquivalenzrelation $f \sim g \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mu\{t \in [0, 1] : f(t) \neq g(t)\} = 0$ (*)

Müssten eigentlich die zugehörigen Äquivalenzklassen betrachten! Wir interpretieren (*) als "Gleichheit".

$f = g \Leftrightarrow (*)$

$X = \{f \in M : \text{mit } (*) \text{ als Gleichheit}\}$. Setzen

$$d(f, g) := \int_0^1 \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} dt.$$

Offenbar ist d eine Metrik. $(X, d) = S([0, 1])$

Behauptung: Konvergenz in S ist Konvergenz dem Maße nach, d. h. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S} f \Leftrightarrow \mu(E_n(\sigma)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \forall \sigma > 0$, wobei $E_n(\sigma) = \{t \in [0, 1] : |f_n(t) - f(t)| \geq \sigma\}$

Nachweis: 1. Sei $d(f_n, f) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} d(f_n, f) &\geq \int_{E_n(\sigma)} \frac{|f_n(t) - f(t)|}{1 + |f_n(t) - f(t)|} dt \\ &\geq \frac{\sigma}{1 + \sigma} \int_{E_n(\sigma)} dt = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \mu(E_n(\sigma)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mu(E_n(\sigma)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \forall \sigma > 0$$

2. Sei $\mu(E_n(\sigma)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall \sigma > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$d(f_n, f) \leq \int_{E_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} 1 dt + \int_{[0,1] \setminus E_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} |f_n(t) - f(t)| dt \leq \mu\left(E_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Da $\mu\left(E_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists n_0 : \mu\left(E_n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2} \forall n > n_0$
 $\Rightarrow d(f_n, f) < \varepsilon \forall n > n_0$, d. h. $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S} f$

1.3 Vollständige metrische Räume

Definition (1.3-1). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$). Die Folge $\{x_n\}$ heißt **Cauchyfolge** oder **Fundamentalfolge** in (X, d) , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0.$$

Man schreibt auch kurz: $d(x_n, x_m) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$

Satz (1.3-2). Jede in (X, d) konvergente Folge ist dort eine Fundamentalfolge.

Beweis. Sei $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0 \quad \square$

Aufgabe (1.3-3). $X = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$, $d(x, y) = |x - y|$.

Zeigen Sie: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ist in (X, d) eine Fundamentalfolge, aber dort nicht konvergent.

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \text{Fundamentalfolge}$$

Betrachten $x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Aufgabe (1.3-4). Sei $X = [0, 1]$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 1 \\ \frac{3}{2} & : x = 0 \\ \frac{1}{n} & : x = \frac{1}{n} \quad (n = 2, 3, \dots) \\ x & : \text{sonst} \end{cases}$$

$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, vgl. (1.1-8); ist Metrik

Sind die Folgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in (X, d) Fundamentalfolgen oder konvergente Folgen?

(a) $x_n = \frac{1}{n}$

(b) $x_n = \frac{2}{n}$

(c) $x_n = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{n}$

(d) $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Satz (1.3-5). Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Fundamentalfolge in (X, d) . Dann gilt:

(a) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist beschränkt.

(b) Besitzt $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge, so ist $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ konvergent.

Beweis. Dieser Sachverhalt ist in \mathbb{R} wohlbekannt!

Sei $\tilde{x} \in X$. Setzen $\alpha_n = d(x_n, \tilde{x})$ ($n = 1, 2, \dots$).

Für $n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow |\alpha_n - \alpha_m| = |d(x_n, \tilde{x}) - d(x_m, \tilde{x})| \leq d(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ ist in \mathbb{R} eine Fundamentalfolge $\Rightarrow \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ ist beschränkt, d. h.

$\exists k > 0 : |\alpha_n| \leq k \quad \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow d(x_n, \tilde{x}) \leq k \quad \forall n = 1, 2, \dots$

zu (b). Sei $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x$. Setzen $\tilde{x} := x$, $\alpha_n = d(x_n, x) \Rightarrow \alpha_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0$.

Da $\{\alpha_n\}$ Fundamentalfolge, $\alpha_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} 0$ (in \mathbb{R}) $\Rightarrow \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0$ oder $x_n \rightarrow x$. □

Definition (1.3-6). Der metrische Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn jede Fundamentalfolge in (X, d) auch dort konvergiert.

Bemerkung (1.3-7). \mathbb{R} mit der Metrik $d(x, y) = |x - y|$ ist vollständig.

Satz (1.3-8). Seien $(X_i, d^{(i)})$ ($i = 1, \dots, k$) beliebige metrische Räume und $X = X_1 \times \dots \times X_k$. Für $x = \{\xi_i\}_{i=1}^k, y = \{\eta_i\}_{i=1}^k \in X$ setzen wir

$$d_\infty(x, y) = \max_i d^{(i)}(\xi_i, \eta_i).$$

Dann gilt:

(a) (X, d_∞) ist ein metrischer Raum und die Konvergenz der Metrik nach ist die koordinatenweise Konvergenz.

(b) (X, d_∞) ist vollständig $\iff (X_i, d^{(i)})$ ist vollständig $\forall i = 1, \dots, k$

Beweis. zu (a): beweist man wie in Folgerung (1.2-15)

zu (b): Offenbar gilt:

$$d^{(j)}(\xi_j, \eta_j) \leq d_\infty(x, y) \quad \forall j = 1, \dots, k$$

1) Seien die $(X_i, d^{(i)})$ vollständig und $\{x_n\}$ mit $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^k \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) eine Fundamentalfolge in (X, d_∞)

$$\Rightarrow d^{(j)}(\xi_j^{(n)}, \xi_j^{(m)}) \leq d_\infty(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$$

$\{\xi_j^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ ist in $(X_j, d^{(j)})$ eine Fundamentalfolge $\forall j = 1, \dots, k$

$$\Rightarrow \exists \xi_j \in X_j : d^{(j)}(\xi_j^{(n)}, \xi_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall j = 1, \dots, k).$$

Setzen $x = \{\xi_i\}_{i=1}^k \xrightarrow{(a)} d_\infty(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow (X, d_\infty)$ vollständig.

2) Sei nun (X, d_∞) vollständig und $j \in \{1, \dots, k\}$ fixiert, sowie $\{\xi_j^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ eine Fundamentalfolge in $(X_j, d^{(j)})$. Für $i \neq j$ wählen wir ein $\xi_i \in X_i$ und setzen

$$\xi_i^{(n)} = \xi_i \quad \forall n = 1, 2, \dots, \text{ sowie } x_n = \{\xi_i^{(n)}\}_{i=1}^k \in X$$

$$\Rightarrow d_\infty(x_n, x_m) = \max_i d^{(i)}(\xi_i^{(n)}, \xi_i^{(m)}) = d^{(j)}(\xi_j^{(n)}, \xi_j^{(m)}) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{x_n\} \text{ ist in } X$$

eine Fundamentalfolge $\Rightarrow \exists x = \{\xi_i\}_{i=1}^k \in X : d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow d^{(j)}(\xi_j^{(n)}, \xi_j) \rightarrow 0$

$$\Rightarrow (X_j, d^{(j)}) \text{ vollständig } (j = 1, \dots, k) \quad \square$$

Aufgabe (1.3-9). Sei (X, d) der metrische Raum aus (1.1-6). Zeigen Sie, dass gilt:

a) Die Konvergenz der Metrik nach in (X, d) ist die koordinatenweise Konvergenz.

b) (X, d) vollständig $\iff (X_i, d_i)$ vollständig $\forall i = 1, 2, \dots$

Bemerkung (1.3-10). Satz (1.3-8) bleibt richtig, wenn man für beliebiges $p \geq 1$ auf X folgende Metrik wählen würde:

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^k d^{(i)}(\xi_i, \eta_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(alle diese Räume sind topologisch gleich)

Folgerung (1.3-11). Da \mathbb{R} vollständig ist, ist auch $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vollständig und damit die Räume $\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^k$.

Satz (1.3-12). Die Räume $M(T), C[a, b], l_\infty, c, c_0, s$ sind alle vollständig.

Beweis. für $M(T)$: Sei $x_n \in M(T) \ n = 1, 2, \dots$ und $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge in $M(T)$, d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : d(x_n, x_m) = \sup_t |x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n, m > n_0$$

\Rightarrow Für $t \in T$ gilt: (*) $|x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n, m > n_0 \Rightarrow \{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$ ist Fundamentalfolge in \mathbb{R} oder \mathbb{C}

$\Rightarrow \exists \alpha_t \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C} : |x_n(t) - \alpha_t| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \ \forall t \in T$, da \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} vollständig.

Da α_t eindeutig bestimmt ist, erhalten wir eine Funktion $x : T \rightarrow \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} gegeben durch $x(t) = \alpha_t$. Lassen in (*) $m \rightarrow \infty$ gehen

$$\Rightarrow |x_n(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > n_0, \ \forall t \in T \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \text{Zeigen: } x \in M(T). \text{ Betrachten } |x(t)| &\stackrel{(**)}{\leq} |x(t) - x_{n_0+1}(t) + x_{n_0+1}(t)| \\ &\leq |x(t) - x_{n_0+1}(t)| + |x_{n_0+1}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + K_{n_0+1} \ \forall t \in T \Rightarrow x \in M(T) \end{aligned}$$

$$\text{Aus (**)} \text{ folgt } d(x_n, x) = \sup_{t \in T} |x_n(t) - x(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \forall n > n_0 \Rightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{M(T)} x \quad \square$$

Aufgabe (1.3-13). Zeigen Sie, dass l_p vollständig ist ($1 \leq p < \infty$).

1.4 Der Satz über die Vervollständigung metrischer Räume

Definition (1.4-1). Die metrischen Räume (X, d) und (Y, ρ) heißen **zueinander isometrisch**, wenn eine Bijektion $f : X \rightarrow Y$ existiert, sodass gilt:

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \ \forall x_{1/2} \in X.$$

f heißt dann **Isometrie**

Bemerkung (1.4-2). Zueinander isometrische Räume sind als "gleich" anzusehen.

Definition (1.4-3). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Man sagt, M liegt **dicht in X** , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \forall x \in X \ \exists x_\varepsilon \in M : d(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$$

Beispiel (1.4-4). \mathbb{Q} liegt dicht in \mathbb{R} .

Satz (1.4-5) (über die Vervollständigung metrischer Räume). Sei (X_0, ρ) ein unvollständiger metrischer Raum. Dann existiert bis auf Isometrie genau ein vollständiger metrischer Raum (\tilde{X}, d) mit einem Unterraum (\tilde{X}_0, d) , sodass \tilde{X}_0 in X dicht liegt und (\tilde{X}_0, d) zu (X_0, ρ) isometrisch ist. (\tilde{X}, d) heißt die Vervollständigung von (X_0, ρ) .

Beweis. a) Sei F die Menge aller Fundamental- (Cauchy-) Folgen $\{x_n\}$ von (X_0, ρ) . Zeigen: $\forall \{x_n\}, \{y_n\} \in F$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$.

Es gilt:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

\Rightarrow Die Folge $\{\rho(x_n, y_n)\}$ ist in \mathbb{R} eine Fundamentalfolge. Da \mathbb{R} vollständig ist, existiert $\lim \rho(x_n, y_n)$.

b) Wir erklären auf F folgende Äquivalenzrelation:

Für $\{x_n\}, \{y_n\} \in F$ sei

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$$

(Aufgabe: Zeigen Sie, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt!)

Offenbar gilt: Aus $\rho(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ($x \in X_0$) und $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ folgt:

$$\rho(y_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

c) Sei \tilde{X} die Menge aller durch obige Äquivalenzrelation erzeugten Äquivalenzklassen $\tilde{x} = [\{x_n\}]$.

Seien $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ und entsprechend $\{x_n\}, \{y_n\} \in F$ Repräsentanten von \tilde{x} bzw. \tilde{y} ,

d. h. $\{x_n\} \in \tilde{x}, \{y_n\} \in \tilde{y}$. Wir setzen:

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n).$$

Zeigen: d ist wohldefiniert.

Sei $\{x'_n\} \in \tilde{x}, \{y'_n\} \in \tilde{y}$ weitere Vertreter von \tilde{x} bzw. \tilde{y}

$$\Rightarrow |\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leq \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim \rho(x'_n, y'_n) = \lim \rho(x_n, y_n) =: d(\tilde{x}, \tilde{y})$$

Zeigen: d ist eine Metrik auf \tilde{X} .

$$1) \tilde{x} = [\{x_n\}] = [\{y_n\}] = \tilde{y} \Leftrightarrow \{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$$

$$2) \text{ Seien } \{x_n\} \in \tilde{x}, \{y_n\} \in \tilde{y}, \{z_n\} \in \tilde{z} \Rightarrow \rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(y_n, z_n).$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt:

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq d(\tilde{x}, \tilde{z}) + d(\tilde{y}, \tilde{z}) \Rightarrow (\tilde{X}, d) \text{ ist ein metrischer Raum.}$$

d) Zeigen: (X_0, ρ) ist isometrisch zu einem gewissen Teilraum (\tilde{X}_0, d) von (\tilde{X}, d) .

Sei $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, die Klasse von Fundamentalfolgen $\{x_n\} \in F$ mit

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X_0} x_0. \text{ Insbesondere liegt die stationäre Folge } \{x_0, x_0, \dots\} \text{ in } \tilde{x}_0.$$

Damit haben wir eine injektive Zuordnung der Gestalt: $x_0 \leftrightarrow \{x_0, x_0, \dots\} \leftrightarrow \tilde{x}_0$

Wir setzen $f(x_0) := \tilde{x}_0$ und erhalten eine Bijektion $f: X_0 \rightarrow \tilde{X}_0 := f(X_0)$ (Bild)

Für $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0 \in \tilde{X}_0$ gilt:

$$d(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, y_0) = \rho(x_0, y_0) \Rightarrow (X_0, \rho) \text{ und } (\tilde{X}_0, d) \text{ zueinander isometrisch.}$$

e) Zeigen: \tilde{X}_0 liegt dicht in \tilde{X} .

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ beliebig, $\{x_n\} \in \tilde{x}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig

$$\Rightarrow \exists n_0 : \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > n_0.$$

Setzen $x_0 := x_{n_0+1}$ und betrachten die Klasse $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}_0$

$$\Rightarrow d(\tilde{x}, \tilde{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

f) Zeigen: (\tilde{X}, d) ist vollständig. Sei $\{\tilde{x}^{(n)}\}$ eine Fundamentalfolge in (\tilde{X}, d)

Aus e) folgt: $\forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in X_0$ und damit $\tilde{x}_n \in \tilde{X}_0$ mit

$$d(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, x_m) = d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_m) \leq d(\tilde{x}_n, \tilde{x}^{(n)}) + d(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}^{(m)}) + d(\tilde{x}^{(m)}, \tilde{x}_m) < \frac{1}{n} + d(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{y}^{(m)}) + \frac{1}{m} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \{x_n\} \text{ ist Fundamentalfolge in } (X_0, \rho) \Rightarrow \exists \tilde{x} \in \tilde{X} \text{ mit } \{x_n\} \in \tilde{x} \Rightarrow$$

$$d(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}) \leq d(\tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}_n) + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) < \frac{1}{n} + d(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \tilde{x}^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\tilde{X}} \tilde{x}$$

\Rightarrow Behauptung

g) Eindeutigkeit von (\tilde{X}, d) bis auf Isometrie

Sei (\tilde{Y}, d_1) ein vollständiger metrischer Raum und (\tilde{Y}_0, d_1) ein Teilraum, sodass \tilde{Y}_0 dicht in \tilde{Y} liegt und (\tilde{Y}_0, d_1) isometrisch zu (X_0, ρ) ist.

Sei $f_1 : X_0 \rightarrow \tilde{Y}_0$ die entsprechende Isometrie.

Sei nun $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\{x_n\} \in \tilde{x}$ und $\tilde{y}_n = f_1(x_n) \in \tilde{Y}_0$

$$\Rightarrow d_1(\tilde{y}_n, \tilde{y}_m) = \rho(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \{\tilde{y}_n\}$ ist Fundamentalfolge in (\tilde{Y}, d_1)

\Rightarrow Da (\tilde{Y}, d_1) vollständig $\exists \tilde{y} \in \tilde{Y} : d_1(\tilde{y}_n, \tilde{y}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Damit haben wir $\tilde{x} \in \tilde{X}$ das Element $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ zugeordnet, d. h. setzen $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ mit $\tilde{y} = g(\tilde{x})$.

Offenbar ist g wohldefiniert (Aufgabe!).

Setzen nun $\tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X}$

$$\Rightarrow d(\tilde{x}, \tilde{x}') = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(f_1(x_n), f_1(x_n')) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(\tilde{y}_n, \tilde{y}_n')$$

$$= d_1(\tilde{y}, \tilde{y}') = d_1(g(\tilde{x}), g(\tilde{x}')) \Rightarrow (\tilde{X}, d) \text{ und } (\tilde{Y}, d_1) \text{ isometrisch.} \quad \square$$

Folgerung (1.4-6). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und (X_0, d) ein Unterraum. Dann gilt:

(X, d) ist bis auf Isometrie genau die Vervollständigung von (X_0, d) , wenn X_0 dicht in X liegt.

Beweis. ergibt sich aus dem Beweis von Satz 5 (siehe auch Bemerkung (1.5-20)) \square

Beispiel (1.4-7).

(a) \mathbb{R} ist die Vervollständigung von \mathbb{Q}

(b) $\left. \begin{array}{l} X_0 = (0, 1), \quad d(x, y) = |x - y| \\ X = [0, 1], \quad d(x, y) = |x - y| \end{array} \right\} X \text{ Vervollständigung von } X_0$

(c) $C_0[0, 1]$ – Raum aller auf $[0, 1]$ definierten Polynome $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k (a_k \in \mathbb{C})$ mit der Tschebyscheff-Metrik.

Nach Weierstraßschem Approximationssatz liegt $C_0[0, 1]$ dicht in $C[0, 1]$, d. h. $C[0, 1]$ ist die Vervollständigung von $C_0[0, 1]$.

(d) l_p' – Menge aller finiten Folgen $x = \{\xi_i\} (\xi_i \in \mathbb{R}, \mathbb{C}) (\forall x \exists i_0 : \xi_i = 0 \forall i \geq i_0)$ mit der Metrik des l_p
 l_p' liegt dicht l_p .

Sei $x = \{\xi_i\} \in l_p$, d. h. $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p.$$

Setzen $x_\varepsilon = \{\xi_1, \dots, \xi_{n_0}, 0, 0, \dots\} \in l_p'$

$$\Rightarrow (d_p(x, x_\varepsilon))^p = \sum_{i=1}^{n_0} |\xi_i - \xi_i|^p + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |\xi_i - 0|^p < \varepsilon^p \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

1.5 Einige topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen

Sei (X, d) stets ein metrischer Raum.

Definition (1.5-1). Sei $x_0 \in X$ fixiert, $r > 0$. Die Menge

$$K(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

heißt "offene" **Kugel** (auch offene **r-Umgebung** von x_0) in (X, d) und die Menge

$$\overline{K}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

heißt **"abgeschlossene" Kugel** in (X, d) mit Mittelpunkt x_0 und Radius r .

Beispiel (1.5-2). $X = [0, 1]$, $d(x, y) = |x - y|$, $K\left(1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

Lemma (1.5-3). Sei $K := K(x_0, r)$, $\bar{K} := \bar{K}(x_0, r)$. Dann gilt

- (1) $\forall x \in K \exists r_x > 0 : K(x, r_x) \subseteq K$
- (2) $\forall x \notin \bar{K} \exists r_x > 0 : K(x, r_x) \subseteq X \setminus \bar{K}$
- (3) Sei $\tilde{x} \in X$. Wenn $d(x_0, \tilde{x}) < \tilde{r} < \frac{r}{2}$, so ist $x_0 \in K(\tilde{x}, \tilde{r}) \subseteq K$

Beweis. Aufgabe. □

Definition (1.5-4). Sei $A \subseteq X$ beliebige Menge

- (a) Der Punkt $x \in A$ heißt **innerer Punkt** von A (in (X, d)), wenn eine Zahl $r > 0$ existiert, mit $K(x, r) \subseteq A$. Mit $\text{int}_X(A) = \text{int } A$ bezeichnen wir alle inneren Punkte von A (in (X, d))
- (b) Die Menge $A \subseteq X$ heißt **offen in** (X, d) , wenn gilt: $\text{int } A = A$
- (c) Die Menge $V \subseteq X$ heißt **Umgebung** des Punktes $x \in X$, wenn eine offene Menge $G \subseteq X$ existiert mit $x \in G \subseteq V$

$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(x)$ – System aller Umgebungen von $x \in X$.

Bemerkung (1.5-5). Jede "offene" Kugel $K(x_0, r)$ in (X, d) ist dort eine offene Menge und damit eine offene Umgebung von x_0 .

Beweis. Folgt aus Lemma (1.5-3) (Teil 1) □

Definition (1.5-6).

- (a) Der Punkt $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** (bzw. **Häufungspunkt**) der Menge $A \subseteq X$ (in (X, d)), wenn gilt:

$$V \cap A \neq \emptyset \quad (\text{bzw. } V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset) \quad \forall V \in \mathfrak{U}(x)$$

\bar{A} – Menge aller Berührungspunkte von A (in (X, d))

(**Abschließung von A**)

A' – Menge aller Häufungspunkte von A (in (X, d))

(**Ableitung von A**)

- (b) Die Menge $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** (in (X, d)), wenn gilt: $\bar{A} = A$.

Bemerkung (1.5-7). Jede "abgeschlossene" Kugel $\bar{K}(x_0, r)$ in (X, d) ist dort eine abgeschlossene Menge.

Beweis. $\forall A \subseteq X$ gilt: $A \subseteq \bar{A}$. Sei $A = \bar{K}(x_0, r)$ und $x \in \bar{A} \setminus A$

$\Rightarrow x \notin A$. Lemma (1.5-3) Teil 2: $\exists K(x, r_x) \subseteq X \setminus A$

$\Rightarrow K(x, r_x) \cap A = \emptyset$ zu $x \in \bar{A} \Rightarrow \bar{A} = A$ □

Frage (1.5-8). Sei $K = K(x_0, r)$, $\mathbb{S} = \mathbb{S}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$.

Ist $\bar{K} = K \cup \mathbb{S}$? ($\bar{K}(x_0, r) = K \cup \mathbb{S}$).

Lemma (1.5-9). Sei (X_0, d) ein Teilraum von (X, d) und $r > 0$, $x_0 \in X_0$.

Betrachten

$$\begin{aligned} K &= K(x_0, r) &:= \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \\ K_0 &= K_0(x_0, r) &:= \{x \in X_0 : d(x, x_0) < r\} \end{aligned}$$

Dann gilt $K_0 = K \cap X_0$.

Beweis. Offensichtlich. □

Satz (1.5-10). Sei (X_0, d) Teilraum von (X, d) , $A \subseteq X_0$. Dann gilt

- (a) A ist offen in $(X_0, d) \iff$ Es gibt eine in (X, d) offene Menge G mit $A = G \cap X_0$
- (b) A ist abgeschlossen in $(X_0, d) \iff$ Es gibt eine in (X, d) abgeschlossene Menge F mit $A = F \cap X_0$.

Beweis. (a)1. Sei A offen in $(X_0, d) \Rightarrow \forall a \in A \exists r_a > 0 : K_0(a, r_a) \subseteq A$
 $\Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} K_0(a, r_a)$. Setzen $G := \bigcup_{a \in A} K(a, r_a) \xrightarrow{\text{Lemma (1.5-9)}} A = G \cap X_0$.

Aus Anhang T folgt, da $K(a, r_a)$ offen $\Rightarrow G$ offen in X .

2. Sei Bedingung erfüllt, d. h. $A = G \cap X_0$, G offen in X

$\Rightarrow \forall a \in G \exists K(a, r_a) : K(a, r_a) \subseteq G$ (speziell gilt dies für $a \in G \cap X_0 = A$)

für $a \in G \cap X_0 \xrightarrow{\text{Lemma (1.5-9)}} K_0(a, r_a) = K(a, r_a) \cap X_0 \subseteq G \cap X_0 = A$

$\Rightarrow A$ offen in X_0

(b) folgt aus der Definition der Abgeschlossenheit als Komplement einer offenen Menge (siehe Anhang T) □

Aufgabe (1.5-11). Sei (X_0, d) ein Teilraum von (X, d) und $A \subseteq X_0$, sowie

$\overline{A^0}$ die Abschließung von A in X_0 ,

\overline{A} die Abschließung von A in X .

Zeigen Sie, dass gilt: $\overline{A^0} = \overline{A} \cap X_0$ (Analoges für die Ableitung von A)

Beispiel: $(X, d) = \mathbb{R}$, $X_0 = \mathbb{Q}$, $A = \{r \in \mathbb{Q} : 0 < r < \sqrt{2}\}$ Ermitteln Sie: $\overline{A^0}$ und \overline{A} .

Definition (1.5-12). Sei $A \subseteq X$ eine beliebige Menge und $x_0 \in X$. Die Zahl

$$d(x_0, A) := \inf_{a \in A} d(x_0, a) = \text{dist}(x_0, A)$$

heißt **Abstand des Punktes x_0 von der Menge A** .

Aufgabe (1.5-13). Für $\emptyset \neq A \subseteq X$, $x_0, y_0 \in X$ gilt

$$|d(x_0, A) - d(y_0, A)| \leq d(x_0, y_0)$$

Aufgabe (1.5-14). Die Funktion $\text{dist}(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

Satz (1.5-15). Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$. Dann gilt

(a) $x \in \overline{A} \iff \exists x_n \in A (n = 1, 2, \dots)$ mit $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x$

(b) $x \in A' \iff \exists x_n \in A (n = 1, 2, \dots)$ mit $x_n \neq x_m \forall n \neq m$ und $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x$

(c) x ist Berührungspunkt von $A \iff d(x, A) = 0$

(d) $x \in \text{int } A \iff d(x, X \setminus A) > 0$

Beweis. (b) 1. Sei $x \in A' \Rightarrow K(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \forall r > 0$.

Setzen $r_1 = 1$ und wählen $x_1 \in K(x, 1) \cap (A \setminus \{x\})$

Setzen $r_2 = \min\{\frac{1}{2}, d(x_1, x)\}$ und wählen $x_2 \in K(x, r_2) \cap (A \setminus \{x\}) \Rightarrow x_1 \neq x_2$

Setzen $r_3 = \min\{\frac{1}{3}, d(x_2, x)\}$ und wählen $x_3 \in K(x, r_3) \cap (A \setminus \{x\})$

$\Rightarrow x_1 \neq x_3, x_2 \neq x_3$

Verfahren fortsetzen: Erhalten Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in A, x_n \neq x_m (n \neq m)$,

$d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

2. Sei Bedingung erfüllt. Da $x_n \neq x_m \Rightarrow x_n \neq x \forall n$ (mit eventueller Ausnahme eines $n' \in \mathbb{N}$).

Da $d(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow \forall r > 0 \exists x_n \in K(x, r) \cap (A \setminus \{x\})$

$\Rightarrow V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \forall V \in \mathfrak{V}(x)$

$(x \in G \subseteq V, K(x, r') \subseteq G \subseteq V) \Rightarrow x \in A'$

(a) analog □

Definition (1.5-16). Sei $A \subseteq X$. Die Menge $\partial A := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$ heißt **Rand der Menge A** (natürlich auch von $(X \setminus A)$).

Aufgabe (1.5-17). Sei $A \subseteq X$ beliebig. Zeigen Sie, dass gilt

(a) $\overline{A} = A \cup A' = \text{int } A \dot{\cup} \partial A$

(b) $X = \text{int } A \dot{\cup} \partial A \dot{\cup} \text{int}(X \setminus A)$

(c) Gilt $\partial(K(x_0, r)) = \mathbb{S}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$?

Definition (1.5-18). Man sagt, die Menge A **liegt dicht** in der Menge B , wenn gilt: $B \subseteq \overline{A}$.

Beispiel (1.5-19). $(X, d) = \mathbb{R}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, A = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{A} = \mathbb{R} \Rightarrow B \subseteq \overline{A}$

Bemerkung (1.5-20) (Ergänzung zu (1.4-6)). Sei (X, d) vollständig, $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$. Dann gilt

(a) (X_0, d) vollständig $\Leftrightarrow X_0$ in X abgeschlossen.

(b) Der Raum $(\overline{X_0}, d)$ ist bis auf Isometrie die Vervollständigung von (X_0, d)

Bemerkung (1.5-21). $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \Rightarrow \text{int } \partial A \neq \emptyset$

Aufgabe (1.5-22). $A, B \subseteq X$. Man zeige:

(a) A dicht in $B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall b \in B \exists a_\varepsilon \in A : d(a_\varepsilon, b) < \varepsilon$ (Für $B = X$ vergleiche (1.4-3))

(b) Sei $B \subseteq \overline{A}$ und $r > 0$ fixiert. Dann gilt: $B \subseteq \bigcup_{a \in A} K(a, r)$.

(c) Sei $G \subseteq X$ offen und $A = G \cap B$. Dann gilt: Aus $G \subseteq \overline{B}$ folgt: $G \subseteq \overline{A}$.

Aufgabe (1.5-23). Zeigen Sie, dass aus $A \subseteq B \subseteq X$ folgt

(a) $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

(b) $\text{int } A \subseteq \text{int } B$

(c) $A' \subseteq B'$

(d) Gilt auch $\partial A \subseteq \partial B$?

Definition (1.5-24). Die Menge $A \subseteq X$ heißt **nirgendwo dicht** in X , wenn gilt:

$$\text{int } \overline{A} = \emptyset$$

Beispiel (1.5-25).

- (a) Im \mathbb{R}^2 ist jede Gerade eine nirgends dichte Menge.
- (b) In \mathbb{R} ist jede einpunktige Menge nirgends dicht.

Folgerung (1.5-26).

- (a) A nirgends dicht in $X \Leftrightarrow \overline{A}$ nirgends dicht in X
- (b) Sei $\emptyset \neq B \subseteq A$. Wenn A nirgends dicht in X , dann auch B
- (c) \emptyset ist nirgends dicht in X

Satz (1.5-27). Sei $A \subseteq X$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) A ist nirgends dicht in X .
- (b) $X \setminus \overline{A}$ liegt dicht in X (d. h. $X = \overline{X \setminus \overline{A}}$).
- (c) In jeder offenen Kugel von X befindet sich eine offene Kugel, die keine Punkte von A enthält.

Beweis. Wir benutzen aus Anhang T 5): $\text{int } A = X \setminus \overline{X \setminus A} \forall A \subseteq X$

$\Rightarrow \text{int } \overline{A} = X \setminus \overline{X \setminus \overline{A}} \Rightarrow (a) \Leftrightarrow (b)$

$(c) \Rightarrow (a)$: Annahme: $\exists x_0 \in \text{int } \overline{A}$, d. h. $\exists r > 0 : K(x_0, r) \subseteq \overline{A}$

$\stackrel{(c)}{\Rightarrow} \exists K(x, r_x) \subseteq K(x_0, r) \Rightarrow K(x, r_x) \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{A} \nmid x \in \overline{A} \Rightarrow (a)$

$(a) \Rightarrow (c)$: Annahme: (c) sei nicht erfüllt, d. h.

$\exists K := K(x_0, r)$, sodass $\forall K(x, r_x) \subseteq K$ gilt:

$K(x, r_x) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A} \forall x \in K \Rightarrow K \subseteq \overline{A} \Rightarrow x_0 \in \text{int } \overline{A} \neq \emptyset \nmid \square$

1.5.1 Stetigkeit

Seien (X, d) , (Y, ρ) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion.

Definition (1.5.1-1). Sei $x_0 \in X$ fixiert. Die Funktion $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ heißt **stetig im Punkt** $x_0 \in X$, wenn aus $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) und $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x_0$ stets folgt: $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Y} f(x_0)$

Satz (1.5.1-2). Folgende Bedingungen sind äquivalent:

- (1) $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ ist stetig in $x_0 \in X$
- (2) $\forall V := K(f(x_0), \varepsilon) \exists U := K(x_0, \delta) : f(U) \subseteq V$
- (3) $\forall V \in \mathfrak{B}(f(x_0)) \exists U \in \mathfrak{B}(x_0) : f(U) \subseteq V$

Beweis. Aufgabe. □

Definition (1.5.1-3). $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ heißt **stetig (in oder auf X)**, wenn f in jedem Punkt von X stetig ist.

Satz (1.5.1-4). Sei $\mathfrak{G}_{(X,d)}$ das System der offenen Menge von (X, d) . Analog $\mathfrak{G}_{(Y,\rho)}$. Dann gilt:

$$f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho) \text{ ist stetig} \Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_{(X,d)} \forall G \in \mathfrak{G}_{(Y,\rho)}$$

Beweis. (1) Sei Bedingung erfüllt. Benutzen (3) aus Satz (1.5.1-2):

Sei $x \in X$ beliebig und $y = f(x)$, sowie $V \in \mathfrak{V}(y)$, d. h. $\exists G \in \mathfrak{G}_Y : y \in G \subseteq V$
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(V)$. Setzen $U := f^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_X \Rightarrow U \in \mathfrak{V}(x)$

$\Rightarrow f(U) = f(f^{-1}(G)) = G \cap f(X) \subseteq G \subseteq V \Rightarrow$ Behauptung f stetig auf X .

(2) Sei f stetig auf X und $G \in \mathfrak{G}_Y$. Zeigen: $x \in f^{-1}(G)$ ist innerer Punkt von $f^{-1}(G) \Rightarrow y := f(x) \in G$. Da G offen in $Y \Rightarrow G \in \mathfrak{V}(y)$

(3) aus Satz $\xrightarrow{(1.5.1-2)} \exists U \in \mathfrak{V}(x) : f(U) \subseteq G$

Aus Erklärung der Umgebung und offene Menge (1.5-4)

$\Rightarrow \exists K := K(x, r) \subseteq U \Rightarrow f(K) \subseteq f(U) \subseteq G$

$\Rightarrow x \in K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}(G) \Rightarrow f^{-1}(G)$ ist offen in $X \Rightarrow$ Bedingung erfüllt. \square

Aufgabe (1.5.1-5).

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der Bedingungen:

(1) $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ stetig

(2) $f^{-1}(F)$ ist abgeschlossen in X für alle abgeschlossenen Mengen $F \subseteq Y$

(3) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \forall A \subseteq X$

(b) Sei $X \neq \emptyset$ und d_1, d_2 zwei Metriken auf X und $\mathfrak{G}_k := \mathfrak{G}_{(X, d_k)}$ ($k = 1, 2$). Zeigen Sie: Die Identität $\text{id}_X : (X, d_1) \rightarrow (X, d_2)$ mit $\text{id}_X(x) = x$ ist genau dann stetig, wenn $\mathfrak{G}_2 \subseteq \mathfrak{G}_1$

(c) Sei $(X_1, d^{(i)})$ ($i = 1, \dots, k$), (X, d) wie in (1.3-8).

Die Funktion $p_j : (X, d) \rightarrow (X_j, d^{(j)})$ mit $p_j(\{\xi_i\}_{i=1}^n) = \xi_j$ heißt **j -te Projektion** ($j = 1, \dots, k$). Man zeige: p_j ist stetig.

1.6 Separable metrische Räume

Definition (1.6-1). Der metrische Raum (X, d) heißt **separabel**, wenn eine höchstens abzählbare Menge $D = \{y_i\}_{i \in I} \subset X$ (I endlich oder $I = \mathbb{N}$) existiert, die in X dicht liegt, d. h. $\overline{D} = X$.

Bemerkung (1.6-2). Sei $\overline{D} = X$. Dann gilt: X endlich $\Leftrightarrow D$ endlich. (also interessiert bei der Separabilität im Wesentlichen der Fall: D abzählbar (unendlich))

Beispiel (1.6-3).

(a) $(X, d) = \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ dicht in \mathbb{R} und abzählbar.

(b) $(X, d) = C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ (reellwertige Funktionen); D sei die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten. D ist abzählbar und $\overline{D} = X$ (Nachweis!)

Satz (1.6-4). Jeder Teilraum (X_0, d) eines separablen Raumes (X, d) ist auch separabel.

Beweis. Sei $D = \{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\overline{D} = X$ und $d(x, X_0) = \inf_{x_0 \in X_0} d(x, x_0)$ der Abstand von $x \in X$ zur Menge $X_0 \subset X$. Aus der Definition des Infimums folgt:

$\forall j, i = 1, 2, \dots \exists x_{ji} \in X_0 : d(y_i, x_{ji}) < d(y_i, X_0) + \frac{1}{j}$. Setzen $D_0 = \{x_{ji}\}_{j, i=1}^{\infty}$

$\Rightarrow D_0$ ist abzählbar.

Zeigen: $\overline{D_0} = X_0$. Sei $x_0 \in X_0, \varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \exists i : d(x_0, y_i) < \frac{\varepsilon}{3}$. Weiter sei $j \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow d(x_0, x_{ji}) \leq d(x_0, y_i) + d(x_{ji}, y_i) < \frac{\varepsilon}{3} + d(y_i, x_0) + \frac{1}{j} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
 \Rightarrow Behauptung. \square

Bemerkung (1.6-5). Seien (X, d) und (Y, ρ) isometrisch. Dann gilt:

$$(X, d) \text{ separabel} \Leftrightarrow (Y, \rho) \text{ separabel}$$

Satz (1.6-6). Seien $(X_i, d^{(i)})$ ($i = 1, \dots, k$) metrische Räume und $X = \prod_{i=1}^k X_i$ mit der Metrik $d(x, y) = \max_{i=1, \dots, k} d^{(i)}(\xi_i, \eta_i)$ ($x = \{\xi_i\}, y = \{\eta_i\} \in X$). Dann gilt:

$$(X, d) \text{ separabel} \Leftrightarrow (X_i, d^{(i)}) \text{ separabel} \quad \forall i = 1, \dots, k$$

Beweis. 1. Sei (X, d) separabel und für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ wählen wir ein festes Element $\xi_i^{(0)} \in X_i$ und setzen dann für fixiertes $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$x_j^{(0)} = \left\{ \{\xi_i\}_{i=1}^k \in X : \xi_j \in X_j \text{ beliebig, } \xi_i = \xi_i^{(0)} \quad \forall i \neq j \right\}.$$

Für $x, y \in x_j^{(0)}$ folgt $d(x, y) = d^{(j)}(\xi_j, \eta_j)$. Mit $f_j : X \rightarrow X_j$ gegeben durch $f(x) = \xi_j$ sind die Räume $(x_j^{(0)}, d)$ und $(X_j, d^{(j)})$ isometrisch $\Rightarrow (x_j^{(0)}, d)$ separabel, da $(x_j^{(0)}, d)$ als Teilraum von (X, d) separabel ist.

2. Seien die $(X_j, d^{(j)})$ separabel und $\overline{D_j} = X_j$ in $(X_j, d^{(j)})$, wobei D_j abzählbar sei $\Rightarrow D := \prod_{i=1}^k D_j$ ist abzählbar und $\overline{D} = X$ in (X, d) . \square

Folgerung (1.6-7). $\mathbb{R}^k, \mathbb{C}, \mathbb{C}^k, C_{\mathbb{C}}[a, b]$ sind separabel ($C_{\mathbb{C}} = C_{\mathbb{R}} + iC_{\mathbb{R}}$)

Folgerung (1.6-8). Sei (X, d) separabel und $D = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ dicht in X , sowie $r > 0$ beliebig fixiert. Dann gilt: $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K(y_i, r)$.

Satz (1.6-9). Sei (X, d) separabel und $\emptyset \neq A \subseteq X$. Wenn ein $r > 0$ existiert mit $d(x, y) \geq r \quad \forall x, y \in A, x \neq y$, so ist A höchstens abzählbar.

Beweis. Sei $D = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ mit $\overline{D} = X \Rightarrow A \subseteq X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K\left(y_i, \frac{r}{3}\right)$.

Annahme: A ist überabzählbar

$$\Rightarrow \exists K_j = K\left(y_j, \frac{r}{3}\right), \exists x, y \in A : x \neq y, x, y \in K_j$$

$$\Rightarrow r \leq d(x, y) \leq d(x, y_j) + d(y, y_j) < \frac{2}{3}r \quad \square$$

Beispiel (1.6-10). Der Raum $l_{\infty} = m$ ist nicht separabel.

Beweis. Sei $A = \{\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_{\infty} : \xi_i = 0 \text{ oder } 1\} \Rightarrow$ für $x, y \in A$ und $x \neq y$ ist $d(x, y) = 1 \Rightarrow A$ ist abzählbar, wenn l_{∞} separabel wäre. Andererseits kann man folgende Funktion definieren: $f : A \rightarrow [0, 1]$ gegeben durch $f(\{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{2^i}$.

Offenbar ist f surjektiv $\Rightarrow A$ ist überabzählbar $\not\Leftarrow$ \square

Bemerkung (1.6-11). Es existieren nichtseparable Räume (nicht endlich) mit nicht endlichen separablen Teilräumen.

Beispiel (1.6-12). Der Raum $c_0 \subset l_\infty$ ist separabel.

Beweis. Betrachten den Fall reellwertiger Nullfolgen: Sei D die Menge aller finiten Folgen rationaler Zahlen $\Rightarrow D$ ist abzählbar. Zeigen: $\overline{D} = l_\infty$.

Sei $x = \{\xi_i\} \in c_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists i_0 : |\xi_i| < \frac{\varepsilon}{2} \forall i > i_0$.

Für $i = 1, \dots, i_0 \exists r_i \in \mathbb{Q} : |\xi_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Setzen $y = \{r_1, \dots, r_{i_0}, 0, 0, \dots\} \in D$

$\Rightarrow d(x, y) = \max \left(\sup_{i \leq i_0} |\xi_i - r_{i_0}|, \sup_{i > i_0} |\xi_i| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung \square

1.7 Die Verallgemeinerung der Intervallschachtelung und Mengen 1. und 2. Kategorie

Der klassische Intervallschachtelungssatz lautet:

Satz (1.7-1). Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n < b_n \forall n = 1, 2, \dots$. Wenn die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ folgende Bedingungen

$$(1) I_{n+1} \subseteq I_n \forall n = 1, 2, \dots$$

$$(2) b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

erfüllen, so existiert genau ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Wir wollen diesen Satz auf metrische Räume übertragen.

Definition (1.7-2). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$ eine Menge. Der Ausdruck

$$d(M) := \begin{cases} \sup_{x, y \in M} d(x, y) & : M \neq \emptyset \\ 0 & : M = \emptyset \end{cases}$$

heißt **Durchmesser** von M .

Bemerkung (1.7-3). Es gilt: $d(M) < \infty \Leftrightarrow M$ ist beschränkt.

Folgerung (1.7-4). Seien $M_n \subseteq X$ ($n = 1, 2, \dots$) beschränkte Mengen. Aus $d(M_n) \rightarrow 0$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$ folgt:

$$(a) M_n \neq \emptyset \forall n = 1, 2, \dots$$

$$(b) \exists! x_0 \in X \text{ mit } \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n = \{x_0\}$$

$$(c) \text{ Für jede Folge } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ mit } x_n \in M_n \forall n = 1, 2, \dots \text{ gilt: } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$$

Beweis. (a) ist trivial

zu (b): Seien $x_0, y_0 \in \bigcap M_n \Rightarrow x_0, y_0 \in M_n \forall n = 1, 2, \dots$
 $\Rightarrow 0 \leq d(x_0, y_0) \leq d(M_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x_0 = y_0$

zu (c): Sei $x_n \in M_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Da $x_0 \in M_n \forall n = 1, 2, \dots$
 $\Rightarrow d(x_n, x_0) \leq d(M_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \quad \square$

Hauptsatz (1.7-5). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) (X, d) ist vollständig
- (b) Für jede Folge $\{\overline{K_n}\}_{n=1}^\infty$ abgeschlossener Kugeln $\overline{K_n} = \overline{K}(x_n, r_n)$ mit $\overline{K_{n+1}} \subseteq \overline{K_n} \quad \forall n = 1, 2, \dots$ und $r_n \rightarrow 0$ gilt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K_n} \neq \emptyset$$

- (c) Für jede Folge $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ nichtleerer, abgeschlossener und beschränkter Mengen $M_n \subseteq X$ mit $M_{n+1} \subseteq M_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$ und $d(M_n) \rightarrow 0$ gilt:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$$

Beweis. Trivialerweise gilt: (c) \Rightarrow (b)

(a) \Rightarrow (c) Sei (X, d) vollständig und $\emptyset \neq M_n$ abgeschlossene beschränkte Menge $\forall n = 1, 2, \dots$ mit $M_{n+1} \subseteq M_n \quad \forall n, d(M_n) \rightarrow 0$

Nach dem Auswahlaxiom gilt: $\exists x_n \in M_n \quad (n = 1, 2, \dots)$.

Zeigen: $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ist eine Fundamentalfolge. Sei $m \geq n \Rightarrow M_m \subseteq M_n$

$\Rightarrow x_m \in M_n \quad \forall m \geq n \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(M_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{x_n\}$ ist Fundamentalfolge.

Da (X, d) vollständig ist, folgt $\exists x_0 \in X : x_n \rightarrow x_0$. Zeigen: $x_0 \in M_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Für fixiertes $n \in \mathbb{N}$ und $p \geq 1$ folgt $x_{n+p} \in M_n$. Da $x_{n+p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} x_0$ und M_n abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in M_n \quad \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \neq \emptyset$

(b) \Rightarrow (a) Sei also (b) erfüllt und $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ eine Fundamentalfolge in (X, d) . Wir wählen eine Zahlenfolge $\{r_k\}$ mit $r_1 > r_2 > \dots > r_k > r_{k+1} > \dots > 0$ und $2r_k \leq r_{k-1} \quad \forall k \geq 2$ (z. B. $r_k = \frac{1}{2^{k-1}} \quad (k \geq 1) \Rightarrow r_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$).

Da $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge ist gilt: $\exists n_1 : d(x_n, x_{n_1}) \leq r_1 \quad \forall n \geq n_1$ und $\exists n_2 > n_1 : d(x_n, x_{n_2}) \leq r_2 \quad \forall n \geq n_2$ Insbesondere ist $d(x_{n_2}, x_{n_1}) \leq r_1$

Weiter existiert ein $n_3 > n_2 : d(x_n, x_{n_3}) \leq r_3 \quad \forall n \geq n_3$.

Insbesondere ist $d(x_{n_3}, x_{n_2}) \leq r_2$.

Setzt man das Verfahren fort, so erhält man:

$\exists \{n_k\}$ mit $n_{k+1} > n_k, d(x_n, x_{n_k}) \leq r_k \quad \forall n \geq n_k$ und $d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq r_k \quad \forall k \geq 1$ (*)

Setzen $\overline{K_k} := \overline{K}(x_{n_k}, r_{k-1}) \quad (k \geq 2)$ Zeigen: $\overline{K_{k-1}} \subseteq \overline{K_k} \quad \forall k = 1, 2, \dots$

Sei $x \in \overline{K_{k+1}}$, d. h. $d(x, x_{n_{k+1}}) \leq r_k$. Betrachten

$d(x, x_{n_k}) \leq d(x, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq r_k + r_2 \leq r_{k+1} \Rightarrow x \in \overline{K_k}$.

Damit erfüllt die Folge $\{\overline{K_k}\}_{k=1}^\infty$ die Voraussetzung von (b) $\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{K_k} \neq \emptyset$

Aus Folgerung (-4) folgt $\exists! x_0 \in X : x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$, d. h. die Fundamentalfolge $\{x_n\}$

hat eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\} \Rightarrow x_n \rightarrow x_0$ (siehe (1.3-3) (b))

\Rightarrow Behauptung. □

Satz (1.7-6). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\overline{K_n} := \overline{K}(x_n, r_n)$ abgeschlossene Kugeln in $X \quad (n = 1, 2, \dots)$ mit folgenden Eigenschaften

- (1) $\overline{K_{n+1}} \subseteq \overline{K_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$

- (2) $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Dann existiert genau ein Punkt $x_0 \in X$ mit $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n$. Dabei gilt:

$$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x_0$$

Beweis. (Existenz) Zeigen: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist eine Fundamentalfolge.

Sei $m \geq n \Rightarrow \overline{K}_m \subseteq \overline{K}_n \Rightarrow x_m \in \overline{K}_n \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(2)} 0$
 $\Rightarrow \{x_n\}$ ist Fundamentalfolge.

Da (X, d) vollständig ist $\exists x_0 \in X : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x_0$. Zeigen: $x_0 \in \overline{K}_l \forall l = 1, 2, \dots$

Sei $l \in \mathbb{N}$ fixiert $\Rightarrow x_{l+p} \in \overline{K}_l \forall p = 0, 1, 2, \dots$

Da $x_{l+p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} x_0$ und \overline{K}_l abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in \overline{K}_l \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{K}_l$

(Eindeutigkeit) Sei $x_0, y_0 \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{K}_l \Rightarrow d(x_0, x_l) \leq r_l, d(y_0, x_l) \leq r_l \forall l \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_l) + d(y_0, x_l) \leq 2r_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow d(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 \quad \square$

Satz (1.7-7). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\emptyset \neq M_n \subseteq X$ ($n = 1, 2, \dots$) beschränkte abgeschlossene Menge mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) M_{n+1} \subseteq M_n \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$$(2) d(M_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Dann existiert genau ein Punkt $x_0 \in X$ mit $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Weiterhin konvergiert jede Folge $\{x_n\}$ mit $x_n \in M_n$ ($n = 1, 2, \dots$) gegen x_0 .

Beweis. (Existenz) Nach dem Auswahlaxiom existiert ein $x_n \in M_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Zeigen: $\{x_n\}_{n \geq 1}$ ist eine Fundamentalfolge.

Sei $m \geq n \Rightarrow M_m \subseteq M_n \Rightarrow x_m \in M_n \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(M_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \{x_n\}$ ist

eine Fundamentalfolge. Da (X, d) vollständig ist existiert ein $x_0 \in X : x_n \xrightarrow{X} x_0$.

Zeigen: $x_0 \in M_n \forall n = 1, 2, \dots$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert $\Rightarrow x_{n+p} \in M_n \forall p = 1, 2, \dots$

Da $x_{n+p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} x_0$ und M_n abgeschlossen ist, folgt $x_0 \in M_n \Rightarrow x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$

(Eindeutigkeit) Sei $x_0, y_0 \in M_n \forall n$
 $\Rightarrow 0 \leq d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_n) + d(y_0, x_n) \leq 2d(M_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow x_0 = y_0. \quad \square$

Satz (1.7-8). Wenn in einem metrischen Raum (X, d) für jede Folge beschränkter, abgeschlossener nichtleerer Mengen, die die Bedingungen (1) und (2) von Satz (1.7-7) erfüllt, die Aussage von Satz (1.7-7) gilt, so ist (X, d) vollständig.

Beweis. Sei $\{x_n\}_{n \geq 1}$ eine Fundamentalfolge in X

$\Rightarrow \exists n_1 : d(x_n, x_{n_1}) < 1 \quad \forall n \geq n_1$.

Setzen $M_1 = \overline{K}_1 := \overline{K}(x_{n_1}, 1) \Rightarrow x_{n_1} \in M_1$ und $d(M_1) \leq 2 \cdot 1$

Weiter $\exists n_2 > n_1 : d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_2 \Rightarrow x_{n_2} \in M_1$.

Setzen $\overline{K}_2 = \overline{K}\left(x_{n_2}, \frac{1}{2}\right)$ und $M_2 = M_1 \cap \overline{K}_2 \Rightarrow x_{n_2} \in M_2$ und $d(M_2) \leq 2 \cdot \frac{1}{2}$

Weiter $\exists n_3 > n_2 : d(x_n, x_{n_3}) < \frac{1}{3} \quad \forall n \geq n_3 \Rightarrow x_{n_3} \in M_2$.

Setzen $\overline{K}_3 = \overline{K}\left(x_{n_3}, \frac{1}{3}\right)$ und $M_3 = M_2 \cap \overline{K}_3 \Rightarrow x_{n_3} \in M_3$ und $d(M_3) \leq 2 \cdot \frac{1}{3}$

Verfahren fortgesetzt, liefert: abgeschlossene Mengen $\emptyset \neq M_k \subseteq X$ und eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ von $\{x_n\}$ mit $x_{n_k} \in M_k, M_{k+1} \subseteq M_k$ und $d(M_k) \leq \frac{2}{k} \forall k = 1, 2, \dots$

Nach Voraussetzung $\exists x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$, wobei gilt: $x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$

$\Rightarrow x_n \rightarrow x_0$ (siehe (1.3-5)(b)) \Rightarrow Behauptung \square

Satz (1.7-9). Wenn in einem metrischen Raum (X, d) für jede Folge abgeschlossener Kugeln, die die Bedingungen (1) und (2) aus Satz (1.7-3) erfüllt, die Aussage von Satz (1.7-6) gilt, so ist (X, d) vollständig.

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge in X

$\Rightarrow \exists n_1 : d(x_n, x_{n_1}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \forall n \geq n_1.$

Setzen $K_1 := \overline{K}\left(x_{n_1}, \left(\frac{1}{2}\right)^0\right) \Rightarrow x_n \in K_1 \forall n \geq n_1.$

Weiter $\exists n_2 > n_1 : d(x_n, x_{n_2}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 \forall n \geq n_2.$

Setzen $K_2 = \overline{K}\left(x_{n_2}, \left(\frac{1}{2}\right)^1\right) \Rightarrow x_n \in K_2 \forall n \geq n_2.$

Verfahren fortgesetzt liefert: $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

mit $K_k := \overline{K}\left(x_{n_k}, \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \forall k \geq 1$, wobei $x_n \in K_k \forall n \geq n_k$,

insbesondere gilt $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} (*)$

Setzen nun $M_k = \overline{K}\left(x_{n_k}, 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \forall k \geq 1$ und zeigen:

$M_{k+1} \subset M_k \forall k \geq 1.$

Sei $x \in M_{k+1}$, d. h. $d(x, x_{n_{k+1}}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

Betrachten $d(x, x_{n_k}) \leq d(x, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \stackrel{(*)}{\leq} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$

$\Rightarrow x \in M_k$

Mithin ist die Bedingung 1) und wegen Radius von M_k gleich $\frac{1}{2^{k-1}}$ auch Bedingung

2) von Satz (1.7-3) erfüllt. Nach Voraussetzung gibt es ein $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$

$\Rightarrow x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0 \in X \Rightarrow x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \Rightarrow$ Behauptung. \square

Bemerkung (1.7-10).

(a) Satz (1.7-6) gilt nicht, wenn abgeschlossene Kugeln durch offene ersetzt werden

(b) Die Bedingung (2) $r_n \rightarrow 0$ sichert nicht nur Eindeutigkeit, sondern auch Existenz von x_0

Beispiel (1.7-11).

(a) $(X, d) = \mathbb{R}, K_n = \left(0, \frac{2}{n}\right) = K\left(\frac{1}{n}, r_n\right)$ (offen), wobei $r_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ aber

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$$

$$(b) X = \mathbb{N}, d(n, m) = \begin{cases} 0 & : n = m \\ 1 + \frac{1}{n+m} & : n \neq m \end{cases}$$

(X, d) ist vollständig.

Sei $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Fundamentalfolge in X : $\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : d(n_k, n_l) < \varepsilon \quad \forall k, l > k_0$.
 Wählen $\varepsilon = 1$: $\exists k_0 : d(n_k, n_l) < 1 \quad \forall k, l > k_0 \Rightarrow$ da für $n \neq m$ $d(n, m) > 1$
 $\Rightarrow d(n_k, n_l) = 0 \Rightarrow n_k = n_l \quad \forall k, l > k_0 \Rightarrow \{n_k\}$ ist ab $k_0 + 1$ stationär
 \Rightarrow Folge konvergiert $n_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} n \quad n = n_k = n_l \quad \forall k, l > k_0 \Rightarrow (X, d)$ ist vollständig.

Betrachten die abgeschlossenen Kugeln $\overline{K}_n = \overline{K}\left(n, 1 + \frac{1}{2n}\right)$.

$$\text{Sei } m > n: d(m, n) = 1 + \frac{1}{m+n} < 1 + \frac{1}{2n} \Rightarrow \overline{K}_n = \{n, n+1, \dots\}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{n+1} \subseteq \overline{K}_n \text{ mit } r_n = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \text{ und } \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n = \emptyset$$

Definition (1.7-12). Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subseteq X$ beliebige Teilmenge. A heißt **Menge 1. Kategorie** in (X, d) , wenn abzählbar viele in (X, d) nirgends dichte Mengen $A_k \subseteq X$ existieren mit

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Jede andere Menge, die nicht von 1. Kategorie ist, heißt **Menge 2. Kategorie**.

Bemerkung (1.7-13). Jede in (X, d) nirgends dichte Menge A ist von 1. Kategorie, insbesondere $A = \emptyset$ ($A_1 = A, A_k = \emptyset \quad \forall k \geq 2$).

Folgerung (1.7-14).

- 1° Die Vereinigung abzählbar vieler Mengen 1. Kategorie ist von 1. Kategorie
- 2° Wenn A von 1. Kategorie und $B \subseteq A \Rightarrow B$ von 1. Kategorie
- 3° Wenn A von 2. Kategorie und $A \subseteq B \Rightarrow B$ von 2. Kategorie
- 4° Mengen 2. Kategorie sind nicht leer.

Beispiel (1.7-15). $(X, d) = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}$ ist von 1. Kategorie, aber $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\}$)

Satz (1.7-16). In einem vollständigen metrischen Raum ist jede nichtleere offene Menge von 2. Kategorie.

Beweis. Sei (X, d) vollständig und $\emptyset \neq G \subseteq X$ offen. Nehmen an, G ist von 1. Kategorie, d. h. es existieren nirgends dichte Mengen A_k ($k = 1, 2, \dots$) mit $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Sei $x \in G$ beliebig $\Rightarrow \exists K(x, r) : K(x, r) \subseteq G$.

Da A_1 nirgends dicht ist (Satz (1.5-27)) $\exists K(x_1, r_1) : K(x_1, r_1) \subseteq K(x, r)$ und $K(x_1, r_1) \cap A_1 = \emptyset$

Wählen $0 < \varepsilon_1 < r_1 : \overline{K}_1 = \overline{K}_1(x_1, \varepsilon_1) \subseteq K(x_1, r_1) \Rightarrow \overline{K}_1 \cap A_1 = \emptyset$

Da A_2 nirgends dicht $\exists K(x_2, r_2) \subseteq K(x_1, \varepsilon_1)$ mit $K(x_2, r_2) \cap A_2 = \emptyset$.

Wählen $0 < \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ so, dass $\overline{K}_2 = \overline{K}_2(x_2, \varepsilon_2) \subseteq K(x_2, r_2) \Rightarrow \overline{K}_2 \cap A_2 = \emptyset$.

Setzen Verfahren fort und erhalten so abgeschlossene Kugeln $\overline{K}_n = \overline{K}_n(x_n, \varepsilon_n)$ mit $0 < \varepsilon_n < \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$ und $\overline{K}_n \cap A_n = \emptyset$ ($\forall n = 1, 2, \dots$) sowie $\overline{K}_{n+1} \subseteq \overline{K}_n$

Da $\varepsilon_n \rightarrow 0 \xrightarrow{\text{Satz (1.7-6)}} \exists y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n \subseteq G$ (da $K(x, r) \subseteq G$)

$\Rightarrow y_0 \notin A_n \quad \forall n = 1, 2, \dots \nexists (G = \bigcup A_n) \Rightarrow$ Behauptung □

Folgerung (1.7-17).

- (a) Ein vollständiger metrischer Raum ist eine Menge von 2. Kategorie in sich.
- (b) In einem vollständigen metrischen Raum ist das Komplement einer Menge 1. Kategorie stets von 2. Kategorie. Eine solche Menge nennt man **Residualmenge**.

1.8 Der Fixpunktsatz von Banach

Ursprünglich wurde dieser Satz für kontrahierende Operatoren aufgestellt.

Definition (1.8-1). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A : X \rightarrow X$ eine Funktion, genannt Operator.

- (a) Der Punkt $x^* \in X$ heißt **Fixpunkt** des Operators A , wenn gilt:

$$Ax^* = x^*$$

- (b) A heißt **kontrahierend**, wenn eine Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ existiert, sodass gilt:

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Satz (1.8-2) (Fixpunktsatz von Banach). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $a_n \in \mathbb{R}$ ($n = 1, 2, \dots$) und $A : X \rightarrow X$ ein Operator mit

$$d(A^n x, A^n y) \leq a_n d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so besitzt A genau einen Fixpunkt x^* in X .

Beweis. (Eindeutigkeit) Seien $x^*, y^* \in X$ Fixpunkte von A

$$\Rightarrow x^* = Ax^* = A^2 x^* = \dots = A^n x^* \quad \forall n \geq 1 \quad \text{und} \quad y^* = A^n y^*.$$

$$\text{Da } \sum a_n < \infty \exists n_0 : a_{n_0} < 1 \Rightarrow d(x^*, y^*) = d(A^{n_0} x^*, A^{n_0} y^*) \leq a_{n_0} d(x^*, y^*)$$

$$\Rightarrow d(x^*, y^*) = 0 \Rightarrow x^* = y^*.$$

(Existenz) Sei $x_0 \in X$ ein beliebiger "Startpunkt" und $x_n = Ax_{n-1} \quad \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow (\text{per Induktion}) \quad x_n = A^k x_{n-k} = A^{n-1} x_1 = A^n x_0 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = A^n x_1$$

$$\Rightarrow d(x_{n+1}, x_n) = d(A^n x_1, A^n x_0) \leq \underbrace{a_n d(x_1, x_0)}_{=C} = C a_n$$

$$\Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq C \sum_{j=n}^{n+p-1} a_j \leq C \sum_{j=n}^{\infty} a_j \quad (*)$$

$$\Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall p \geq 1 \Rightarrow \{x_n\} \text{ ist eine Fundamentalfolge in } X$$

$$X \xrightarrow{\text{vollständig}} \exists x^* \in X : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x^*$$

$$\Rightarrow d(x^*, Ax^*) \leq d(x^*, x_n) + d(Ax^*, Ax_{n-1}) \leq d(x^*, x_n) + a_1 d(x^*, x_{n-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow Ax^* = x^* \quad \square$$

Folgerung (1.8-3).

- (a) Der Beweis von Satz (1.8-2) ist konstruktiv, d. h. der Fixpunkt x^* kann durch die im Beweis konstruierte Folge $\{x_n\}$ angenähert werden, daher folgt aus (*) für $p \rightarrow \infty$ die Fehlerabschätzung

$$d(x^*, x_n) \leq C \sum_{j=n}^{\infty} a_j \quad (**)$$

- (b) Für $a_n = \alpha^n$ ($0 < \alpha < 1$) haben wir den Fall des kontrahierenden Operators. Dabei geht (***) über in

$$d(x^*, x_n) \leq d(x_1, x_0) \sum_{j=n}^{\infty} \alpha^j = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_1, x_0)$$

Beispiel (1.8-4). Lösbarkeitsbedingung für das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(t, x(t)), x(0) = x_0 \quad (\in \mathbb{R}) \quad (\text{AWP})$$

Sei $f : [0, a] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und erfülle die Bedingungen

- (1) $\exists M > 0 : |f(t, x)| \leq M \quad \forall t, x$
- (2) $\exists L > 0 : |f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \quad \forall t, x_2, x_1$

Wir überführen das AWP in eine äquivalente Integralgleichung:
 $x(t) = (Ax)(t)$ ($t \in [0, a]$), wobei

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

ist. Offenbar ist A ein Operator von $C[0, a]$ in sich und $C[0, a]$ ist vollständig. Suchen die Zahlen a_n !

$$|(Ax_2)(t) - (Ax_1)(t)| = \left| \int_0^t (f(\tau, x_2) - f(\tau, x_1)) d\tau \right| \leq L \int_0^t |x_2(\tau) - x_1(\tau)| d\tau \leq Lt d(x_2, x_1)$$

$$\Rightarrow |A^2 x_2 - A^2 x_1| \leq L \int_0^t |Ax_2 - Ax_1| d\tau \leq L \int_0^t L + d(x_1, x_2) d\tau = L^2 \frac{t^2}{2} d(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow |A^n x_2 - A^n x_1| \leq \frac{(Lt)^n}{n!} d(x_1, x_2) \leq \frac{(La)^n}{n!} d(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow d(A^n x_2, A^n x_1) \leq \frac{(La)^n}{n!} d(x_1, x_2) \Rightarrow a_n = \frac{(La)^n}{n!}$$

Nun gilt: $\sum \frac{(La)^n}{n!} < \infty \Rightarrow \exists x^* \in C[0, a]$ mit $Ax^* = x^*$, d. h.

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x^*(\tau)) d\tau \quad \forall t \in [0, a]$$

$$\Rightarrow x^*(0) = x_0 \text{ und } x^* \text{ ist differenzierbar} \Rightarrow \frac{dx^*}{dt}(t) = f(t, x^*(t)) \quad \forall t \in [0, a]$$

Aufgabe (1.8-5). Berechnen Sie die Lösung der Gleichung $2^x = 4x$ ($x \in \mathbb{R}$) (dort wo es notwendig ist) iterativ mit der Anzeigenauigkeit Ihres Taschenrechners.

1.9 Kompaktheit in metrischen Räumen

Vorspann

Vor mehr als hundert Jahren bewies der tschechische Mathematiker Bernhard Bolzano (1781-1848) in seinem Buch "Paradoxien des Unendlichen", dass jede beschränkte unendliche Teilmenge des \mathbb{R}^1 mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

In welcher Form lässt sich dieser Sachverhalt auf Teilmengen eines beliebigen metrischen Raumes übertragen? Ist die Beschränktheit das Wesentliche? Oder?

Beispiel (1.9-1). Sei $(X, d) = l_2$ und $A = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, wobei $e_n = \{\delta_{jn}\}_{j=1}^{\infty}$. Offenbar ist A beschränkt, da

$$d(e_n, 0) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\delta_{jn}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Außerdem gilt für $n \neq m$:

$$d(e_n, e_m) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\delta_{jn} - \delta_{jm}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad (*)$$

Annahme: A besitzt einen Häufungspunkt in $l_2 \Rightarrow$ es existiert in A eine konvergente Teilfolge, die damit eine Fundamentalfolge sein muss. Dies ist wegen $(*)$ nicht möglich.

Sei (X, d) stets ein metrischer Raum.

Definition (1.9-2).

- (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Menge $N_\varepsilon \subseteq X$ heißt ε -**Netz** für die Menge $A \subseteq X$, wenn gilt:

$$\forall a \in A \exists x \in N_\varepsilon : d(a, x) < \varepsilon$$

(Achtung: Hier kann sich mit ε auch die Menge N_ε ändern, im Gegensatz zur Definition (1.4-3), wo M nicht von ε abhängt!)

- (b) Die Menge $A \subseteq X$ heißt **präkompakt** (oder **total beschränkt**) in (X, d) , wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε -Netz für A existiert.

Bemerkung (1.9-3).

- (a) Jede endliche Menge ist präkompakt.
 (b) $A \subseteq X$ ist präkompakt $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ präkompaktes ε -Netz für A

Folgerung (1.9-4).

- (a) N_ε ist ε -Netz für $A \Leftrightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in N_\varepsilon} K(x, \varepsilon)$
 (b) $A \subseteq X$ ist genau dann präkompakt, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $a_1, \dots, a_{n_\varepsilon} \in A$ existieren, sodass gilt:

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} K(a_i, \varepsilon)$$

- (c) Jede präkompakte Menge ist beschränkt.

Aufgabe (1.9-5). Zeigen Sie, dass für $A \subseteq X$ gilt:

$$A \text{ ist präkompakt} \Leftrightarrow \overline{A} \text{ ist präkompakt.}$$

Folgerung (1.9-6). Jeder präkompakte Raum (X, d) ist separabel (siehe 1.6)

Beweis. Sei X präkompakt $\Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots \exists$ ein endliches $\frac{1}{n}$ -Netz $N_{\frac{1}{n}}$ für X .

Setzen $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_{\frac{1}{n}} \Rightarrow D$ abzählbar und $\overline{D} = X$.

(Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ beliebig $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$; $N_{\frac{1}{n}}$ ist ein $\frac{1}{n}$ -Netz für X , d. h.

$\exists y \in N_{\frac{1}{n}} : d(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. Nun ist aber $y \in D \Rightarrow$ Behauptung) □

Definition (1.9-7).

- (a) Sei $\{G_i\}_{i \in I}$ ein System offener Mengen $G_i \subseteq X$. Das System $\{G_i\}_{i \in I}$ heißt **offene Überdeckung** für die Menge $A \subseteq X$, wenn gilt: $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$
- (b) Die Menge $A \subseteq X$ heißt **kompakt** (in (X, d)), wenn in jeder offenen Überdeckung $\{G_i\}_{i \in I}$ von A eine endliche Überdeckung $\{G_{i_k}\}_{k=1}^n$ für A existiert.
 $(A \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k})$
- (c) Die Menge $A \subseteq X$ heißt **relativ kompakt** (in (X, d)), wenn \bar{A} kompakt ist.

Folgerung (1.9-8). Jede relativ kompakte bzw. kompakte Menge $A \subseteq X$ ist präkompakt und damit beschränkt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow A \subseteq \bar{A} \subseteq \bigcup_{a \in \bar{A}} K(a, \varepsilon) \Rightarrow \{K(a, \varepsilon)\}_{a \in \bar{A}}$ ist eine offene Überdeckung für \bar{A} . Da \bar{A} kompakt ist, folgt, dass eine endliche Überdeckung $\{K(a_i, \varepsilon)\}_{i=1}^n$ für \bar{A} existiert, d. h. $A \subseteq \bar{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^n K(a_i, \varepsilon) \Rightarrow A$ (\bar{A}) ist präkompakt $\Rightarrow A$ (\bar{A}) ist beschränkt. \square

Satz (1.9-9). Sei $(\emptyset \subseteq) K \subseteq X$. K ist kompakt in (X, d) genau dann, wenn der Teilraum (K, d) ein kompakter metrischer Raum ist (d. h. Kompaktheit hängt nicht vom Oberraum ab!)

Beweis. 1) Sei K kompakt in (X, d) und $U_i \subseteq K$ offene Mengen in (X, d) ($i \in I$) mit $K = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Aus (1.5-10) folgt: es existieren in (X, d) offene Mengen $G_i \subseteq X$, sodass gilt $U_i = G_i \cap K$ ($\forall i \in I$) $\Rightarrow K = \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$

$\Rightarrow \{G_i\}$ ist in (X, d) eine offene Überdeckung für K . Da K kompakt ist, folgt $\exists \{G_{i_k}\}_{k=1}^n$ mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k} \Rightarrow K = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \Rightarrow (K, d)$ ist kompakt.

2) Umkehrung rückwärts analog. \square

Satz (1.9-10). Jede kompakte Menge $K \subseteq X$ ist in X abgeschlossen.

Beweis. Zeigen: $X \setminus K$ ist offen in (X, d) (vergleiche Anhang T).

Sei $x \in X \setminus K$ beliebig fixiert. $\forall y \in K$ setzen wir $r_y = \frac{1}{3}d(x, y)$ und $V_y := K(x, r_y)$, sowie $W_y := K(y, r_y) \Rightarrow V_y \cap W_y = \emptyset \forall y \in K$ (*) und $K \subseteq \bigcup_{y \in K} W_y \Rightarrow \{W_y\}_{y \in K}$

ist eine offene Überdeckung für K . Da K kompakt ist, existieren W_{y_i} ($i = 1, \dots, n$), sodass gilt: $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{y_i} =: W$.

Offenbar ist W offen. Setzen $V := \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$ (da endlich viele) $\Rightarrow V$ offen. Aus (*) folgt $V \cap W = \emptyset \Rightarrow K \cap V = \emptyset$ und $x \in V \Rightarrow x \in V \subseteq X \setminus K$. Da V offen ist, folgt $\exists K(x, r') \subset V \Rightarrow K(x, r') \subseteq X \setminus K \Rightarrow x \in \text{int}(X \setminus K) \Rightarrow X \setminus K$ ist offen $\Rightarrow K$ ist abgeschlossen. \square

Satz (1.9-11). Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $F \subseteq X$ beliebige Teilmenge. Dann gilt: F ist kompakt $\Leftrightarrow F$ ist in X abgeschlossen.

Beweis. Seien G_i ($i \in I$) offene Mengen in X mit $F \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Da F abgeschlossen ist folgt, dass $X \setminus F$ offen in X ist. Somit folgt $X = \bigcup_{i \in I} G_i \cup (X \setminus F)$. Da X kompakt ist existieren G_{i_k} ($k = 1, \dots, n$): $X = \bigcup_{k=1}^n G_{i_k} \cup (X \setminus F) \Rightarrow F \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_k} \Rightarrow F$ ist kompakt. \square

Folgerung (1.9-12). Sei (X, d) beliebiger metrischer Raum, $F \subseteq X$ abgeschlossen in X , $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist $F \cap K$ kompakt.

Eine duale Formulierung der Kompaktheit

Definition (1.9-13). Sei $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Das Mengensystem \mathcal{S} heißt **zentriert**, wenn jeder Durchschnitt endlich vieler Mengen aus \mathcal{S} nicht leer ist.

Satz (1.9-14). (X, d) beliebiger metrischer Raum. Dann sind äquivalent:

- (a) (X, d) ist ein kompakter metrischer Raum
- (b) Jedes System $\{F_i\}_{i \in I}$ abgeschlossener Mengen $F_i \subseteq X$ mit $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ besitzt ein endliches Teilsystem $\{F_{i_k}\}_{k=1}^n$ mit $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} = \emptyset$
- (c) Jedes zentrierte System abgeschlossener Mengen von X besitzt einen nicht-leeren Durchschnitt.

Beweis. Seien $A_i \subseteq X$ ($i \in I$). Dann gilt offenbar: $X = \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) = \emptyset$

(a) \Leftrightarrow (b), (b) \Leftrightarrow (c) \square

Folgerung (1.9-15).

- (a) Sei $\{K_i\}_{i \in I}$ ein zentriertes System kompakter Mengen $K_i \subseteq X$. Dann ist $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.
- (b) (Satz von Cantor): Sei $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine fallende Folge kompakter nichtleerer Mengen $K_n \subseteq X$. Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Beweis. (a) Sei $\{K_i\}_{i \in I}$ zentriert und $K \in \{K_i\}_{i \in I}$. Da die K_i insbesondere abgeschlossen sind, folgt $G_i := X \setminus K_i$ ($i \in I$) sind offene Mengen.

Annahme: $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset \Rightarrow \forall x \in K \exists i_x \in I : x \notin K_{i_x} \Rightarrow x \in G_{i_x}$

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{x \in K} G_{i_x}$ (offene Überdeckung). Da K kompakt ist, existieren

$G_{i_{x_k}}$ ($k = 1, \dots, n$): $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n G_{i_{x_k}} \Rightarrow K \subseteq \bigcup_{k=1}^n (X \setminus K_{i_{x_k}})$

$\Rightarrow K \cap \bigcap_{k=1}^n K_{i_{x_k}} = \emptyset$ (zu zentriert) $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$

(b) $K_1 \supseteq K_2 \subseteq \dots$. Seien $K_{i_1}, \dots, K_{i_l} \in \{K_n\}$. O. B. d. A. sei $i_l = \max_{k=1, \dots, l} i_k$

$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^l K_{i_k} \supseteq K_{i_l} \neq \emptyset \Rightarrow \{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist zentriertes System $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ \square

Definition (1.9-16).

- (a) Die Menge $A \subseteq X$ heißt **folgen-kompakt** (in (X, d)), wenn jede unendliche Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in A$ ($n = 1, 2, \dots$) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in A besitzt.
- (b) Die Menge $A \subseteq X$ heißt **relativ folgen-kompakt**, wenn \overline{A} folgen-kompakt ist.

Bemerkung (1.9-17). Es gilt $A \subseteq X$ ist folgen-kompakt \Leftrightarrow jede unendliche Teilmenge von A besitzt einen Häufungspunkt, der in A liegt. (siehe Vorspann)

Satz (1.9-18). Jede kompakte Menge $K \subseteq X$ ist folgen-kompakt.

Beweis. Nehmen an, dass K nicht folgen-kompakt ist. Daraus folgt es gibt eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in K$ ($n = 1, 2, \dots$), die keine konvergente Teilfolge besitzt. Setzen $K_n = \{x_k : k \geq n\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Wäre K_n endlich, so besäße $\{x_n\}$ eine stationäre Teilfolge, die natürlich konvergiert \nmid .

Nun sind alle K_n abgeschlossen (sonst würde eine konvergente Teilfolge existieren) und $K_n \supseteq K_{n+1} \quad \forall n \geq 1$ Nach Satz von Cantor (1.9-15) (b) ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Sei also $x \in \bigcap K_n \Rightarrow x \in K_1$, d. h. $\exists n' : x = x_{n'} \Rightarrow x_{n'} \notin K_{n'+1} \nmid \Rightarrow$ Behauptung. \square

Folgerung (1.9-19). Ein folgen-kompakter bzw. kompakter metrischer Raum (X, d) ist vollständig.

Beweis. Sei $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge in X . Da X folgen-kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$, woraus folgt, dass $\{x_n\}$ konvergiert. Daraus folgt die Behauptung. \square

Folgerung (1.9-20). Jede relativ kompakte Menge ist auch relativ folgen-kompakt.

Satz (1.9-21). Jede relativ folgen-kompakte Menge $A \subseteq X$ ist präkompakt.

Beweis. Annahme: A ist nicht präkompakt $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$, sodass sich A nicht durch endlich viele Kugeln mit dem Radius ε_0 überdecken lässt. Für $x_1 \in A$ folgt dann $A \not\subseteq K(x_1, \varepsilon_0) \Rightarrow \exists x_2 \in A : d(x_2, x_1) \geq \varepsilon_0$.

Weiter gilt: $A \not\subseteq \bigcup_{i=1}^2 K(x_i, \varepsilon_0) \Rightarrow \exists x_3 \in A : d(x_i, x_3) \geq \varepsilon_0$;

Weiter gilt: $A \not\subseteq \bigcup_{i=1}^3 K(x_i, \varepsilon_0) \Rightarrow \dots$ Fortsetzung dieses Verfahrens liefert eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in A \quad \forall n$ und $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$ ($n \neq m$) $\Rightarrow \{x_n\}$ besitzt keine konvergente Teilfolge $\nmid \Rightarrow$ Behauptung. \square

Satz (1.9-22) (Satz von Hausdorff).

- (a) Jede relativ kompakte Menge $A \subseteq X$ ist präkompakt.
- (b) Wenn (X, d) vollständig ist, so ist jede präkompakte Menge $A \subseteq X$ auch relativ kompakt.

Beweis. (a) folgt aus Folgerung (1.9-20) und Satz (1.9-21)

(b) Sei (X, d) vollständig und $A \subseteq X$ präkompakt $\Rightarrow \bar{A}$ ist präkompakt.

Annahme: A ist nicht relativ kompakt $\Leftrightarrow \bar{A}$ ist nicht kompakt \Rightarrow es existiert eine offene Überdeckung $\{G_\alpha\}$ für \bar{A} , sodass jedes endliche Teilsystem von $\{G_\alpha\}$ die Menge \bar{A} nicht überdeckt. Sei $\mathcal{F} := \{M \subseteq \bar{A} : M \text{ lässt sich nicht durch endlich viele Mengen aus } \{G_\alpha\} \text{ überdecken}\}$. Da \bar{A} präkompakt ist, existieren endlich viele offene Kugeln $V_k^{(1)} = K\left(\bar{a}_{k1}, \frac{1}{2}\right)$ mit $\bar{a}_{k1} \in \bar{A}$ ($k = 1, \dots, m_1$).

$$\bar{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_1} V_k^{(1)} \Rightarrow \bar{A} = \bigcup_{k=1}^{m_1} \underbrace{(V_k^{(1)} \cap \bar{A})}_{\text{Kugeln in } \bar{A}} \Rightarrow \exists k' : K_1 := V_{k'}^{(1)} \cap \bar{A} \in \mathcal{F}$$

Weiterhin, da \bar{A} präkompakt ist, existieren offene Kugeln $V_k^{(2)} = K\left(\bar{a}_{k2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

mit $\bar{a}_{k2} \in \bar{A}$, ($k = 1, \dots, m_2$) und $\bar{A} = \bigcup_{k=1}^{m_2} (V_k^{(2)} \cap \bar{A})$

$\Rightarrow \exists k'' : K_2 = V_{k''}^{(2)} \cap \bar{A} \in \mathcal{F}$ und $K_2 \cap K_1 \neq \emptyset$

(wäre $K_1 \cap (V_k^{(2)} \cap \bar{A}) = \emptyset \quad \forall (V_k^{(2)} \cap \bar{A}) \in \mathcal{F} \Rightarrow K_1 \subseteq \bigcup_{\substack{\text{endl.} \\ \notin \mathcal{F}}} (V_k^{(2)} \cap \bar{A}) \Rightarrow K_1 \notin \mathcal{F} \text{!}$)

Verfahren fortsetzen, liefert: Kugeln K_n im Teilraum \bar{A} mit Mittelpunkt $x_n \in \bar{A}$ und Radius $\frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) und $K_{n-1} \cap K_n \neq \emptyset$ ($n \geq 2$).

Sei $a \in K_{n-1} \cap K_n \Rightarrow d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_{n-1}, a) + d(x_n, a) < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-2}}$.

Für $n, p \in \mathbb{N}$ folgt

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} d(x_{i-1}, x_i) < \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^{i-2}} = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{j=1}^p \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{n-2}}$$

$\Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall p \geq 1 \Rightarrow \{x_n\}$ ist eine Fundamentalfolge in \bar{A} ($\subseteq X$).

Da X vollständig ist $\exists x \in X : x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x$.

Da $\{x_n\} \subset \bar{A}$ und \bar{A} abgeschlossen $\Rightarrow x \in \bar{A}$.

Da $\bar{A} \subset \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \Rightarrow \exists \alpha' : x \in G_{\alpha'}$.

Da $G_{\alpha'}$ offen ist, existiert $K = K(x, r) \subseteq G_{\alpha'}$

Da $x_n \rightarrow x \Rightarrow \exists n' \in \mathbb{N} : d(x_{n'}, x) < \frac{r}{2}$ und $\frac{1}{2^{n'}} < \frac{r}{2}$.

Aus (1.5-3)(3) folgt $K_{n'} = K\left(x_{n'}, \frac{1}{2^{n'}}\right) \subset K \Rightarrow K_{n'} \subset G_{\alpha'} \text{!}$ (da endliche Überdeckung zu $K_{n'} \in \mathcal{F}$) $\Rightarrow \bar{A}$ kompakt $\Rightarrow A$ relativ kompakt. \square

Folgerung (1.9-23). Jede relativ folgen-kompakte bzw. folgen-kompakte Menge $A \subseteq X$ ist entsprechend relativ kompakt bzw. kompakt.

Beweis. Sei $A \subseteq X$ relativ folgen-kompakt $\Rightarrow \bar{A}$ ist folgen-kompakt. Mit Folgerung (1.9-19) folgt dann, dass der Teilraum \bar{A} vollständig ist. Wegen Satz (1.9-21) ist A im Teilraum (\bar{A}, d) präkompakt, daraus folgt mit Satz (1.9-22)(b), dass A in (\bar{A}, d) relativ kompakt ist. Damit ist A relativ kompakt in (X, d) \square

Zusammenfassung

Satz (1.9-24). Für einen beliebigen metrischen Raum (X, d) sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (a) (X, d) ist kompakt.
- (b) (X, d) ist folgen-kompakt.
- (c) (X, d) ist vollständig und präkompakt.

Satz (1.9-25). In einem vollständigen metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

- (a) $A \subseteq X$ ist relativ folgen-kompakt.
- (b) $A \subseteq X$ ist relativ kompakt.
- (c) $A \subseteq X$ ist präkompakt.

Bemerkung (1.9-26). Ohne die Vollständigkeit gilt: (a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c).

1.9.1 Einige Anwendungen der Kompaktheit

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Satz (1.9.1-1). Sei $f : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ eine Funktion, $K \subseteq X$. Wenn f auf K stetig und $K \subseteq X$ kompakt ist, so gilt:

- (a) $f(K)$ ist kompakt.
- (b) f ist gleichmäßig stetig auf K

Beweis. (a) Sei $\{G_i\}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$, d. h. $f(K) \subseteq \bigcup_i G_i$

$$(G_i \text{ offen in } Y) \Rightarrow K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_i G_i\right) = \bigcup_i f^{-1}(G_i)$$

Da f stetig, sind die $f^{-1}(G_i)$ offen in X und damit $\{f^{-1}(G_i)\}$ eine offene Überdeckung für $K \Rightarrow \exists f^{-1}(G_{i_k})$ ($k = 1, \dots, n$) mit $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n f^{-1}(G_{i_k})$

$$\Rightarrow f(K) \subseteq f\left(\bigcup_1^n f^{-1}(G_{i_k})\right) = \bigcup_1^n f(f^{-1}(G_{i_k})) \subseteq \bigcup_1^n G_{i_k} \Rightarrow \text{Behauptung}$$

(b) (erster Beweis)

K kompakt $\Rightarrow K$ folgen-kompakt.

Annahme: f auf K nicht gleichmäßig stetig $\Rightarrow \exists \varepsilon_0$, sodass $\forall \delta > 0 \exists x'_\delta, x''_\delta \in K$ mit $d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ und $\rho(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geq \varepsilon_0 \Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots \exists x'_n, x''_n \in K$ mit $d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n}$ und $\rho(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon_0$. Da K folgen-kompakt ist, besitzt die Folge

$\{x'_n\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x'_{n_k}\}$, d. h. $\exists x' \in K : x'_{n_k} \rightarrow x'$. Analog besitzt die Teilfolge $\{x''_{n_k}\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x''_{n_{k_l}}\}$, d. h. $\exists x'' \in K : x''_{n_{k_l}} \rightarrow x''$

$$\Rightarrow \text{da } d(x'_n, x''_n) \rightarrow 0 \Rightarrow d(x'_{n_{k_l}}, x''_{n_{k_l}}) \rightarrow 0 = d(x', x'') \Rightarrow x' = x'' =: x.$$

Da f stetig in x ist, folgt $f(x'_{n_{k_l}}), f(x''_{n_{k_l}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

$$\Rightarrow \rho(f(x'_{n_{k_l}}), f(x''_{n_{k_l}})) \rightarrow 0 \not\geq \varepsilon_0 \Rightarrow \text{Behauptung.}$$

(zweiter Beweis)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f stetig auf K ist, gilt:

$$\forall x \in K \exists \delta_x > 0 : f(K(x, \delta_x)) \subseteq K\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Für $x', x'' \in K(x, \delta_x)$ folgt

$$d(f(x'), f(x'')) \leq d(f(x'), f(x)) + d(f(x''), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nun gilt: $K \subseteq \bigcup_{x \in K} K\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$ ist offene Überdeckung

$$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in K \text{ mit } K \subseteq \bigcup_{j=1}^n K(x_j, \delta_j), \text{ wobei } \delta_j := \frac{\delta_{x_j}}{2}$$

Setzen $\delta = \min_j \delta_j$. Sei nun $x', x'' \in K$ mit $d(x', x'') < \delta$ und $j' \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$d(x', x_{j'}) < \frac{\delta_{x_{j'}}}{2}$$

$$\text{Wegen } \delta \leq \frac{\delta_{x_{j'}}}{2} \Rightarrow d(x'', x_{j'}) \leq d(x', x_{j'}) + d(x', x'') < \delta_{x_{j'}} \Rightarrow d(y', y'') < \varepsilon$$

\Rightarrow Behauptung □

Satz (1.9.1-2). Seien (X_i, d_i) ($i = 1, \dots, k$) metrische Räume und $X = \prod_{i=1}^k X_i$,
 $d(x, y) = \max_i d_i(\xi_i, \eta_i)$. Dann gilt:

$$(X, d) \text{ kompakt} \Leftrightarrow (X_i, d_i) \quad \forall i = 1, \dots, k \text{ kompakt.}$$

Beweis. 1) Sei (X, d) kompakt. Da die j -te Projektion $p_j : (X, d) \rightarrow (X_j, d_j)$ stetig und $p_j(X) = X_j$ ist, ist (X_j, d_j) kompakt.

2) Seien die (X_j, d_j) kompakt. Damit sind die (X_j, d_j) vollständig und präkompakt für alle $j \Rightarrow (X, d)$ ist vollständig. Zeigen: (X, d) ist präkompakt.

$\forall j = 1, \dots, k \quad \forall \varepsilon > 0 \exists$ endliches ε -Netz $N_\varepsilon^{(j)}$ für X_j .

Setzen $N_\varepsilon = \prod_{j=1}^k N_\varepsilon^{(j)} \subseteq X \Rightarrow N_\varepsilon$ ist endlich

Zeigen: N_ε ist ein ε -Netz für X .

Sei $x = \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \in X$ beliebig.

Da $N_\varepsilon^{(j)}$ ε -Netz für $X_j \exists \tau_j \in N_\varepsilon^{(j)} : d_j(\xi_j, \tau_j) < \varepsilon$ ($j = 1, \dots, k$)

Setzen $y = \{\tau_i\}_{i=1}^k \in N_\varepsilon \Rightarrow d(x, y) = \max_i d_i(\xi_i, \tau_i) < \varepsilon \Rightarrow$ Behauptung □

Satz (1.9.1-3). Sei (X, d_p) , ($1 \leq p \leq \infty$ wie in (1.1-4)(3)). Dann gilt:

(a) $A \subseteq X$ ist relativ kompakt $\Leftrightarrow A$ ist beschränkt

(b) $A \subseteq X$ ist kompakt $\Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen und beschränkt

Beweis. Zeigen (a) für den Fall $(X, d) = \mathbb{R}$. Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt, d. h. $\exists a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $A \subseteq [a, b]$. Für $\varepsilon > 0$ beliebig sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ gewählt. Setzen

$$N_\varepsilon = \left\{ x_k : x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) \right\}_{k=0}^n \Rightarrow N_\varepsilon \text{ ist ein endliches } \varepsilon\text{-Netz für } [a, b] \text{ und}$$

damit für A . Da $[a, b]$ vollständiger Teilraum von $\mathbb{R} \Rightarrow [a, b]$ kompakt $\Rightarrow A \subseteq [a, b]$ relativ kompakt \Rightarrow Behauptung □

Folgerung (1.9.1-4). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jede kompakte Menge $K \subseteq X$ gilt:

(1) f ist auf K beschränkt

$$(2) \exists x_1, x_2 \in K : f(x_1) = \sup_{x \in K} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{x \in K} f(x)$$

Beweis. $f(K)$ ist in \mathbb{R} kompakt $\Rightarrow f(K)$ beschränkt, abgeschlossen
 $\Rightarrow f$ beschränkt und $\sup f(K), \inf f(K) \in f(K)$ □

Bemerkung (1.9.1-5) (zum Banachschen Fixpunktsatz). Wie in (1.8-3) festgestellt, gilt der Fixpunktsatz für jeden kontrahierenden Operator $A : X \rightarrow X$. Was passiert, wenn die Bedingung aus (1.8-1)(b) durch folgende ersetzt wird:

$$d(Ax, Ay) < d(x, y) \quad \forall x \neq y \in X$$

Beispiel (1.9.1-6). $X = [0, \infty)$, $\varphi : X \rightarrow X$ gegeben durch

$$\varphi(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Offenbar besitzt φ keinen Fixpunkt in X . Es gilt aber nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit $\varphi'(\xi) = \frac{\xi^2}{1+\xi^2} < 1 \quad \forall \xi \in X$, so dass für $0 \leq y < x \exists \xi \in (y, x) : |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)||x - y| < |x - y|$.

Satz (1.9.1-7). Sei (X, d) ein beliebiger metrischer Raum (nicht unbedingt vollständig) und $A : X \rightarrow X$ mit $d(Ax, Ay) < d(x, y) \quad \forall x \neq y \in X$ (*). Wenn das Bild $A(X)$ in einer kompakten Menge $K \subset X$ liegt, so besitzt A in K genau einen Fixpunkt x^* .

Beweis. Eindeutigkeit: Sei y^* ein weiterer Fixpunkt. Aus (*) folgt:

$$d(x^*, y^*) = d(Ax^*, Ay^*) < d(x^*, y^*) \Rightarrow x^* = y^*.$$

Existenz: Wir betrachten die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = d(x, Ax)$.

Wegen (*) ist A stetig und damit auch f . Nach (1.9.1-4) nimmt f auf K ihr Minimum an, d. h. $\exists x^* \in K : d(x^*, Ax^*) = f(x^*) = \min_{x \in K} f(x)$.

Wegen $A(X) \subseteq K \Rightarrow y := Ax^* \in K$

$$\Rightarrow d(y, Ay) = d(Ax^*, A(Ax^*)) < d(x^*, Ax^*) = \min_{x \in K} f(x)$$

$$\Rightarrow d(x^*, Ax^*) = 0 \Rightarrow x^* = Ax^* \quad \square$$

Kompaktheit in $C[0, 1]$

Folgerung (1.9.1-8). Sei $\mathcal{Z} = \{Z_0, \dots, Z_n\}$ eine beliebige fixierte Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$, also $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ und $x = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wir ordnen x den Polygonzug $x_{\mathcal{Z}} \in C[0, 1]$ zu, wobei

$$x_{\mathcal{Z}}(t) = \begin{cases} \xi_i & : t = t_i \quad (i = 0, \dots, n) \\ \text{linear} & : t \in [t_i, t_{i+1}] \quad (i = 0, \dots, n) \end{cases}$$

Die Menge dieser Polygonzüge sei $P(\mathcal{Z}) \subset C[0, 1]$. Dann gilt:

Eine Teilmenge $A \subset P(\mathcal{Z})$ ist in $C[0, 1]$ genau dann relativ kompakt, wenn A beschränkt ist (insbesondere ist dann \bar{A} präkompakt).

Beweis. Obige Zuordnung $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P(\mathcal{Z})$ mit $f(x) = x_{\mathcal{Z}}$ ist bijektiv mit $d_{\infty}(x, 0) = d(x_{\mathcal{Z}}, 0) = d(f(x), 0)$ (da $\max |x_n(t)| = \max |\xi_i|$) $\Rightarrow f, f^{-1}$ stetig.

$A \subset P(\mathcal{Z})$ beschränkt $\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ beschränkt $\Rightarrow B := f^{-1}(A)$ kompakt in \mathbb{R}^{n+1} . Da f stetig $\Rightarrow f(B)$ kompakt in $C[0, 1]$. Wegen $A = f(f^{-1}(A)) \subseteq f(B)$ ist A relativ kompakt. □

Satz (1.9.1-9) (Satz von Arzela-Ascoli). Die Menge $A \subseteq C[0, 1]$ ist genau dann relativ kompakt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Die Funktionen von A sind gleichmäßig beschränkt, d. h.
 $\exists C > 0 : |x(t)| \leq C \quad \forall t \in [0, 1] \quad \forall x \in A$
- (2) Die Funktionen von A sind gleichmäßig stetig, d. h.
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x(t) - x(t')| < \varepsilon \quad \forall t, t' \in [0, 1] \text{ mit } |t - t'| < \delta \quad \forall x \in A.$

Beweis. 1) (Notwendigkeit) Sei A relativ kompakt

$\stackrel{(1.9-8)}{\implies} A$ beschränkt, d. h. $\exists C > 0 : d(x, 0) = \max |x(t)| \leq C$
 $\implies |x(t)| \leq C \quad \forall t \quad \forall x \implies (1)$

Wieder nach (1.9-8) ist A präkompakt. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig

$\implies \exists$ endliches $\frac{\varepsilon}{3}$ -Netz $N_{\frac{\varepsilon}{3}} = \{x_1, \dots, x_k\} \subset C[0, 1]$

Da x_i stetig auf $[0, 1]$ ist x_i auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig, d. h.

$\exists \delta_i > 0 : |x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 1] \text{ mit } |t_1 - t_2| < \delta$

Setzen $\delta = \min_{i=1, \dots, k} \delta_i$. Für $t, t' \in [0, 1]$ mit $|t - t'| < \delta$ und $x \in A$ folgt:

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t')| &\leq |x(t) - x_i(t)| + |x_i(t) - x_i(t')| + |x_i(t') - x(t')| \\ &< \max_t |x(t) - x_i(t)| + \frac{\varepsilon}{2} + \max_{t'} |x_i(t') - x(t')| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + 2d(x, x_i) \end{aligned}$$

Wählen $x_i \in N_{\frac{\varepsilon}{3}}$ so, dass $d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} \implies |x(t) - x(t')| < \varepsilon \implies (2)$

2) (Hinlänglichkeit) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ aus Bedingung (2). Wählen $n \in \mathbb{N}$

so, dass $\frac{1}{n} < \delta$ und $t_i = \frac{i}{n}$ ($i = 0, \dots, n$) und $\mathcal{Z} = \{t_0, \dots, t_n\}$.

Für $x \in A$ sei $\xi_i := x(t_i)$ und $\tilde{x} = \{\xi_0, \dots, \xi_n\} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Wie in (1.9.1-8) ordnen wir \tilde{x} den Polygonzug $\tilde{x}_{\mathcal{Z}}$ zu ($\tilde{x}_{\mathcal{Z}}$ ist ein der Kurve einbeschriebener Polygonzug)

Sei $\tilde{A} = \{\tilde{x}_{\mathcal{Z}} : x \in A\}$. Zeigen: \tilde{A}_{ε} ist ein ε -Netz für A

a) Sei $x(t_i) \leq x(t_{i+1}) \implies x(t_i) \leq \tilde{x}_{\mathcal{Z}}(t) \leq x(t_{i+1}) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}] = I_i$
 $\implies x(t) - x(t_{i+1}) \leq x(t) - \tilde{x}_{\mathcal{Z}}(t) \leq x(t) - x(t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

Da $|t - t_i|, |t - t_{i+1}| \leq \frac{1}{n} < \delta \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$

$\implies -\varepsilon < x(t) - x(t_{i+1}) \leq x(t) - \tilde{x}_{\mathcal{Z}}(t) \leq x(t) - x(t_i) < \varepsilon \quad \forall t \in [t_i, t_i + 1]$

$\implies |x(t) - \tilde{x}_{\mathcal{Z}}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I_i$ (*)

b) Ist $x(t_i) \geq x(t_{i+1})$, so liefert eine analoge Überlegung auch für dieses i die Ungleichung (*) $\implies |x(t) - \tilde{x}_{\mathcal{Z}}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, 1]$, d. h. $d(x, \tilde{x}_{\mathcal{Z}}) < \varepsilon \implies \tilde{A}_{\varepsilon}$ ist ε -Netz für A .

Aus Bedingung (1) folgt nun:

$|\tilde{x}_{\mathcal{Z}}(t)| \leq |\tilde{x}_{\mathcal{Z}}(t) - x(t)| + |x(t)| < \varepsilon + C = C_1 \quad \forall t \in [0, 1] \implies \tilde{A}$ beschränkt

$\stackrel{(1.9.1-5)}{\implies} \tilde{A}_{\varepsilon}$ ist relativ kompaktes ε -Netz

$\implies \tilde{A}_{\varepsilon}$ ist präkompakt, d. h. $\forall \varepsilon' > 0 \exists$ endliches ε' -Netz \tilde{N}_{ε} : für \tilde{A}_{ε}

$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists$ endliches ε -Netz für A .

Da $C[0, 1]$ vollständig $\implies A$ relativ kompakt. □

Beispiel (1.9.1-10).

(1) $A = \{\sin nt\}_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0, \pi]$

A ist beschränkt, aber für $t_n = \frac{\pi}{2n}$ ist $\sin nt_n = 1 \implies$ nicht gleichgradig stetig
 \implies nicht relativ kompakt.

(2) $x \in C[0, 1]$ heißt **Hölder-stetig** auf $[0, 1]$, wenn $\exists c_x > 0, \alpha_x$ mit $0 < \alpha_x \leq 1$ und $|x(t) - x(t')| \leq c_x |t - t'|^{\alpha_x} \quad \forall t, t' \in [0, 1]$. (z. B. existiert die Ableitung x' mit $|x'(t)| \leq c_x \quad \forall t \in [0, 1]$). Jede beschränkte Menge $A \subseteq C[0, 1]$ Hölder-stetiger Funktionen ist relativ kompakt.

Satz (1.9.1-11). Eine Menge $A \subset l_p$ ($1 \leq p < \infty$) ist genau dann relativ kompakt, wenn gilt:

(1) A ist beschränkt, d. h. $\exists c > 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \leq c^p \quad \forall x = \{\xi_i\} \in A$$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \varepsilon^p \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in A$

Beispiel (1.9.1-12). Hauptparallelepiped

$$U = \{x \in l_2 : |\xi_i| < \frac{1}{j} \quad \forall j\}$$

ist relativ kompakt

Sei $x \in U \Rightarrow \rho(x, 0) = \{\sum |\xi_j|^2\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \sum \frac{1}{j^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = const \Rightarrow U$ ist beschränkt.

Da $\sum \frac{1}{j^2} < \infty$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 \exists n : \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \varepsilon^2$

$\Rightarrow \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in U \Rightarrow$ Behauptung.

Kapitel 2

Banach- und Hilberträume

2.1 Der Banachraum

Bezeichnung (2.1-1). Sei X ein linearer Raum über dem Körper \mathbb{K} (\mathbb{K} -Vektorraum). X heißt reeller bzw. komplexer linearer Raum, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt.

Definition (2.1-2). Ein linearer Raum X über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt **reeller** bzw. **komplexer normierter Raum** (oder kurz: **normierter Raum**), wenn eine Funktion $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$, genannt **Norm**, existiert, sodass die folgenden Normaxiome erfüllt sind.

$$(N1) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ (Homogenität)}$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

Beispiel (2.1-3). Mit $\|x\|_p := d_p(x, 0)$ sind (X, d_p) , l_p ($1 \leq p < \infty$), $C[a, b]$, c , c_0 alle normierten Räume.

Zu l_p ($1 \leq p < \infty$):

$$x = \{\xi_i\}, y = \{\eta_i\} \in l_p. \text{ Setzen } x + y := \{\xi_i + \eta_i\}, \lambda x := \{\lambda \xi_i\} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Zeigen: $x + y \in l_p$.

$$\begin{aligned} & \text{(Nebenrechnung: } a, b \in \mathbb{K}, \text{ o. B. d. A. sei } |a| \geq |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \leq 2|a| \\ & \Rightarrow |a + b|^p \leq 2^p |a|^p \leq 2^p |a|^p + 2^p |b|^p \Rightarrow \sum |\xi_i + \eta_i|^p \leq 2^p \sum |\xi_i|^p + 2^p \sum |\eta_i|^p.) \end{aligned}$$

$$\|x\| := \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow \xi_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (Minkowski-Ungleichung)}$$

Folgerung (2.1-4). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $d(x, y) = \|x - y\|$ ($x, y \in X$) eine Metrik auf X , d. h. (X, d) ist ein metrischer Raum.

$$(d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y))$$

Frage (2.1-5). Welche zusätzlichen Eigenschaften muss eine Metrik d auf einem linearen Raum X besitzen, damit durch $\|x\| := d(x, 0)$ eine Norm auf X definiert wird?

Folgerung (2.1-6). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x, y \in X$. Dann gilt

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

Beweis. $x = (x - y) + y \Rightarrow \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Vertauschen der Rollen von x und y liefert:

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\| \quad \square$$

Definition (2.1-7). Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum, $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$). Die Folge $\{x_n\}$ heißt **Norm-konvergent** oder **konvergent** (in X), wenn

$$\exists x \in X : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \|x_n - x\| < \varepsilon \forall n > n_0$$

(Symbol $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $x_n \xrightarrow{X} x$, $x_n \rightarrow x$)

Bemerkung (2.1-8). Es gilt:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$$

Folgerung (2.1-9). Die algebraischen Operationen in $(X, \|\cdot\|)$ und die Norm sind stetige Funktionen, d. h. es gilt

$$(a) \text{ Aus } x_n \xrightarrow{X} x \text{ folgt } \|x_n\| \xrightarrow{\mathbb{R}} \|x\|.$$

$$(b) \text{ Aus } x_n \xrightarrow{X} x, y_n \xrightarrow{X} y, \lambda_n \xrightarrow{\mathbb{K}} \lambda \text{ folgt } x_n + y_n \xrightarrow{X} x + y, \lambda_n x_n \xrightarrow{X} \lambda x.$$

Beweis. $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|y_n - y\|}_{\rightarrow 0} = 0 \quad \square$

Definition (2.1-10). Der normierte Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **Banachraum**, wenn $(X, \|\cdot\|)$ bezüglich der Normkonvergenz vollständig ist, d. h. aus $\{x_n\}$ ist Fundamentalfolge in X folgt, dass $\{x_n\}$ in X konvergiert ($\|x_n - x_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$)

$\Rightarrow \exists x \in X : \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

Bemerkung (2.1-11). Der Satz (1.4-5) über die Vervollständigung metrischer Räume lässt sich auch auf unvollständige normierte Räume übertragen.

Achtung! Es müssen auch die algebraischen Operationen und die Norm übertragen werden.

Definition (2.1-12). Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$). Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Dann heißt das Paar $(\{x_n\}, \{s_n\}) =: \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ **unendliche Reihe** in X und s_n die n -te **Partialsomme** dieser Reihe.

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt in X **konvergent**, wenn die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen in X konvergiert, d. h. wenn

$$\exists s \in X : \|s_n - s\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

s heißt dann die **Summe** dieser Reihe (und man schreibt auch $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$).

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ (in \mathbb{R}) konvergiert.

Folgerung (2.1-13). Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert, dann gilt:

$$x_n \xrightarrow{X} 0, \text{ d. h. } \|x_n\| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0.$$

Satz (2.1-14). Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum.

(a) Wenn X ein Banachraum ist, so folgt aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in X die Konvergenz dieser Reihe in X . Dabei gilt

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \quad (\text{verallgemeinerte Dreiecksungleichung})$$

(b) Umgekehrt: Wenn in $(X, \|\cdot\|)$ jede absolut konvergente Reihe dort auch konvergiert, so ist X ein Banachraum.

Beweis. (a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Zeigen: $\{s_n\}$ ist eine Fundamentalfolge in X .

$$\text{Für } n > m \text{ sei } \|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \{s_n\}$ ist eine Fundamentalfolge. Da X vollständig ist, folgt: $\exists s \in X : s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$

\Rightarrow Behauptung.

Weiter gilt: $\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$. Für $n \rightarrow \infty$ folgt $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

(b) Sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Fundamentalfolge in X , d. h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \|x_n - x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon).$$

Setzen nacheinander $\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

(Ziel: Konstruieren konvergente Teilfolge).

$$k = 0 \quad \exists n_0 : \quad \|x_n - x_{n_0}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \quad \forall n \geq n_0$$

$$k = 1 \quad \exists n_1 > n_0 : \quad \|x_n - x_{n_1}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^1 \quad \forall n \geq n_1$$

$$k = 2 \quad \exists n_2 > n_1 : \quad \|x_n - x_{n_2}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \forall n \geq n_2$$

\vdots

$$\exists n_k > n_{k-1} : \quad \|x_n - x_{n_k}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \forall n \geq n_k$$

$$\exists n_{k+1} > n_k : \quad \|x_n - x_{n_{k+1}}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad \forall n \geq n_{k+1}$$

$$\Rightarrow \|x_{n_1} - x_{n_0}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^0, \|x_{n_2} - x_{n_1}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^1, \dots, \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k, \dots$$

Setzen $y_0 = x_{n_0}, y_1 = x_{n_1} - x_{n_0}, y_2 = x_{n_2} - x_{n_1}, \dots, y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}, \dots$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^k y_j = x_{n_k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \|y_k\| < \|x_{n_0}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \infty$$

$$\Rightarrow \text{Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ ist absolut konvergent} \xrightarrow{\text{Bedingung}} \exists x \in X : \sum_{k=0}^{\infty} y_k = x$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^k y_j = x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow \{x_n\} \text{ konvergiert in } X. \quad \square$$

Definition (2.1-15).

- (a) Seien X_1, X_2 zwei \mathbb{K} -Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Die Funktion $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ heißt **linear** (\mathbb{K} -linear), wenn gilt

$$\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \quad \forall x, y \in X_1, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

X_1 heißt **linear isomorph** zu X_2 , wenn eine lineare Bijektion $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ existiert. φ heißt dann **Isomorphismus** von X_1 auf X_2 .

- (b) Seien $(X_i, \|\cdot\|_i)$ ($i = 1, 2$) normierte Räume über \mathbb{K} . $(X_1, \|\cdot\|_1)$ heißt **linear homöomorph** zu $(X_2, \|\cdot\|_2)$, wenn ein Isomorphismus $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ und Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, sodass gilt

$$c_1\|x\|_1 \leq \|\varphi(x)\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \quad \forall x \in X_1 \quad (*)$$

Gilt in $(*)$ $c_1 = c_2 = 1$, d. h. $\|x\|_1 = \|\varphi(x)\|_2$, so heißt X_1 **isometrisch isomorph** zu X_2 (vgl. (1.4-1))

Folgerung (2.1-16). Sei $\varphi : (X_1, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X_2, \|\cdot\|_2)$ ein Isomorphismus, der $(*)$ erfüllt. Dann sind φ, φ^{-1} stetig.

Satz (2.1-17).

- (a) Linear homöomorph ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der normierten Räume über \mathbb{K} .
- (b) Bei linear homöomorphen Räumen entsprechen sich einander eindeutig folgende Mengen: offene, abgeschlossene, kompakte, beschränkte.
- (c) Zwei linear homöomorphe Räume sind gleichzeitig vollständig oder nicht.

Beweis. (c) $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ mit $(*)$ erfüllt und $(X_2, \|\cdot\|_2)$ sei vollständig.

Sei $x_n, x_m \in X_1$ mit $\|x_n - x_m\|_1 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$.

Wegen $\|\varphi(x)\|_2 \leq c_2\|x\|_1$ folgt mit $y_n = \varphi(x_n)$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|y_n - y_m\|_2 &= \|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\|_2 = \|\varphi(x_n - x_m)\|_2 \\ &\leq c_2\|x_n - x_m\|_1 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{y_n\}$ ist Fundamentalfolge in X_2

$\Rightarrow \exists y \in X_2 : \|y_n - y\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Setzen $x = \varphi^{-1}(y)$

$(*)$ (linke Seite):

$$c_1\|x_n - x\|_1 \leq \|\varphi(x_n - x)\|_2 = \|\varphi(x_n) - \varphi(x)\|_2 = \|y_n - y\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{X_1} x \Rightarrow X_1$ ist vollständig. □

Satz (2.1-18) (Satz von Riesz). Jeder endlichdimensionale Raum $(X, \|\cdot\|)$ über \mathbb{K} mit $\dim X = n$ ist linear homöomorph zum Raum \mathbb{K}^n (euklidische Norm).

Beweis. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von X . Für $a = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{K}^n$ setzen wir $\varphi(a) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in X$. Offenbar ist dadurch ein Isomorphismus $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ gegeben.

Zeigen: φ erfüllt $(*)$.

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\|_X &= \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|e_k\| \stackrel{\text{Schwarzsche Ugl.}}{\leq} \underbrace{\left\{ \sum_k |\alpha_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}_{\|a\|_{\mathbb{K}^n}} \underbrace{\left\{ \sum_k \|e_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}_{c_2 > 0} \\ &= c_2 \|a\|_{\mathbb{K}^n} \quad (**). \end{aligned}$$

Zeigen: $\exists c_1 > 0 : c_1 \leq \frac{\|\varphi(a)\|}{\|a\|} \forall a \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Setzen $c_1 = \inf_{a \neq 0} \frac{\|\varphi(a)\|}{\|a\|}$. Wegen $\frac{1}{\|a\|} \|\varphi(a)\| = \left\| \frac{1}{\|a\|} \varphi(a) \right\| = \left\| \varphi \left(\frac{a}{\|a\|} \right) \right\|$ und

$\left\| \frac{a}{\|a\|} \right\| = 1$ folgt $c_1 = \inf_{\|a\|=1} \|\varphi(a)\|$. Wegen (***) ist $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ stetig

$\Rightarrow f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(a) = \|\varphi(a)\|$ ist stetig.

Setzen $S = \{a \in \mathbb{K}^n : \|a\| = 1\} \subseteq \mathbb{K}^n$. S ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{K}^n \Rightarrow S$ ist in \mathbb{K}^n kompakt. Nach (1.9.1-4) nimmt f auf S ihr Infimum an, d. h. $\exists \tilde{a} \in S : f(\tilde{a}) = c_1$. Wäre $c_1 = 0$ würde folgen $\|\varphi(\tilde{a})\| = 0 \Rightarrow \varphi(\tilde{a}) = 0$. Da φ ein

Isomorphismus ist folgt $\tilde{a} = 0 \not\in S$ zu $\|\tilde{a}\| = 1$. $\Rightarrow c_1 > 0 \Rightarrow c_1 \leq \frac{\|\varphi(a)\|}{\|a\|} \forall a \neq 0$

$\Rightarrow c_1 \|a\|_{\mathbb{K}^n} \leq \|\varphi(a)\|_X \Rightarrow (*)$ erfüllt. \square

Folgerung (2.1-19). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim X = n$ und $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X . Dann existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass gilt:

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in X \quad (\text{die Normen sind zueinander äquivalent}).$$

Insbesondere gilt diese Abschätzung für $X = \mathbb{K}^n$ mit den Normen (vgl. (1.2-12))

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} & : 1 \leq p < \infty \\ \max_k |\xi_k| & : p = \infty \end{cases} \quad x = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathbb{K}^n$$

Folgerung (2.1-20).

(a) Jeder endlichdimensionale Teilraum eines normierten Raumes ist abgeschlossen.

(b) Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum mit $\dim X = n$. Dann gilt

1') $A \subseteq X$ ist kompakt $\Leftrightarrow A$ ist abgeschlossen und beschränkt.

2') X ist ein Banachraum.

3') Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis in X und $x_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(m)} e_k$ ($m = 1, 2, \dots$),

$$x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \quad (\alpha_k^{(m)}, \alpha_k \in \mathbb{K}). \text{ Dann gilt:}$$

$$\|x_m - x\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow |\alpha_k^{(m)} - \alpha_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

(koordinatenweise Konvergenz)

Satz (2.1-21) (Satz über die beste Approximation durch Linearkombinationen). Sei $(X_0, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler Teilraum des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$. Dann gilt

$$\forall x \in X \exists x_0 \in X_0 : \|x - x_0\| = \text{dist}(x, X_0) = d(x, X_0) := \inf_{z \in X_0} \|x - z\|$$

Beweis. Aus der Definition des Infimum folgt:

$$\forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in X_0 : \|x - x_n\| < d(x, X_0) + \frac{1}{n} \quad (\square)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x_n\| &= \|(x_n - x) + x\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \\ &< d(x, X_0) + 1 + \|x\| = \text{const} \quad \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x_n\|$ beschränkt. Da $x_n \in X_0$ und $\dim X_0 < \infty$ $\xrightarrow{\text{folgen-kompakt}}$ es existiert eine konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}$, d. h. $\exists \tilde{x} \in X : x_{n_k} \xrightarrow[n_k \rightarrow \infty]{} \tilde{x}$. Da X_0 abgeschlossen

ist, folgt $\tilde{x} \in X_0$. Aus (\square) folgt: $\|x - x_{n_k}\| < d(x, X_0) + \frac{1}{n_k}$.

Für $n \rightarrow \infty$: $\|x - \tilde{x}\| \leq d(x, X_0)$. Da $\tilde{x} \in X_0 \Rightarrow d(x, X_0) \geq \|x - \tilde{x}\|$
 $\Rightarrow \|x - x_0\| = d(x, X_0)$ für $\tilde{x} = x_0$. \square

Folgerung (2.1-22). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x_1, \dots, x_n \in X$ linear unabhängige Elemente. Dann gilt:

$$\forall x \in X \exists \lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0 \in \mathbf{K} : \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k^0 x_k \right\| = \inf_{\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right\|$$

Die λ_k^0 sind eindeutig bestimmt, wenn X streng normiert ist (d. h. aus $x, y \neq 0$ und $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \exists \alpha > 0 : y = \alpha x$).

Lemma (2.1-23) (Lemma von der Fast-Senkrechten). Sei X_0 ein abgeschlossener Teilraum des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ und $X_0 \neq X$. Dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X \text{ mit } d(x_\varepsilon, X_0) > 1 - \varepsilon \text{ und } \|x_\varepsilon\| = 1$$

Beweis. Da $X_0 \neq X \Rightarrow \exists \bar{x} \in X \setminus X_0 \Rightarrow \bar{d} = d(\bar{x}, X_0) > 0$ (siehe (1.5-15)).

Sei nun $0 < \varepsilon < 1 \xrightarrow{\text{Def. Inf.}} \exists x' \in X_0 : \|\bar{x} - x'\| < \bar{d} + \frac{\varepsilon \bar{d}}{1 - \varepsilon} = \frac{\bar{d}}{1 - \varepsilon}$.

Setzen $x_\varepsilon = \lambda(\bar{x} - x')$ mit $\lambda = \frac{1}{\|\bar{x} - x'\|} \Rightarrow \|x_\varepsilon\| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} < \frac{\bar{d}}{1 - \varepsilon}$

$\Rightarrow 1 - \varepsilon < \lambda \bar{d}$. Sei nun $x_0 \in X_0$ beliebig. Dann folgt

$$\|x_\varepsilon - x_0\| = \|\lambda \bar{x} - \lambda x' - x_0\| = \lambda \left\| \bar{x} - \left(x' + \frac{1}{\lambda} x_0 \right) \right\| \geq \lambda \bar{d}$$

$\Rightarrow d(x_\varepsilon, X_0) = \inf_{x_0 \in X_0} \|x_\varepsilon - x_0\| \geq \lambda \bar{d} > 1 - \varepsilon$ \square

Satz (2.1-24) (Riesz). Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist genau dann endlichdimensional, wenn jede in X abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist.

Beweis. 1) Sei $\dim X < \infty$. Aus (2.1-20) (b) 1' folgt dann die Behauptung.

2) Sei die Bedingung erfüllt. Annahme: $\dim X = \infty$. Sei $x_1 \in X$ und $\|x_1\| = 1$. Setzen $X_1 = \text{span}\{x_1\} \Rightarrow \dim X_1 = 1 \Rightarrow X_1 \neq X$. Aus Lemma (2.1-23) folgt $\exists x_2 \in X : d(x_2, X_1) > \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 \notin X_1$. Setzen $X_2 = \text{span}\{x_1, x_2\} \Rightarrow \dim X_2 = 2$, X_2 abgeschlossen $\Rightarrow X_2 \neq X$.

Aus Lemma (2.1-22) folgt weiter $\exists x_3 \in X, \|x_3\| = 1, d(x_3, X_2) > \frac{1}{2}$,

$X_3 = \text{span}\{x_1, x_2, x_3\} \Rightarrow \dim X_3 = 3, \dots$

Verfahren fortsetzen liefert: $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1, d(x_{n+1}, X_n) > \frac{1}{2}$, wobei

$X_n = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}, n = 1, 2, \dots$

Für $n > m \Rightarrow \|x_n - x_m\| > \frac{1}{2} \Rightarrow \{x_n\}$ besitzt keine konvergente Teilfolge. Da $\{x_n\}$ beschränkt ($\|x_n\| = 1$) $\Rightarrow \{x_n\}$ relativ kompakt $\Rightarrow \{x_n\}$ relativ folgen-kompakt, d. h. es existiert eine konvergente Teilfolge $\not\Leftarrow \Rightarrow \dim X < \infty$ \square

Bemerkung (2.1-25). Aus dem Beweis von Satz (2.1-24) erkennt man, dass gilt

$$\dim X < \infty \Leftrightarrow \mathbb{S} = \{x \in X : \|x\| = 1\} \text{ kompakt}$$

2.2 Der Hilbertraum

Definition (2.2-1). Ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ heißt **Raum mit Skalarprodukt**, wenn eine Funktion $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$, genannt **Skalarprodukt**, existiert, sodass $\forall x, y, z \in X, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

- 1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
- 2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
- 3) $(x, x) \geq 0 \forall x \in X$
- 4) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Beispiel (2.2-2).

- 1) $X = \mathbb{K}^n$ ($n \geq 1$). Für $x = \{\xi_i\}_{i=1}^n, y = \{\eta_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{K}^n$ sei

$$(x, y) := \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i}$$

- 2) $X = l_2, x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($\xi_i \in \mathbb{K}$) mit $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty, y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}$$

- 3) $X = C[0, 1]$. Setzen für $x, y \in X$: $(x, y) := \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt$

Folgerung (2.2-3). Sei X ein Raum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Dann gilt:

- a) $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z) \forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- b) $(x, 0) = (0, x) = 0 \forall x \in X$
- c) $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \forall x, y \in X$ (**Schwarzsche Ungleichung**)
- d) $\operatorname{Re}(x, y) \leq |\operatorname{Re}(x, y)| \leq |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)(y, y)}$

c', d') Mit der Beziehung von Definition (2.2-6) oder Folgerung (2.2-5) kann man schreiben

$$\operatorname{Re}(x, y) \leq |\operatorname{Re}(x, y)| \leq |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Beweis. zu c): Für $y = 0$ folgt die Behauptung. Sei $y \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig.
 $0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda \overline{\lambda}(y, y)$

$$\text{Setzen } \lambda = \frac{(x, y)}{(y, y)}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x, x) - \frac{(x, y)(x, y)}{(y, y)} - \underbrace{\frac{(x, y)(x, y)}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)^2}(y, y)}_{=0}$$

$$\Rightarrow |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \quad \square$$

Bemerkung (2.2-4). In der Schwarzschen Ungleichung steht Gleichheit genau dann, wenn $\exists \lambda \in \mathbb{K} : y = \lambda x$ oder $x = \lambda y$

Folgerung (2.2-5). Sei X ein Raum mit Skalarprodukt. Dann ist durch $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ eine Norm auf X erklärt.

Beweis. Offenbar gilt: $\|x\| \geq 0$.

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 (x, x) = |\lambda|^2 \|x\|^2;$$

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \underbrace{(x, y) + (y, x)}_{2 \operatorname{Re}(x, y)} + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \square$$

Definition (2.2-6).

- (a) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **unitär**, wenn auf X ein Skalarprodukt (\cdot, \cdot) existiert, sodass gilt

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

- (b) Ein unitärer Raum $(X, (\cdot, \cdot))$ heißt **Hilbertraum**, wenn er im Sinne der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.

Beispiel (2.2-7).

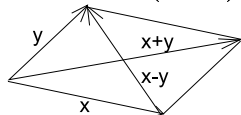
- (1) $(\mathbb{K}, (\cdot, \cdot))$ ($\|\cdot\|$ euklidische Norm) ist unitär und Hilbertraum mit Skalarprodukt aus Beispiel (2.2-2)(1))
- (2) l_2 mit $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$ und Skalarprodukt wie in (2.2-2)(2) ist unitär und Hilbertraum
- (3) $C[0, 1]$ mit $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(x, y) = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt$$

kein unitärer Raum. $(x(t) = t, \|x\|_C = 1, \int_0^1 |x(t)|^2 dt \neq 1)$

Aufgabe (2.2-8). Zeigen Sie: Der Raum $(X, (\cdot, \cdot))$ aus Beispiel (2.2-2)(3) ist mit der Norm $\|x\|_2^2 := \int_0^1 |x(t)|^2 dt$ kein vollständiger Raum.

Folgerung (2.2-9). $(X, (\cdot, \cdot))$ Raum mit Skalarprodukt



- (a) Es gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (*)$$

- (b) Seien $x_n, y_n, x, y \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $\|x_n - x\| \rightarrow 0, \|y_n - y\| \rightarrow 0$. Dann gilt

$$(x_n, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{K}} (x, y) \quad (\text{Stetigkeit des Skalarprodukts})$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \\ &= |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \\ &\leq \|x_n\| \underbrace{\|y_n - y\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|x_n - x\|}_{\rightarrow 0} \|y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung (2.2-10). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Wenn die Norm $\|\cdot\|$ die Beziehung (*) aus Folgerung (2.2-9) $\forall x, y \in X$ erfüllt, dann existiert auf X ein Skalarprodukt (\cdot, \cdot) , sodass X ein unitärer Raum ist.

(Hinweis: $f_\lambda(\{x, y\}) := \frac{1}{4}(\|x + \lambda y\|^2 - \|x - \lambda y\|^2)$)

Für $\lambda = 1$ soll f_1 Realteil und für $\lambda = \mathbf{i}$ soll f_i Imaginärteil des Skalarproduktes $(x, y) = f_1 + \mathbf{i}f_i$ sein)

Definition (2.2-11). Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ Raum mit Skalarprodukt

- (a) Die Elemente x, y heißen **orthogonal zueinander**, wenn gilt $(x, y) = 0$ (Symbol: $x \perp y$).
- (b) $x \in X, E \subseteq X : x \perp E \stackrel{\text{def}}{\iff} (x, y) = 0 \forall y \in E$
- (c) $E_1, E_2 \subseteq X : E_1 \perp E_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} (x, y) = 0 \forall x \in E_1, \forall y \in E_2$
- (d) Sei $\emptyset \neq E \subseteq X$. Die Menge $E^\perp := \{x \in X : x \perp E\}$ heißt **orthogonales Komplement** zu E .

Folgerung (2.2-12). Sei $(X, (\cdot, \cdot))$ Raum mit Skalarprodukt und $\emptyset \neq E \subseteq X$, $x, y, y_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$), $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Dann gilt

- 1') $x \perp y_i$ ($i = 1, 2$) $\Rightarrow x \perp (\alpha y_1 + \beta y_2)$
- 2') $y_n \rightarrow y, y_n \perp x \Rightarrow y \perp x$
- 3') $x \perp E \Rightarrow x \perp \overline{\text{span}(E)}$
- 4') E^\perp ist abgeschlossener Teilraum von X
- 5') $\emptyset \neq F \subseteq E \Rightarrow E^\perp \subseteq F^\perp$
- 6') $x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagoras)

Satz (2.2-13). Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbertraum, $H_1 \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum und $H_2 := H_1^\perp$. Dann gilt:

$$\forall x \in H \exists! x' \in H_1, x'' \in H_2 : x = x' + x''.$$

Dabei gilt

$$\|x''\| = \|x - x'\| = d(x, H_1) := \inf_{y \in H_1} \|x - y\|$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $x', y' \in H_1, x'', y'' \in H_2 : x' + x'' = x = y' + y''$
 $\Rightarrow x' - y' = x'' - y'' \in H_2 \Rightarrow x' - y' \in H_1^\perp \cap H_1 \Rightarrow (x' - y', x' - y') = 0$
 $\Rightarrow x' = y' \Rightarrow x'' = y''$

Existenz: Fall 1: $x \in H_1 : x = \underset{\in H_1}{x} + \underset{\in H_2}{0}$ (d. h. wählen $x' = x, x'' = 0$)

Fall 2: $x \notin H_1 \Rightarrow d := \text{dist}(x, H_1) := \inf_{y \in H_1} \|x - y\| > 0$.

Nach Definition des Infimums haben wir

$$\forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in H_1 : \|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n} \quad (*)$$

Zeigen: $\{x_n\}$ ist Fundamentalfolge: Aus (2.2-9)(a) folgt

$$\begin{aligned} 2(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2) &= \|2x - x_n - x_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 \\ &= \|x_n - x_m\|^2 + 4 \left\| x - \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 \\ &\geq \|x_n - x_m\|^2 + 4d^2 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \|x_n - x_m\|^2 \leq 2 \left(d^2 + \frac{1}{n} + d^2 + \frac{1}{m} \right) - 4d^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{x_n\} \text{ ist}$$

Fundamentalfolge $\Rightarrow \exists$ Grenzwert $x' \in H$ (d. h. $x_n \rightarrow x$) $\stackrel{H_1 \text{ abg.}}{\Rightarrow} x' \in H_1$.

Lassen wir in (*) $n \rightarrow \infty$ gehen, folgt $\|x - x'\|^2 \leq d^2 \Rightarrow \|x - x'\|^2 = d^2$

Setzen $x'' = x - x'$. Zeigen $x'' \in H_2 = H_1^\perp$

$$\begin{aligned} d^2 &= \|x - (x' + \lambda y)\|^2 = \|x'' - \lambda y\|^2 = (x'' - \lambda y, x'' - \lambda y) \\ &= \|x''\|^2 - \bar{\lambda}(x'', y) - \lambda(y, x'') + |\lambda|^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Setzen } \lambda := \frac{(x'', y)}{\|y\|^2} \Rightarrow d^2 \leq \|x''\|^2 - \frac{|(x'', y)|^2}{\|y\|^2}$$

$$\text{Da } \|x''\| = d \Rightarrow 0 \leq -|(x'', y)|^2 \Rightarrow (x'', y) = 0 \Rightarrow x'' \perp H_1 \Rightarrow x'' \in H_2 = H_1^\perp. \quad \square$$

Bemerkung (2.2-14).

- (a) Aufgrund dieser Darstellung von x schreibt man auch $H = H_1 \oplus H_2$ (**orthogonale Summe**)
- (b) x', x'' heißen **orthogonale Projektion** von x auf H_1 bzw. H_2 .
- (c) Die Abbildungen $P : H \rightarrow H_1, Q : H \rightarrow H_2$ mit $Px = x', Qx = x''$ heißen **orthogonale Projektoren** auf H_1 bzw. H_2 . Es gilt

- $Px \perp Qx \forall x \in H$
- $P + Q = I$
- $P^2 = P, Q^2 = Q$
- $PQ = QP = 0$
- $H_1 = H_2^\perp$

Aufgabe (2.2-15). Sei H Hilbertraum und $\emptyset \neq E \subset H$. Man zeige:

$$(E^\perp)^\perp = \overline{\text{span}(E)}$$

Definition (2.2-16). Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Das System $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \subset X$ heißt **vollständig** (in X), wenn $\overline{\text{span}\{x_\alpha\}} = X$.

Satz (2.2-17). Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ Hilbertraum. Das System $\{x_\alpha\} \subset H$ ist genau dann vollständig, wenn aus $x \perp x_\alpha \forall \alpha$ stets folgt $x = 0$. (o)

Beweis. 1) Sei $H = \overline{\text{span}\{x_\alpha\}}$, sei $x \in H, x \perp x_\alpha \forall \alpha \Rightarrow x \perp H \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

2) Umgekehrt sei (o) erfüllt.

Annahme: $\{x_\alpha\}$ ist nicht vollständig, d. h. $\overline{\text{span}\{x_\alpha\}} =: H_2 \neq H$

$$\Rightarrow H_2 := H_1^\perp \neq \{0\}. \text{ W\u00e4hlen } x \in H_2 \setminus \{0\} \Rightarrow x \perp x_\alpha \forall \alpha \stackrel{(o)}{\Rightarrow} x = 0 \quad \square$$

Definition (2.2-18). Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ Hilbertraum.

- (a) Das System $\{x_\alpha\} \subset H$ heißt **orthogonal**, wenn gilt $x_\alpha \perp x_{\alpha'} \forall \alpha \neq \alpha'$
- (b) Das orthogonale System $\{x_\alpha\}$ heißt **orthonormiert** oder **Orthonormalsystem**, falls gilt $\|x_\alpha\| = 1 \forall \alpha$.

Beispiel (2.2-19). $H = l_2(X)$. $e_n = \{\delta_{in}\}_{i \in \mathbb{N}}$. $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis. ONS: mit $\|\{\xi_i\}\|_2 = \sqrt{\sum |\xi_i|^2}$ und $(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \xi_i \bar{\eta}_i$ klar

vollständig: Sei $x = \{\xi_i\} \in H$. Betrachten $\sum_{i=1}^N \xi_i e_i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, 0, \dots) \in \text{span}\{e_n\}$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^N \xi_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} |\xi_i|^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow x \in \overline{\text{span}\{e_n\}} \quad \square$$

Folgerung (2.2-20). Sei $\{x_\alpha\}$ ein Orthonormalsystem. Dann gilt

- (1') $\{x_\alpha\}$ ist linear unabhängig.
- (2') $\|x_\alpha - x_{\alpha'}\| = \sqrt{2} \forall \alpha \neq \alpha'$

Beweis. 1': Sei $\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{\alpha_j} = 0$

$$\Rightarrow \forall l = 1, \dots, n : 0 = (0, x_{\alpha_l}) = \left(\sum_j \lambda_j x_{\alpha_j}, x_{\alpha_l} \right) = \sum_j \lambda_j \underbrace{(x_{\alpha_j}, x_{\alpha_l})}_{=0 \text{ für } j \neq l} = \lambda_l$$

\Rightarrow alle $\lambda_l = 0 \Rightarrow \{x_\alpha\}$ linear unabhängig.

$$2': \|x_\alpha - x_{\alpha'}\|^2 = (x_\alpha - x_{\alpha'}, x_\alpha - x_{\alpha'}) = \underbrace{\|x_\alpha\|^2}_{=1} - \underbrace{(x_{\alpha'}, x_\alpha)}_{=0} - \underbrace{(x_\alpha, x_{\alpha'})}_{=0} + \underbrace{\|x_{\alpha'}\|^2}_{=1} = 2 \quad \square$$

Satz (2.2-21).

- (a) In einem separablen Hilbertraum ist jedes Orthonormalsystem höchstens abzählbar.
- (b) In einem unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum existiert ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis. (a) folgt aus (1.6-9) und Folgerung (2.2-20).

(b) Da H separabel ist, existiert $D = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ mit $\overline{D} = H$. Da $D \subset \text{span } D \Rightarrow \text{span}\{D\} = H \Rightarrow D$ ist vollständig. Durch Anwendung des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens erhält man ein Orthonormalsystem. \square

Beispiel (2.2-22). (nicht separabler Hilbertraum)

Sei $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $E_x := \{t \in [0, 1] : x(t) \neq 0\}$

$X = \{x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : E_x \text{ höchstens abzählbar}\}$

$H = \{x \in X : \sum_{t \in E_x} |x(t)|^2 < \infty\}$

$\Rightarrow H$ ist lineare Menge und wird mit

$$(x, y) := \sum_{t \in E_x \cap E_y} x(t) \overline{y(t)}$$

zu einem Hilbertraum. (Beweis: Aufgabe)

Für $\tau \in [0, 1]$ beliebig sei

$$x_\tau(t) := \begin{cases} 1 & , t = \tau \\ 0 & , t \neq \tau \end{cases} \quad (t \in [0, 1]) \Rightarrow E_{x_\tau} = \{\tau\}$$

$$(x_{\tau_1}, x_{\tau_2}) = \begin{cases} 1 & , \tau_1 = \tau_2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \{x_\tau\}_{\tau \in [0,1]}$ bilden überabzählbares Orthonormalsystem!

$\Rightarrow H$ nicht separabel!

Aufgabe (2.2-23).

(a) Zeigen Sie, dass das Orthonormalsystem aus Beispiel (2.2-22) vollständig ist.

(b) Sei $x \in H$ (aus (2.2-22)). Dann gilt:

$$\exists c_\tau \in \mathbb{C} \ (\tau \in E_x) \text{ mit } x = \sum_{\tau \in E_x} c_\tau x_\tau$$

2.2.1 Fourier-Reihen im Hilbertraum

Hilfssatz (2.2.1-1). Sei H ein Hilbertraum und $x_n \in H$ ($n = 1, 2, \dots$) paarweise orthogonale Elemente. Dann gilt: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn

die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ konvergiert. Dabei gilt:

$$\left\| \sum x_n \right\|^2 = \sum \|x_n\|^2 \quad (\text{verallgemeinerter Satz des Pythagoras})$$

Beweis. Für $n > m$ gilt

$$\left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\|^2 = \left(\sum_{k=m}^n x_k, \sum_{l=m}^n x_l \right) = \sum_{k,l=m}^n (x_k, x_l) \stackrel{\perp}{=} \sum_{k=m}^n (x_k, x_k) = \sum_{k=m}^n \|x_k\|^2$$

\Rightarrow mit der Vollständigkeit von H und \mathbb{R} folgt die Behauptung. \square

Hilfssatz (2.2.1-2). Sei $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum H , $x \in H$ beliebig, $c_k = (x, e_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) (genannt der k -te Fourier-Koeffizient von x bezüglich $\{e_n\}$) und $H_n = \text{span}\{e_k\}_{k=1}^n$. Dann ist

$$s_n := \sum_{k=1}^n c_k e_k$$

die beste Approximation von x durch Linearkombinationen der Elemente e_1, \dots, e_n . (vgl. (2.1-21)) Dabei gilt:

$$x - s_n \perp H_n$$

Beweis. Zeigen: $d(x, H_n) := \inf_{h \in H_n} \|x - h\| = \|x - s_n\|$

Sei $h = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in H_n$ beliebig

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|x - h\|^2 &= (x - h, x - h) \\
&= \|x\|^2 - (x, h) - (h, x) + (h, h) \\
&= \|x\|^2 - \left(x, \sum_l \alpha_l e_l\right) - \left(\sum_k \alpha_k e_k, x\right) + \left(\sum_k \alpha_k e_k, \sum_l \alpha_l e_l\right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_l \bar{\alpha}_l c_l - \sum_k \alpha_k \bar{c}_k + \sum_{k,l} \alpha_k \bar{\alpha}_l (e_k, e_l) \\
&= \|x\|^2 - \sum_k \bar{\alpha}_k c_k - \sum_k \alpha_k \bar{c}_k + \sum_k \alpha_k \bar{\alpha}_k + \sum_k c_k \bar{c}_k - \sum |c_k| \\
&= \|x\|^2 - \sum_k |c_k|^2 + \sum_k (\alpha_k - c_k)(\bar{\alpha}_k - \bar{c}_k) \\
&= \|x\|^2 - \sum_k |c_k|^2 + \sum |\alpha_k - c_k|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x - h\|$ wird minimal $\Leftrightarrow \alpha_k = c_k \quad \forall k = 1, \dots, n$, d. h. für $h = s_n$.

zu $x - s_n \perp H_n$:

$$(h, x - s_n) = (h, x) - (h, s_n) = \sum \alpha_k \bar{c}_k - \sum \alpha_k \bar{c}_k = 0 \quad \square$$

Folgerung (2.2.1-3). Mit den Bezeichnungen von Hilfssatz (2.2.1-2) gilt:

$$(1) \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$$

$$(2) \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

(3) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ konvergiert, wobei die sogenannte Bessel'sche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$$

erfüllt ist.

(4) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergiert in H . Für deren Summe $s \in H$ ist

$$x - s \perp H_0 := \text{span}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$$

und

$$\|x - s\|^2 = \|x\|^2 - \|s\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$$

($\sum c_n e_n$ heißt Fourierreihe von x bezüglich des Orthonormalsystems $\{e_n\}$)

Beweis. (1), (2), (3) sind trivial.

zu (4) Wegen $(c_k e_k, c_l e_l) = \begin{cases} 0 & : l \neq k \\ |c_k|^2 & : l = k \end{cases}$ folgt aus Hilfssatz (2.2.1-1):

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k e_k =: s \in H$$

Sei nun $y \in H_0$, d. h. $y = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k^{(m)} e_k$

Zunächst gilt: $x - s_n \perp \sum \alpha_k^{(m)} e_k \quad \forall n, m$

Für $m \rightarrow \infty$: $x - s_n \perp y$

Für $n \rightarrow \infty$: $x - s \perp y \Rightarrow$ Behauptung □

Satz (2.2.1-4). Mit den Beziehungen von Folgerung (2.2.1-3) ergibt sich:

$$(a) \quad x = s \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \quad (\text{Parseval'sche Gleichung})$$

(b) Das Orthonormalsystem $\|e_n\|$ ist genau dann vollständig, wenn für jedes $x \in H$ die Parseval'sche Gleichung erfüllt ist.

Satz (2.2.1-5) (Riesz-Fischer). Sei $\{e_n\}$ ein Orthonormalsystem in H .

$$\forall x' = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_2 \exists! x \in H : \xi_k = (x, e_k) \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Für dieses x gilt die Parseval'sche Gleichung.

Beweis. Wegen $(\xi_k e_k, \xi_l e_l) = \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ |\xi_k|^2 & : k = l \end{cases}$ und $x' \in l_2$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k =: x \Rightarrow c_l = (x, e_l) = (\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k, e_l) = \xi_k$$

Aus Satz (2.2.1-4) folgt die Behauptung. \square

Satz (2.2.1-6). Jeder unendlichdimensionale separable Hilbertraum ist dem l_2 isometrisch isomorph.

Beweis. Nach Satz (2.2-21) (b) besitzt H ein vollständiges Orthonormalsystem

$$\{e_n\} \text{ Zuordnung: } l_2 \ni x' = \{\xi_k\} \xrightarrow{\text{linear}} x = \sum \xi_k e_k \in H$$

Wegen Satz (2.2.1-4) und Satz (2.2.1-5) gilt: $\|x'\|^2 = \sum |\xi_k|^2 = \|x\|^2 \Rightarrow$ Behauptung
(Es gilt genauer: $(x', y')_{l_2} = (x, y)_H$) \square

Kapitel 3

Lineare Operatoren in normierten Räumen

3.1 Stetigkeit und Beschränktheit

Definition (3.1-1). Seien X, Y lineare Räume über \mathbf{K} und $\emptyset \neq M \subseteq X$ eine lineare Teilmenge. Eine Funktion $A : M \rightarrow Y$ heißt **linearer Operator** aus M in Y , wenn gilt:

- (1) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad \forall x_1, x_2 \in M$ (additiv)
- (2) $A(\lambda x) = \lambda Ax \quad \forall x \in M, \forall \lambda \in \mathbf{K}$ (homogen)

Dabei heißt M **Definitionsbereich** von A (Symbol: $M = \mathcal{D}(A)$)

$$\text{im } A := \{Ax : x \in M\} = \{y \in Y : \exists x \in \mathcal{D}(A) : y = Ax\}$$

heißt **Bild** von A . A heißt **Funktional**, wenn $\text{im } A \subseteq \mathbf{K}$

Bemerkung (3.1-2). Da M selbst ein linearer Raum ist, können wir o.B.d.A. $M := X$ setzen (was wir, bis auf notwendige Ausnahmen auch tun).

Aufgabe (3.1-3). Sei $A : X \rightarrow Y$ ein additiver Operator (nicht zwingend homogen). Zeigen Sie:

- (a) $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$
- (b) $A(0) = 0$
- (c) $A(-x) = -Ax \quad \forall x \in X$
- (d) $A(rx) = rAx \quad \forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in X$

Satz (3.1-4). Seien X, Y normierte Räume und $A : X \rightarrow Y$ ein additiver Operator. Dann gilt

$$A \text{ ist stetig (auf } X) \Leftrightarrow A \text{ ist in einem Punkt } x_0 \in X \text{ stetig}$$

Beweis. Sei A in $x_0 \in X$ stetig und $x \in X$ beliebig, sowie $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $\|x_n - x\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d. h. $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x \Rightarrow x_n - x + x_0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x_0$
 $\Rightarrow A(x_n - x + x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Y} Ax_0 \Rightarrow Ax_n - Ax + Ax_0 \xrightarrow{Y} Ax_0 \Rightarrow Ax_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Y} Ax \quad \square$

Aufgabe (3.1-5).

- Seien X, Y reelle normierte Räume. Zeigen Sie: $A : X \rightarrow Y$ ist genau dann linear, wenn A additiv und in einem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.
- Was muss man für komplexe Räume noch fordern, damit die Aussage gültig bleibt?

Definition (3.1-6). Seien X, Y normierte Räume. Der lineare Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt **beschränkt**, wenn er jede beschränkte Menge $E \subset X$ wieder in eine beschränkte Menge $A(E) = \{A(x) : x \in E\}$ überführt.

Satz (3.1-7). Seien X, Y normierte Räume und $A : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) A ist beschränkt
- (b) $\exists c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\|x\| \forall x \in X$
- (c) $\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| < \infty$
- (d) A ist stetig
- (e) A ist gleichmäßig stetig auf X

Beweis. (a) \Rightarrow (c). Sei $K := K(0, 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel. Da K beschränkt ist, folgt $A(K)$ ist beschränkt, woraus folgt $\sup_{x \in K} \|Ax\| < +\infty$.

(c) \Rightarrow (b). Für $x' \in K$ folgt $\|Ax'\| \leq \|A\|$ und wenn $x \neq 0 \Rightarrow x' := \frac{x}{\|x\|} \in K$

$\Rightarrow A\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) \leq \|A\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \forall x \in X$.

(b) \Rightarrow (a). Sei $E \subset X$ beschränkt, d. h. $\|x\| \leq const \forall x \in E$

$\stackrel{(b)}{\Rightarrow} \|Ax\| \leq C \cdot const \forall x \in E \Rightarrow A(E)$ beschränkt \Rightarrow (a).

(b) \Rightarrow (d). Sei $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\stackrel{(b)}{\Rightarrow} 0 \leq \|Ax_n\| \leq C\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow Ax_n \rightarrow 0 \Rightarrow A$ stetig in $x_0 = 0$

$\stackrel{\text{Satz (3.1-4)}}{\Rightarrow} A$ stetig auf X .

(d) \Rightarrow (c). Sei A stetig. Annahme: $\|A\| = +\infty \Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|Ax_n\| > n$.

Setzen $z_n = \frac{1}{n}x_n \Rightarrow \|z_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow Az_n \rightarrow 0$ zu $\|Az_n\| = \frac{1}{n}\|Ax_n\| > \frac{1}{n} \cdot n = 1$

(b) \Rightarrow (e). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Für $x_1, x_2 \in X$ mit $\|x_1 - x_2\| < \delta$ folgt $\|Ax_1 - Ax_2\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\| < C \cdot \delta = \varepsilon$.

(e) \Rightarrow (d). trivial. □

Bemerkung (3.1-8). Es gilt:

- (a) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$
- (b) $\|A\| = \inf\{c : \|Ax\| \leq c\|x\| \forall x \in X\}$

Beispiel (3.1-9).

(1) $X = Y = C[0, 1]$ und $K(s, t)$ sei stetig auf $[0, 1] \times [0, 1]$. Für $x \in C[0, 1]$ sei

$$(Kx)(s) := \int_0^1 K(s, t)x(t)dt \quad (s \in [0, 1])$$

$K : X \rightarrow Y$ ist offenbar ein linearer Operator.

$$\begin{aligned} |(Kx)(s)| &\leq \left| \int_0^1 K(s, t)x(t)dt \right| \leq \int_0^1 |K(s, t)||x(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |K(s, t)|dt \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| \leq \underbrace{\max_{s \in [0, 1]} \int_0^1 |K(s, t)|dt}_{=c} \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| \\ &= c\|x\| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|Kx\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in C[0, 1] \Rightarrow K$ ist beschränkt.

(klar ist $\|K\| \leq c$, man kann zeigen $\|K\| = c$)

(2) Sei $X = Y = H$ ein Hilbertraum und $\{0\} \neq H_1$ ein abgeschlossener Teilraum und $P : H \rightarrow H_1, Q : H \rightarrow H_1^\perp$ die Orthoprojektoren auf H_1 bzw. H_2 (vergleiche (2.2-14)).

P, Q sind offenbar linear. Beide sind beschränkt, denn wegen

$x = Px + Qx$ und $(Px, Qx) = 0$ nach Satz des Pythagoras

$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \Rightarrow \|Px\| \leq \|x\|, \|Qx\| \leq \|x\|$, d. h. $\|P\| \leq 1, \|Q\| \leq 1$.

Sei $x' \in H_1$ mit $\|x'\| = 1 \Rightarrow Px' = x' \Rightarrow \|P\| \geq \|Px'\| \geq \|x'\| = 1 \Rightarrow \|P\| = 1$ (analog für Q)

(3) $X = Y = C[0, 1], t_0 \in [0, 1]$ fixiert, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Setzen

$$f(x) := \alpha x(t_0) \text{ für } x \in C[0, 1]$$

\Rightarrow offenbar ist $f : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Weiter gilt

$$|f(x)| = |\alpha x(t_0)| \leq |\alpha| \max_{t \in [0, 1]} |x(t)| = |\alpha| \|x\| \Rightarrow \|f\| \leq |\alpha| \Rightarrow f \text{ ist stetig.}$$

Zeigen noch $\|f\| = |\alpha|$. Sei $x_0 \in C[0, 1]$ mit $x_0(t) = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|} \forall t$

$$\Rightarrow \|x_0\| = 1 \Rightarrow \|f\| \geq |f(x_0)| = \left| \frac{\alpha \bar{\alpha}}{|\alpha|} \right| = |\alpha|$$

(3') $X = \{x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : x \text{ stetig}\}$ mit der Norm $\|x\|_1 := \int_0^1 |x(t)|dt$ und

$A : X \rightarrow X$ gegeben durch: $(Ax)(t) := tx(t) \forall t \in [0, 1]$

Offenbar ist A linear und

$$\|Ax\|_1 = \int_0^1 |tx(t)|dt \leq \int_0^1 |x(t)|dt = \|x\|_1 \Rightarrow \|A\| \leq 1$$

Annahme $\exists x_0 \in X$, mit $\|x_0\|_1 = 1$, sodass $\|Ax_0\|_1 = 1$. Dann wäre

$$1 = \|Ax_0\|_1 = \int_0^1 t|x_0(t)|dt = \int_0^1 |x_0(t)|dt = \|x_0\|_1 = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (t-1)|x_0(t)|dt = 0 \quad \not\Leftarrow (t-1) \leq 0 \text{ auf } [0, 1] \text{ und } < 0 \text{ auf }]0, 1[$$

Setzen $x_n(t) := (n+1)t^{n+1} \quad (t \in [0, 1]) \Rightarrow x_n \in X$ und $\|x_n\|_1 = 1$, sowie

$$\|Ax_n\|_1 = \int_0^1 |(n+1)t^{n+2}|dt = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \|A\| = 1$$

- (4) $X = Y = C[0, 1], M := \{x \in X : x \text{ stetig differenzierbar}\}$. Für $x \in M$ sei
 $(Ax)(t) := \frac{d}{dt}x(t)$
 $\Rightarrow A : M \rightarrow Y$ ist linearer Operator. A ist unbeschränkt, denn für $x_n \in M$ mit $x_n(t) := t^n$ gilt
- $\|x_n\| = 1 \quad [\|x\| := \max_{t \in [0,1]} |x(t)|]$
 - $Ax_n(t) = nt^{n-1} \Rightarrow \|Ax_n\| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
- (5) $X = C^1[0, 1]$ linearer Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0, 1]$ mit
 $\|x\|_{C^1} := \|x\|_C + \|x'\|_C$
 $Y = C[0, 1], A : X \rightarrow Y$ sei $(Ax)(t) := \frac{d}{dt}x(t)$
 $\|Ax\|_C = \|x'\|_C \leq \|x\|_{C^1} \Rightarrow \|A\| \leq 1$, d. h. $\frac{d}{dt} : C^1 \rightarrow C$ ist stetig.
- (6) X, Y normierte Räume, $A : X \rightarrow Y$ linear. Setzen
 $\|x\| := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$
 $\Rightarrow (X, \|\cdot\|)$ ist normierter Raum und
 $\|Ax\|_Y \leq \|x\| \Rightarrow A : (X, \|\cdot\|) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ ist beschränkt.
- (7) X, Y normierte Räume mit $\dim X = n < \infty$. Dann ist jeder lineare Operator stetig.
- (8) H sei Hilbertraum, $y \in H$ fixiert und $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ definiert durch
 $f(x) := (x, y) \quad (x \in H) \Rightarrow f$ ist lineares Funktional. Mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung folgt für beliebige $x \in H$
 $|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$, also $\|f\| \leq \|y\|$
 Wählen $x = \frac{y}{\|y\|}$ (wenn $y \neq 0$) und erhalten $|f(x)| = |(x, y)| = \|y\|$, also
 $\|f\| = \|y\|$.

Satz (3.1-10) (Riesz). Sei H Hilbertraum. Für jedes lineare, stetige Funktional f gibt es ein eindeutig bestimmtes $y \in H$, sodass

$$f(x) = (x, y) \quad \forall x \in H.$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $y, y' \in H$ mit $f(x) = (x, y) = (x, y') \quad \forall x \in H$
 $\Rightarrow (x, y - y') = 0 \quad \forall x \in H \Rightarrow (y - y', y - y') = 0 \Rightarrow y - y' = 0$, d. h. $y = y'$.
 Existenz: Sei $f \neq 0$. Die Menge $H_1 := \ker(f) := \{x \in H : f(x) = 0\}$ ist linearer, abgeschlossener Teilraum von H und $H_1 \neq H$. Sei $H_2 := H_1^\perp$, d. h. $H = H_1 \oplus H_2$.
 Wegen $H_1 \neq H$ ist $\dim H_2 \geq 1$.
 Zeigen $\dim H_2 = 1$. Sei $z_1, z_2 \in H_2$. Setzen $z := f(z_1)z_2 - f(z_2)z_1 \Rightarrow z \in H_2$
 Andererseits gilt $f(z) = f(z_1)f(z_2) - f(z_2)f(z_1) = 0 \Rightarrow z \in H_1$.
 Da $H = H_1 \oplus H_2 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow z_1, z_2$ sind linear abhängig, damit folgt die Behauptung.
 $\exists e \in H_2$ mit $\|e\| = 1$, sodass $\forall z \in H_2 \exists \lambda \in \mathbb{K}$ mit $z = \lambda e$. Da $H = H_1 \oplus H_2$ gilt
 $\forall x \in H \exists! x' \in H_1, \lambda \in \mathbb{K}$, sodass $x = x' + \lambda e$
 $\Rightarrow (x, e) = (x' + \lambda e, e) = \underbrace{(x', e)}_{=0} + \underbrace{\lambda(e, e)}_{=1} = \lambda$
 $f(x) = f(x' + \lambda e) = f(x') + \lambda f(e) = 0 + (x, e)f(e) = (x, y)$, wobei $y := \overline{f(e)}e$. \square

Folgerung (3.1-11). Für einen Hilbertraum H sind H und H^* (Raum der linearen, stetigen Funktionale auf H , (3.2-5)) isometrisch zueinander

$$H \ni y \xrightleftharpoons[R^{-1}]{R} f \in H^*, \|f\|_{H^*} = \|y\|_H$$

Achtung: diese Zuordnung R ist zwar additiv, aber im Fall $\mathbf{K} = \mathbb{C}$ nicht homogen, da $(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y)$ (sesquilinear).

3.2 Der Raum der linearen, stetigen Operatoren

Bezeichnung (3.2-1). Seien X, Y normierte Räume über \mathbf{K} . $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichne die Menge der linearen, stetigen Operatoren $A : X \rightarrow Y$ von X nach Y . (Falls $Y = X$, schreibt man $\mathcal{L}(X)$, statt $\mathcal{L}(X, X)$)

Hilfssatz (3.2-2). Seien $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\lambda \in \mathbf{K}$. Durch die Operationen

- $(A + B)(x) := Ax + Bx \quad \forall x \in X$
- $(\lambda A)(x) := \lambda Ax \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda \in \mathbf{K}$

wird $\mathcal{L}(X, Y)$ zu einem \mathbf{K} -linearen Raum.

Beweis. Bekanntlich sind $A + B$, λA wieder lineare Operatoren von X nach Y . Zeigen, dass diese stetig beziehungsweise beschränkt sind:

$$\begin{aligned} (*) \quad - \quad \|(A + B)x\| &= \|Ax + Bx\| && \leq \|Ax\| + \|Bx\| \\ &\leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| && \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\| \\ &\Rightarrow (A + B) \text{ stetig} \\ (**) \quad - \quad \|(\lambda A)x\| &= \|\lambda Ax\| && \leq |\lambda|\|Ax\| \\ &\leq |\lambda|\|A\|\|x\| && \Rightarrow \lambda A \text{ stetig} \end{aligned}$$

□

Satz (3.2-3). Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Der Ausdruck

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

ist eine Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$, genannt **Operatornorm**.

Beweis. Klar ist $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$0 = \|A\| \Leftrightarrow \|Ax\| = 0 \quad \forall x : \|x\| \leq 1 \Leftrightarrow \|Ax\| = 0 \quad \forall x \in X$$

$$\left(x' = \frac{x}{\|x\|} \quad (x \neq 0) \right) \Leftrightarrow Ax = 0 \quad \forall x \in X \Leftrightarrow A = 0$$

$$(**) \xrightarrow{(3.1-8)} \|\lambda A\| \leq |\lambda|\|A\| \quad \forall A \quad \forall \lambda. \text{ Für } \lambda \neq 0 \text{ gilt: } \|A\| = \left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda A) \right\| \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|\lambda A\|$$

$$\Rightarrow |\lambda|\|A\| \leq \|\lambda A\| \Rightarrow \|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$$

$$(*) \xrightarrow{(3.1-8)} \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \square$$

Satz (3.2-4). Der normierte Raum $(\mathcal{L}(X, Y), \|\cdot\|)$ ist genau dann ein Banachraum (d. h. er ist vollständig in der Operatornorm), wenn Y ein Banachraum ist.

Beweis. 1) Sei $\mathcal{L}(X, Y)$ vollständig $\Rightarrow Y$ vollständig (siehe Satz (3.7-20))
 2) Sei Y vollständig und $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n = 1, 2, \dots$), sodass $\{A_n\}_{n \geq 1}$ eine Fundamentalfolge ist (in der Operatornorm) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \|A_n - A_m\| < \varepsilon \forall n, m > n_0$
 Für $x \in X$ fixiert folgt $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\| \forall n, m > n_0$ (+)
 $\Rightarrow \{A_n x\}_{n \geq 1}$ ist eine Fundamentalfolge in Y .

Da Y vollständig $\exists y \in Y : A_n x \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Y} y$
 Da y durch $x \in X$ eindeutig bestimmt ist, erhalten wir eine Abbildung $A : X \rightarrow Y$ mit $Ax = y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &\stackrel{A \text{ lin.}}{=} \lambda_1 \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_1 + \lambda_2 \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_2 \\ &= \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 \end{aligned}$$

Wegen $\| \|A_n\| - \|A_m\| \| \leq \|A_n - A_m\| \Rightarrow \{ \|A_n\| \}_{n \geq 1}$ ist Fundamentalfolge in \mathbb{R}
 $\Rightarrow \{ \|A_n\| \}_{n \geq 1}$ ist beschränkt, d. h. $\exists c > 0 : \|A_n\| \leq c \forall n = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow \|Ax\| \stackrel{\text{Norm stg.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\| \leq c \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow A \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Zeigen: $\|A_n - A\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$:

Lassen in (+) $m \rightarrow \infty : \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in X \forall n > n_0$

$$\Rightarrow \|A_n - A\| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_0 \Rightarrow A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}(X, Y)} A \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \square$$

Folgerung (3.2-5). Für $Y = \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) ist der Raum $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ der linearen, stetigen Funktionale $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ein vollständiger, normierter Raum. $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ heißt der zu X **duale Raum**. Bezeichnung: X^* .

Bemerkung (3.2-6). Man kann in $\mathcal{L}(X, Y)$ folgende drei Konvergenzbegriffe erklären:

Sei $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n = 1, 2, \dots$). Die Folge $\{A_n\}$ heißt gegen $A \in \mathcal{L}(X, Y)$

- **normkonvergent**, wenn gilt:

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

- **stark konvergent**, wenn gilt:

$$\|A_n x - Ax\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall x \in X \quad (\text{punktweise konvergent})$$

- **schwach konvergent**, wenn gilt:

$$|f(A_n x) - f(Ax)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall f \in Y^*, \quad \forall x \in X$$

Bemerkung (3.2-7). Wegen

$$|f(A_n x) - f(Ax)| \leq \|f\| \|A_n x - Ax\| \leq \|f\| \|A_n - A\| \|x\|$$

folgt aus der Normkonvergenz die starke Konvergenz und aus dieser die schwache Konvergenz von $\{A_n\}$.

3.3 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Lemma (3.3-1). Seien X, Y normierte Räume und $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ eine Familie linearer, stetiger Operatoren, die auf X punktweise beschränkt ist, d. h.

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \|Ax\| < \infty \quad \forall x \in X.$$

Existiert eine abgeschlossene Kugel

$$\bar{K} := \bar{K}(x^*, r) := \{x \in X : \|x - x^*\| \leq r\},$$

sodass die Menge

$$M(x^*, r) := \{\|Ax\| : A \in \mathcal{F}, x \in \bar{K}\} \subset \mathbb{R}$$

beschränkt ist, so gilt:

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \|A\| < \infty.$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein $c > 0 : \|Ax\| \leq c \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \bar{K}$.

Sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1 \Rightarrow \tilde{x} := rx + x^* \in \bar{K}$

$$\Rightarrow c \geq \|A\tilde{x}\| = \|A(rx + x^*)\| = \|rAx + Ax^*\| \geq r\|Ax\| - \|Ax^*\|$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq \frac{1}{r}(c + \|Ax^*\|) = \text{const} \quad \forall x \in X \text{ mit } \|x\| = 1$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq \text{const} \quad \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{F}} \|A\| < \infty \quad \square$$

Hilfssatz (3.3-2). Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y), \bar{K} = \bar{K}(x_0, r_0)$ (abgeschlossene Kugel) und $x_1 \in \bar{K}(x_0, r_0)$ und $\|Ax_1\| > n$ ($n \in \mathbb{N}$), sowie $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert ein r_1 mit $0 < r_1 < \delta : \bar{K}_1 := \bar{K}(x_1, r_1) \subseteq \bar{K}$ und $\|Ax\| > n \quad \forall x \in \bar{K}_1$.

Beweis. Bekanntlich $\exists r'_1 > 0 : \bar{K}(x_1, r'_1) \subseteq \bar{K}$.

Wählen nun $0 < r''_1 < \frac{\|Ax_1\| - n}{\|A\|}$ und $x \in X : \|x - x_1\| \leq r''_1$

$$\Rightarrow \| \|Ax\| - \|Ax_1\| \| \leq \|Ax - Ax_1\| \leq \|A\| \|x - x_1\| \leq \|A\| r''_1 < \|Ax_1\| - n$$

$$\Rightarrow -(\|Ax_1\| - n) < \|Ax\| - \|Ax_1\| \Rightarrow n < \|Ax\|$$

Setzen $r_1 = \min(r'_1, r''_1, \delta)$

$$\Rightarrow n < \|Ax\| \quad \forall x \in \bar{K}(x_1, r_1) \text{ und weiterhin gilt } \bar{K}(x_1, r_1) \subseteq \bar{K} \quad \square$$

Theorem (3.3-3) (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Seien X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Ist eine Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$ auf X punktweise beschränkt, so ist \mathcal{F} gleichmäßig beschränkt, d. h.

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} \|A\| < \infty$$

Beweis. Annahme: $\sup_{A \in \mathcal{F}} \|A\| = \infty$. Sei $x_0 \in X, r_0 > 0$ beliebig

\Rightarrow Die Menge $M(x_0, r_0)$ aus Lemma (3.3-1) ist unbeschränkt

$\Rightarrow \exists x_1 \in \text{int } \bar{K}(x_0, r_0) \exists A_1 \in \mathcal{F} : \|A_1 x_1\| > 1$

(Nebenrechnung: Wäre $\|x_1 - x_0\| = r_0, x'_k = \lambda_k x_0 + (1 - \lambda_k)x_1 \quad 0 < \lambda_k < 1, \lambda_k \rightarrow 0$

$\Rightarrow x'_k \in \text{int } \bar{K}(x_0, r_0)$ und $\|x'_k - x_1\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Da $\|A_1 x_1\| > 1$ und $\|A_1 x'_k\| \rightarrow \|A_1 x_1\| \Rightarrow \exists x'_k : \|A_1 x'_k\| > 1$)

Aus Hilfssatz (3.3-2) folgt $\exists 0 < r_1 < \frac{1}{2} : \bar{K}(x_1, r_1) \subseteq \bar{K}(x_0, r_0)$ und

$\|A_1x\| > 1 \quad \forall x \in \overline{K}(x_1, r_1)$.

Da wieder die Menge $M(x_1, r_1)$ unbeschränkt ist, $\exists x_2 \in \text{int } \overline{K}(x_1, r_1)$,

$\exists A_2 \in \mathcal{F} : \|A_2x_2\| > 2$

Aus Hilfssatz (3.3-2) folgt wieder $\exists 0 < r_2 < \min\left(r_1, \frac{1}{2^2}\right) : \overline{K}(x_2, r_2) \subseteq \overline{K}(x_1, r_1)$

und $\|A_2x\| > 2 \quad \forall x \in \overline{K}(x_2, r_2)$

Fortsetzung des Verfahrens liefert abgeschlossene Kugeln $\overline{K}(x_n, r_n)$ mit

$0 < r_n < \frac{1}{2^n}$ und $\overline{K}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{K}(x_n, r_n)$ und Operatoren A_n mit

$\|A_nx\| > n \quad \forall x \in \overline{K}(x_n, r_n)$

Nach Satz (1.7-3) (Intervallschachtelung) $\exists x^* \in \overline{K}(x_n, r_n) \quad \forall n = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \|A_nx^*\| > n \quad \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow \mathcal{F}$ ist auf x^* unbeschränkt $\not\Leftarrow \Rightarrow$ Behauptung \square

Folgerung (3.3-4). Seien X, Y wie in Satz (3.3-3) gewählt und $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n = 1, 2, \dots$). Wenn für jedes $x \in X$ der Grenzwert

$$Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_nx$$

existiert (starke Konvergenz von $\{A_n\}$ gegen A), so ist $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und

$$\|A\| \leq \liminf \|A_n\| < +\infty.$$

Beweis. Offenbar ist A linear.

Aus $\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_nx\|$ folgt $\sup_n \|A_nx\| < \infty \quad \forall x \in X$. Aus Satz (3.3-3) folgt dann $\exists c > 0 : \|A_n\| \leq c (< \infty) \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Aus $\|A_nx\| \leq \|A_n\|\|x\|$ folgt $\|Ax\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_nx\| \leq \liminf \|A_n\|\|x\| \leq c\|x\|$ und damit $\|A\| \leq \liminf \|A_n\| < \infty \quad \square$

Satz (3.3-5) (Satz von Banach und Steinhaus). Seien X, Y Banachräume, $D \subseteq X$ dichte Teilmenge in X und $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ ($n = 1, 2, \dots$). Damit gilt: Die Folge $\{A_n\}$ konvergiert genau dann stark gegen $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, wenn erfüllt ist:

- (1) $\sup_n \|A_n\| < \infty$
- (2) $\{A_nx'\}_{n=1}^\infty$ ist Fundamentalfolge $\forall x' \in D$.

Beweis. Sei (1) und (2) erfüllt. Da $\overline{D} = X$ gilt $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0$

$\exists x' \in D : \|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{2c}$, wobei $c = 2 \sup \|A_n\|$.

Da $\{A_nx'\}$ eine Fundamentalfolge ist, existiert ein n_0 , sodass

$$\|A_nx' - A_mx'\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > n_0$$

Zeigen: $\{A_nx\}$ ist Fundamentalfolge in Y .

$$\begin{aligned} \|A_nx - A_mx\| &= \|A_nx - A_nx' + A_nx' - A_mx' + A_mx' - A_mx\| \\ &\leq \|A_n\|\|x - x'\| + \|A_nx' - A_mx'\| + \|A_m\|\|x' - x\| \\ &< c\|x - x'\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n, m > n_0 \end{aligned}$$

Da Y vollständig ist, existiert ein $Ax \in Y$, sodass gilt $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_nx \quad \forall x \in X$.

Mit Folgerung (3.3-4) folgt die Behauptung. \square

Anwendung (3.3-6) (Konvergenz von Quadraturformeln). Zur näherungsweisen Berechnung bestimmter Integrale benutzt man sogenannte Quadraturformeln:

$$\int_a^b x(t)dt \approx \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \quad (1)$$

wobei $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_{n-1}^{(n)} < t_n^{(n)} = b$ ist.

Beispiel: Rechteckformel.

$$t_k^{(n)} = a + \frac{k}{n-1}(b-a) \quad (k = 0, \dots, n)$$

$$\int_a^b x(t)dt \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} x(t_k^{(n)}), \text{ d. h. } A_k^{(n)} = \frac{b-a}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1) \quad A_n^{(n)} = 0$$

Behauptung (Szegö): Die Quadraturformel (1) konvergiert genau dann gegen

$$\int_a^b x(t)dt \quad \forall x \in C[a, b], \text{ wenn gilt:}$$

$$(1') \sup_n \sum_{k=0}^n |A_k^{(n)}| < \infty$$

(2') Die Formel konvergiert für jedes Polynom.

Beweis. Wir betrachten auf $X = C[a, b]$ die Funktionale

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}), \quad f(x) = \int_a^b x(t)dt. \text{ Man kann zeigen: } \|f\| = \sum |A_k^{(n)}|. \text{ (1')} \text{ ist}$$

also die Voraussetzung (1) von Satz (3.3-5) und (2') entsprechend dort (2)

$$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{K}} f(x) \quad \forall x \in X.$$

(siehe auch Fichtenholz, Band II) □

Aufgabe (3.3-7). Sei $X = C_{\mathbb{C}}[0, 1]$ (komplex-wertig) und

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ fixierte Punkte, sowie $\alpha_k \in \mathbb{C}$ ($k = 0, \dots, n$).

Betrachten $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x(t_k)$. Zeigen Sie:

(1) f ist ein lineares, stetiges Funktional.

$$(2) \|f\| = \sum_{k=0}^n |\alpha_k|$$

3.4 Invertierbarkeit von Operatoren

Definition (3.4-1). Seien X, Y, Z normierte Räume, $A : X \rightarrow Y$, $B : Y \rightarrow Z$ Operatoren. Der Operator $BA : X \rightarrow Z$ gegeben durch

$$(BA)(x) = B(Ax) \quad \forall x \in X$$

heißt das **Produkt** von B und A (**Operatormultiplikation**).

Aufgabe (3.4-2). Zeigen Sie:

(a) Das Produkt ist assoziativ

(b) Sind $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $B \in \mathcal{L}(Y, Z)$, so ist $BA \in \mathcal{L}(X, Z)$ und $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$

(c) Die Abbildung $\mathcal{P} : \mathcal{L}(Y, Z) \times \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}(X, Z)$ gegeben durch $\mathcal{P}(B, A) = BA$ ist linear und stetig.

Definition (3.4-3). Seien X, Y normierte Räume. Der Operator $V : Y \rightarrow X$ heißt der zum Operator $A : X \rightarrow Y$ **inverse Operator** und A **invertierbar** (beidseitig), wenn gilt:

$$VA = I_X \text{ bzw. } AV = I_Y \quad (I_X, I_Y \text{ identische Operatoren auf } X \text{ bzw. } Y)$$

Bezeichnung: $V = A^{-1}$

Aufgabe (3.4-4). Zeigen Sie:

- (a) $A^{-1} : Y \rightarrow X$ existiert genau dann, wenn $A : X \rightarrow Y$ bijektiv ist.
- (b) A^{-1} ist eindeutig bestimmt
- (c) Mit $A : X \rightarrow Y$ ist auch $A^{-1} : Y \rightarrow X$ linear
- (d) Sei $A : X \rightarrow Y$ linear. Dann ist der Kern von A , d. h. die Menge

$$\ker A := \{x \in X : Ax = 0\},$$

linear in X

- (e) $A : X \rightarrow Y$ linear. Dann gilt:

$$\ker A = \{0\} \Leftrightarrow A \text{ injektiv}$$

Definition (3.4-5). Seien X, Y normierte Räume. Der lineare Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt **stetig invertierbar**, wenn $A^{-1} : Y \rightarrow X$ existiert und stetig ist. $\mathcal{GL}(X, Y)$ ist die Menge der Operatoren $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, die stetig invertierbar sind, d. h. für die $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ist.

Aufgabe (3.4-6). Zeigen Sie:

- (a) $(\mathcal{L}(X), +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement
- (b) $(\mathcal{GL}(X), \cdot)$ ist eine Gruppe.

Lemma (3.4-7). Seien X, Y normierte Räume. Der lineare Operator $A : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig invertierbar, wenn gilt:

- (a) $Y = \text{im } A$ (A ist surjektiv)
- (b) $\exists m > 0 : \|Ax\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in X$

Beweis. 1) Sei A stetig invertierbar, d. h. $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$. Damit ist A bijektiv und somit surjektiv.

$$A^{-1} \text{ stetig} \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| \quad \forall y \in Y.$$

$$\text{Sei } x \in X \text{ beliebig, } y = Ax \Rightarrow \|x\| = \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \|y\| = \|A^{-1}\| \|Ax\|$$

$$\Rightarrow \|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|x\| \quad \forall x \in X$$

2) Seien (a) und (b) erfüllt. Sei $x \in \ker A$, d. h. $Ax = 0$. Aus (b) folgt

$$0 = \|Ax\| \geq m\|x\| \geq 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A \text{ injektiv.}$$

Mit (a) folgt dann A ist bijektiv $\Rightarrow \exists A^{-1} : Y \rightarrow X$, linear.

$$\text{Sei } x = A^{-1}y \quad (y \in Y). \text{ Mit (b) ergibt sich } m\|x\| = m\|A^{-1}y\| \leq \|Ax\| = \|y\|$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{m} \|y\| \quad \forall y \in Y \Rightarrow A^{-1} \text{ stetig.} \quad \square$$

Satz (3.4-8). Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$. Wenn $\|A\| < 1$, so ist der Operator $(I - A) \in \mathcal{L}(X)$ stetig invertierbar und

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad (\text{konvergent in Operator-Norm, Neumann'sche Reihe}).$$

Außerdem ist

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Beweis. Da X ein Banachraum ist, folgt, dass $\mathcal{L}(X)$ ein Banachraum ist. Da $\|A^n\| \leq \|A\|^n < 1$ folgt $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ ist absolut konvergent in $\mathcal{L}(X) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ konvergiert in Operatornorm, d. h. $\exists S \in \mathcal{L}(X) : S = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$,

$$\text{d. h. } \left\| \sum_{k=0}^n A^k - S \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \|A^k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Zeigen: $S = (I - A)^{-1}$.

$$\text{Setzen } S_n = \sum_{k=0}^n A^k \Rightarrow (I - A)S_n = S_n(I - A) = I - A^{n+1}$$

Für $n \rightarrow \infty$: $(I - A)S = S(I - A) = I \Rightarrow$ Behauptung

$$\begin{array}{ccc} \|S_n\| & \leq \sum_{k=0}^n \|A^k\| & \leq \sum_{k=0}^n \|A\|^k \\ \downarrow n \rightarrow \infty & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ \|S\| & & \frac{1}{1 - \|A\|} \end{array}$$

$$\Rightarrow \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \quad \square$$

3.5 Das Theorem vom abgeschlossenen Graphen

Definition (3.5-1). Seien X, Y normierte Räume, $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ eine lineare Teilmenge. Der lineare Operator $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow Y$ heißt **abgeschlossener Operator**, wenn aus $x_n \in \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \xrightarrow{X} x \in X$ und $Ax_n \xrightarrow{Y} y \in Y$ stets folgt:

- 1) $x \in \mathcal{D}(A)$
- 2) $Ax = y$.

Folgerung (3.5-2). Der lineare Operator $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow Y$ ($\mathcal{D}(A) \subseteq X$) ist genau dann ein abgeschlossener Operator, wenn der Graph von A , d. h. die Menge

$$\text{Graph}(A) := \{(x, Ax) : x \in \mathcal{D}(A)\},$$

in $X \times Y$ abgeschlossen ist.

Beweis. Sei A abgeschlossener Operator und $(x_n, Ax_n) \in \text{Graph}(A)$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $(x_n, Ax_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X \times Y} (x, y) \in X \times Y$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{X} x, Ax_n \xrightarrow{Y} y$ (koordinatenweise Konvergenz), da A abgeschlossen ist, folgt 1) $x \in \mathcal{D}(A)$, 2) $Ax = y \Rightarrow (x, y) \in \text{Graph}(A) \Rightarrow \text{Graph}(A)$ ist abgeschlossene Menge in $X \times Y$.

Sei $\text{Graph}(A)$ abgeschlossen und $x_n \xrightarrow{X} x$ ($x_n \in \mathcal{D}(A)$), $Ax_n \xrightarrow{Y} y$

$\Rightarrow \underbrace{(x_n, Ax_n)}_{\in \text{Graph}(A)} \xrightarrow{X \times Y} (x, y) \Rightarrow (x, y) \in \text{Graph}(A)$, d. h. $x \in \mathcal{D}(A)$, $y = Ax$
 $\Rightarrow A$ ist abgeschlossener Operator. \square

Folgerung (3.5-3). Jeder lineare, stetige Operator $A : X \rightarrow Y$ (hier $\mathcal{D}(A) = X$) ist ein abgeschlossener Operator.

Beispiel (3.5-4). $X = Y = C[0, 1]$, $\|x\| = \max_{t \in [0, 1]} |x(t)|$

$\mathcal{D}(A) = \{x \in X : x \text{ stetig differenzierbar}\}$

$\mathcal{D}(A) \subset X$ lineare Teilmenge und $A = \frac{d}{dt} \Rightarrow A : \mathcal{D}(A) \rightarrow Y$ ist ein linearer Operator.

Behauptung: A ist ein abgeschlossener Operator.

Beweis. Sei $x_n \in \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \xrightarrow{X} x \in X$, $y_n = Ax_n \xrightarrow{Y} y \in Y$

$\Rightarrow x_n(t) = \int_0^t y_n(\tau) d\tau + x(0)$. Da $y_n(t) \rightrightarrows y(t)$ auf $[0, 1]$ (gleichmäßig)

$\Rightarrow \int_0^t y_n(\tau) d\tau \rightrightarrows \int_0^t y(\tau) d\tau$ auf $[0, 1] \Rightarrow x_n(t) \rightrightarrows x(t)$ auf $[0, 1]$ und

$x_n(t) = x(0) + \int_0^t y_n(\tau) d\tau \rightrightarrows \int_0^t y(\tau) d\tau + x(0)$ auf $[0, 1]$

$\Rightarrow x(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau + x(0) \Rightarrow x \in \mathcal{D}(A)$ und $Ax = y$. \square

Folgerung (3.5-5). Ist $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow Y$ ($\mathcal{D}(A) \subseteq X$) injektiv und ein abgeschlossener Operator, so ist $A^{-1} : \text{im } A \rightarrow X$ ein abgeschlossener Operator (hier $\mathcal{D}(A^{-1}) = \text{im } A$)

Beweis. Sei $y_n \in \mathcal{D}(A^{-1})$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $y_n \xrightarrow{Y} y \in Y$, $A^{-1}y_n \xrightarrow{X} x \in X$

\Rightarrow da $y_n \in \text{im } A$ existieren $x_n \in \mathcal{D}(A)$ so, dass $y_n = Ax_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

$\Rightarrow Ax_n \xrightarrow{Y} y$ und $x_n = A^{-1}(Ax_n) = A^{-1}y_n \xrightarrow{X} x$.

Da A ein abgeschlossener Operator ist, folgt 1) $x \in \mathcal{D}(A)$, 2) $Ax = y$

$\Rightarrow y \in \text{im } A = \mathcal{D}(A^{-1})$ und $A^{-1}y = A^{-1}(Ax) = x$

$\Rightarrow A^{-1}$ ist abgeschlossener Operator. \square

Theorem (3.5-6) (Satz von Banach über den abgeschlossenen Graphen).

Seien X, Y Banachräume und $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow Y$ ($\mathcal{D}(A) \subseteq X$) ein linearer, abgeschlossener Operator. Wenn $\mathcal{D}(A) = X$, so ist der Operator $A : X \rightarrow Y$ ein stetiger Operator, d. h. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis. Zeigen: Aus $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow Ax_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ Das Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|Ax\|$ ist in $x_0 = 0$ stetig.

Prüfen, ob (a), (b) aus Satz (3.5-11) erfüllt ist.

zu (a) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \|A(\lambda x)\| = \lim_{\lambda \rightarrow 0} |\lambda| \|Ax\| = 0 \quad \forall x \in X$

zu (b) Sei $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$), $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$, $s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x \in X$.

Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \infty$ folgt (b)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ax_n\| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n$ ist absolut konvergent in Y .

Da Y ein Banachraum ist, folgt $\sum_{n=1}^{\infty} Ax_n$ konvergiert in Y .

Sei $y = \sum_{n=1}^{\infty} Ax_n \Rightarrow Ax_n = \sum_{k=1}^n Ax_k \xrightarrow{Y} y$. Da A ein abgeschlossener Operator ist, folgt $(x \in \mathcal{D}(A) = X), Ax = y$
 $\Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_n\right) = \left\|A\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)\right\| = \|Ax\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} Ax_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Ax_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$
 \Rightarrow (b) erfüllt.
 Aus Satz (3.5-11) folgt, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist und damit ist auch $A : X \rightarrow Y$ stetig. \square

Bemerkung (3.5-7).

- 1) In (3.5-6) muss Y nicht unbedingt ein Banachraum sein, denn man könnte das Problem in der Vervollständigung \tilde{Y} von Y betrachten, d. h. $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \tilde{Y}$.
- 2) Statt $X = \mathcal{D}(A)$ kann man auch nur $\mathcal{D}(A)$ abgeschlossen in X voraussetzen.

Definition (3.5-8). Sei X ein normierter Raum. Das Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **halbadditiv**, wenn gilt:

$$f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_{1/2} \in X$$

Ist $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$, so heißt f **nichtnegativ**.

Beispiel (3.5-9). $A : X \rightarrow Y$ linear. Dann ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \|Ax\| \quad (x \in X)$$

nichtnegativ und halbadditiv.

Hilfssatz (3.5-10). Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ halbadditiv und nichtnegativ. Dann gilt:

- (a) $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \max\{f(x_1 - x_2), f(x_2 - x_1)\} \quad \forall x_{1/2} \in X$
- (b) Ist zusätzlich $f(0) = 0$, so ist f auf X genau dann stetig, wenn f in $x_0 = 0$ stetig ist.

Beweis. zu (a): $f(x_1) = f((x_1 - x_2) + x_2) \leq f(x_1 - x_2) + f(x_2)$
 $\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \leq f(x_1 - x_2)$. Zyklisches Vertauschen von x und y liefert:
 $f(x_2) - f(x_1) \leq f(x_2 - x_1) \Rightarrow$ Behauptung
 zu (b): Sei f in $x_0 = 0$ stetig und $x_n \in X$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $x_n \rightarrow x \in X$
 $\Rightarrow x_n - x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n - x) \rightarrow 0$
 $\Rightarrow |f(x_n) - f(x)| \leq \max(f(x_n - x), f(x - x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \square$

Satz (3.5-11). Sei X ein Banachraum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein nichtnegatives Funktional mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda x) = 0 \quad \forall x \in X \quad (\lambda \in \mathbb{K})$
- (b) Für jede in X konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ gelte:

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$$

Dann ist f ein halbadditives, stetiges Funktional.

Beweis. Offenbar folgt aus (b), dass f halbadditiv ist. Aus (a) folgt $f(0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda 0) = 0$.

Zeigen nun, dass f in 0 stetig ist.

Sei $r > 0$ beliebig und $\Delta(r) := \{x \in X : f(x) + f(-x) \leq r\} \Rightarrow 0 \in \Delta(r)$ und aus $x \in \Delta(r)$ folgt $-x \in \Delta(r)$, d. h. $\Delta(r)$ ist zu 0 symmetrisch. Für $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ beliebig folgt aus (a):

$$\exists n : f\left(\frac{1}{n}x\right) < \frac{\varepsilon}{2}, f\left(-\frac{1}{n}x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}x \in \Delta(\varepsilon), \text{ d. h. } f\left(\frac{1}{n}x\right) + f\left(-\frac{1}{n}x\right) \leq \varepsilon \Rightarrow x \in n\Delta(\varepsilon), \text{ da } x = n\left(\frac{1}{n}x\right) \text{ ist}$$

$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n\Delta(\varepsilon))$. Da X als Banachraum eine Menge 2. Kategorie ist, können nicht alle Mengen $(n\Delta(\varepsilon))$ nirgends dicht sein, d. h. $\exists m \in \mathbb{N} : m\Delta(\varepsilon)$ ist nicht nirgends dicht, d. h. $\text{int}(m\Delta(\varepsilon)) \neq \emptyset$. Nun ist $\text{int}(m\Delta(\varepsilon)) = m \text{int}(\Delta(\varepsilon))$ (Nachrechnen!) $\Rightarrow \text{int}(\Delta(\varepsilon)) \neq \emptyset$

Nachrechnung: Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$ (X normierter Raum) und für $a \in \mathbb{K}$ setzen wir $\alpha A := \{\alpha a : a \in A\} \Rightarrow$ aus $A \subseteq B$ folgt $\alpha A \subseteq \alpha B$, $\frac{1}{\alpha}(\alpha A) = A$ ($\alpha \neq 0$)

Dann gilt:

$$1) \overline{\alpha A} = \alpha \overline{A}$$

$$2) \text{int}(\alpha A) = \alpha \text{int}(A)$$

$$3) \text{int}(\overline{\alpha A}) = \alpha \text{int}(\overline{A})$$

$\Rightarrow \exists x'_0 \in \overline{\Delta(\varepsilon)}, r'(\varepsilon) > 0 : K(x'_0, r'(\varepsilon)) \subset \overline{\Delta(\varepsilon)}$. Da $\Delta(\varepsilon)$ dicht in $\overline{\Delta(\varepsilon)}$ liegt, $\exists x_0 \in \Delta(\varepsilon), r(\varepsilon) > 0$, sodass $K(x_0, r(\varepsilon)) \subset \overline{\Delta(\varepsilon)}$ und $r(\varepsilon) \leq \varepsilon$ ist.

Zeigen: $K := K(0, r(\varepsilon)) \subset \overline{\Delta(2\varepsilon)}$.

Sei $x \in K \Rightarrow x + x_0 \in K(x_0, r(\varepsilon)) \subseteq \overline{\Delta(\varepsilon)} \Rightarrow$ in jeder Umgebung von $x + x_0$ existiert ein Punkt $x' + x_0 \in \Delta(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x') + f(-x') &= f(x' + x_0 - x_0) + f(-x' - x_0 + x_0) \\ &\leq f(x' + x_0) + f(-x_0) + f(-x' - x_0) + f(x_0) \\ &\leq 2\varepsilon \Rightarrow x' \in \Delta(2\varepsilon) \end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in \overline{\Delta(2\varepsilon)} \Rightarrow K \subseteq \overline{\Delta(2\varepsilon)}$

Zeigen nun: $\forall x \in K$ gilt: $f(x) \leq 4\varepsilon$.

Sei $A(\varepsilon) := K \cap \Delta(2\varepsilon)$. Wegen K offen und $K \subseteq \overline{\Delta(2\varepsilon)}$ folgt $\overline{A(\varepsilon)} \supseteq K$ (d. h. $A(\varepsilon)$ liegt dicht in K , siehe (1.5-22)(c))

$\Rightarrow \forall x \in K \exists x_1 \in A(\varepsilon) : x - x_1 \in K\left(0, r\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, wobei $r\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ entsteht wie oben

$r(\varepsilon)$, d. h. auch $r\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \exists x_2 \in A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ mit $x - x_1 - x_2 \in K\left(0, r\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$ usw.

$\Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in A\left(\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}\right)$ und $x - \sum_{k=1}^n x_k \in K\left(0, r\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)$ mit

$$r\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \Rightarrow \left\| x - \sum_{k=1}^n x_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Für $n \rightarrow \infty : x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Aus (b) folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_n x_n\right) \leq \sum_n f(x_n) \leq \sum_n (f(x_n) + f(-x_n)) \\ &\leq \sum_n \frac{2\varepsilon}{2^{n-1}} = 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 4\varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ in 0 stetig \Rightarrow Behauptung. \square

Satz (3.5-12) (Satz von Banach über den inversen Operator). Sei X ein normierter Raum und sei Y ein Banachraum, sowie $A : X \rightarrow Y$ ein linearer, stetiger Operator (d. h. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$). Wenn $A : X \rightarrow Y$ bijektiv ist, so ist $A^{-1} : Y \rightarrow X$ linear und stetig, d. h. $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Beweis. Folgerung (3.5-3) liefert, dass A ein abgeschlossener Operator ist. Mit Folgerung (3.5-5) folgt A^{-1} ist abgeschlossener Operator. Da $Y = \text{im } A = \mathcal{D}(A^{-1})$ folgt mit Theorem (3.5-6), dass A^{-1} stetig ist. \square

Folgerung (3.5-13). Seien $(X, \|\cdot\|_i)$ ($i = 1, 2$) Banachräume. Folgt aus $\|x_n - x\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ stets $\|x_n - x\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, so sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zueinander äquivalent ((1.2-10), (2.1-15), (2.1-19)).

Beweis. Sei $I = \text{id}_X : X \rightarrow X$, $Ix = x$. Betrachten $I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$. Aus Voraussetzung folgt: I ist stetig, d. h. $\exists c_2 > 0 : \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in X$. Da I bijektiv ist folgt mit Satz (3.5-12): $I = I^{-1} : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$ ist stetig, d. h. $\exists c_1 > 0 : \|x\|_1 \leq \frac{1}{c_1} \|x\|_2 \Rightarrow c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1 \quad \forall x \in X$ \square

Aufgabe (3.5-14). Seien X, Y Banachräume und $A : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator, sowie $Y_0^* \subseteq Y^*$ eine Menge linearer, stetiger Funktionale $f : Y \rightarrow \mathbb{K}$, die die Punkte von Y trennt (d. h. $\forall y_1 \neq y_2 \exists f \in Y_0^* : f(y_1) \neq f(y_2)$). Man zeige: Sind die Abbildungen $g : X \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben durch $g(x) = f(Ax)$ stetig $\forall f \in Y_0^*$, so ist A stetig.

Bemerkung (3.5-15). Mit Hilfe des Satzes (3.5-11) kann man auch das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit für $\{A_n\}$ beweisen: Sei also X Banachraum, Y normierter Raum, $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\sup \|A_n x\| < +\infty \quad \forall x \in X$. Dann folgt: $\sup_n \|A_k\| < \infty$.

Beweis. Setzen $f(x) = \sup_n \|A_n x\| \quad (x \in X) \Rightarrow f(x) \geq 0$.

Zeigen: f erfüllt (a), (b) aus Satz (3.5-11).

zu (a): $\|A_n(\lambda x)\| = |\lambda| \|A_n x\| \leq |\lambda| \sup \|A_n x\| \Rightarrow 0 \leq f(\lambda x) \leq |\lambda| f(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$

zu (b): Sei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergent

$$\Rightarrow \left\| A_n \left(\sum_k x_k \right) \right\| = \left\| \sum_k A_n x_k \right\| \leq \sum_k \|A_n x_k\| \leq \sum_k \sup_n \|A_n x_k\|$$

$$\Rightarrow f \left(\sum_k x_k \right) \leq \sum_k f(x_k). \quad (\text{b) gezeigt.}$$

$\Rightarrow f$ stetig auf $X \Rightarrow$ für $\varepsilon = 1 \exists \delta > 0 : 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$ mit $\|x\| < \delta$

$\Rightarrow \|A_n x\| \leq 1 \quad \forall x \in X$ mit $\|x\| < \delta \quad \forall n = 1, 2, \dots$

Für beliebige $x' \in X$ mit $\|x'\| = 1$ folgt $\|A_n(\delta x')\| \leq 1 \quad \forall n$

$$\Rightarrow \|A_n x'\| \leq \frac{1}{\delta} < \infty \Rightarrow \|A_n\| < \frac{1}{\delta} \quad \forall n \quad \square$$

3.6 Faktorräume und das Open-Mapping-Theorem

Bemerkung (3.6-1). Sei X ein linearer Raum, $M \subsetneq X$ ein linearer Teilraum (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Durch

$$x \overset{M}{\sim} y \stackrel{\text{def}}{\iff} x - y \in M$$

wird bekanntlich auf X eine Äquivalenzrelation erklärt. Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind von der Gestalt

$$[x] := x + M := \{x + z : z \in M\}.$$

Da die algebraischen Operationen von X mit dieser Äquivalenzrelation verträglich sind, kann man diese auf die Faktormenge

$$X/M := \{[x] : x \in M\}$$

übertragen. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, [x], [y] \in X/M$ sei:

$$\alpha[x] + \beta[y] := [\alpha x + \beta y].$$

Damit wird X/M zu einem \mathbb{K} -Vektorraum.

Folgerung (3.6-2). Die Faktorabbildung (kanonische Abbildung) $\varphi : X \rightarrow X/M$ mit $\varphi(x) = [x]$ ($x \in M$) ist linear.

Folgerung (3.6-3). Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $M \subsetneq X$ ein linearer Teilraum. Der Ausdruck $\|[x]\|_{X/M} := \inf_{z \in M} \|x + z\|$ ist genau dann eine Norm (Faktornorm genannt) auf X/M , wenn M in X abgeschlossen ist. $(X/M, \|\cdot\|_{X/M})$ heißt Faktorraum.

Beweis. Sei $x \in X$. Offenbar ist $\|[x]\|_{X/M} = \text{dist}(x, M) := \inf_{n \in M} \|x - (-z)\|$

(Abstand x von M) (siehe (2.1-21), (1.5-12), (1.5-15))

Offensichtlich ist $\|[x]\| \geq 0 \quad \forall [x] \in X/M$

$x \in \overline{M} \iff \text{dist}(x, M) = 0 \iff \|[x]\| = 0 \iff [x] = 0 \iff x \in M \Rightarrow M$ ist abgeschlossen

weitere Eigenschaften: $[x], [y] \in X/M, z \in M$

$$\|x + y + z\| = \left\| \left(x + \frac{1}{2}z\right) + \left(y + \frac{1}{2}z\right) \right\| \leq \left\|x + \frac{1}{2}z\right\| + \left\|y + \frac{1}{2}z\right\|$$

$\downarrow \inf$

$$\|[x + y]\|$$

=

$$\|[x] + [y]\| \leq \|[x]\| + \|[y]\|$$

Sei $[x] \in X/M, z \in M, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda z \in M$

$$\|\lambda[x]\| = \|[\lambda x]\| \leq \|\lambda x + \lambda z\| = |\lambda| \|x + z\|$$

$$\Rightarrow \|\lambda[x]\| \leq |\lambda| \|[x]\| \quad \forall [x] \in X/M \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Sei $\lambda \neq 0$:

$$\|[x]\| = \left\| \frac{1}{\lambda} \lambda[x] \right\| = \left\| \frac{1}{\lambda} [\lambda x] \right\| \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|[\lambda x]\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \|[x]\| \leq \|[\lambda x]\| \Rightarrow \|[\lambda x]\| = |\lambda| \|[x]\| \quad \square$$

Folgerung (3.6-4). Sei X normierter Raum, $M \subsetneq X$ abgeschlossener Teilraum. Dann ist die kanonische Abbildung $\varphi : X \rightarrow X/M$ eine lineare, stetige und offene Abbildung. (letzteres heißt: Aus $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow \varphi(U)$ ist in X/M offen)

Beweis. Stetigkeit: $\|\varphi(x)\| = \|[x]\| \leq \|x\| \Rightarrow \varphi$ stetig.

Sei $U \subseteq X$ offen und $[x_0] \in \varphi(U) \Rightarrow [x_0] = \varphi(x_0) \in \varphi(U) \Rightarrow \exists u_0 \in U : [x_0] = [u_0]$.

Da U offen und $u_0 \in U \exists K := K(u_0, r) : K \subseteq U$

Zeigen: $[K] = K([u_0], r) \subseteq \varphi(U)$.

Sei $[x] \in [K]$, d. h. $\|[x] - [u_0]\|_{X/M} < r \Rightarrow \exists z \in M : \|x - u_0 + z\| < r$

$\Rightarrow x + z \in K \Rightarrow [x] = [x + z] \in \varphi(K) \subseteq \varphi(U) \Rightarrow [K] \subseteq \varphi(U)$

$\Rightarrow [x_0] = [u_0]$ ist innerer Punkt von $\varphi(U) \Rightarrow \varphi(U)$ offen \Rightarrow Behauptung. \square

Bemerkung (3.6-5). $G \subseteq X/M$ offen $\xrightarrow{\varphi \text{ stetig}}$ $\varphi^{-1}(G) \subseteq X$ offen und $\varphi^{-1}(G) \subseteq X$ offen $\xrightarrow{\varphi \text{ surjektiv, offen}}$ $G \subseteq X/M$ offen.

Beweis. Sei $G \in X/M$ mit $\varphi^{-1}(G)$ offen in X . Da φ eine offene Abbildung ist, folgt $\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(G))}_{\stackrel{\text{surj.}}{=} G}$ ist offen in X/M . \square

Satz (3.6-6). Sei X ein normierter Raum, $M \subsetneq X$ abgeschlossener Teilraum. Wenn X ein Banachraum ist, so ist X/M auch ein Banachraum.

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ in X/M absolut konvergent, d. h. $\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\| < \infty$

Eigenschaft des Infimums: $\forall n = 1, 2, \dots \exists z_n \in M : \|x_n + z_n\| < \|[x_n]\| + \frac{1}{2^n}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + z_n\| < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|[x_n]\|}_{< \infty} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{< \infty} < \infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + z_n)$ ist in X absolut konvergent.

Da X ein Banachraum ist, folgt $\exists s \in X : s = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + z_n)$

$$\Rightarrow \varphi\left(\sum_{k=1}^n (x_k + z_k)\right) = \sum_{k=1}^n \varphi(x_k + z_k) = \sum_{k=1}^n [x_k] \xrightarrow{\varphi \text{ stetig}} \varphi(s) = [s] \in X/M$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} [x_n]$ konvergiert in X/M .

Aus Satz (2.1-14)(b) folgt dann, dass X/M vollständig ist. \square

Satz (3.6-7) (Open-Mapping-Theorem). Seien X, Y Banachräume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Wenn A surjektiv ist, d. h. $\text{im } A = Y$, so ist A eine offene Abbildung. (aus $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow A(U) \subseteq Y$ offen)

Beweis. Sei $\ker A := \{x \in X : Ax = 0\}$. Da A stetig ist, ist $\ker A$ ein linearer, abgeschlossener Teilraum von X . Daraus folgt, dass $X/\ker A$ ein Banachraum ist.

Sei $\tilde{A} : X/\ker A \rightarrow Y$ gegeben durch $\tilde{A}([x]) = Ax$ ($x \in [x]$)

(wohldefiniert: $x' \in [x]$, $[x] = [x'] \Rightarrow \tilde{A}([x]) = Ax'$.)

Ist $Ax = Ax'$: $A(x - x') = 0 \Leftrightarrow x - x' \in \ker A \Leftrightarrow [x] = [x']$)

Offenbar ist \tilde{A} linear und $\text{im } \tilde{A} = \text{im } A = Y$.

\tilde{A} ist stetig. Sei $x \in X$, $z \in \ker A \Rightarrow \|Ax\| = \|A(x+z)\| \leq \|A\| \|x+z\|$

$\Rightarrow \|\tilde{A}[x]\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x+z\| \quad \forall z \in \ker A \Rightarrow \|\tilde{A}[x]\| \leq \|A\| \|[x]\|$

$\Rightarrow \|\tilde{A}\| \leq \|A\| < \infty \Rightarrow \tilde{A}$ ist stetig.

Zeigen: $\tilde{A} : X/\ker A \rightarrow Y$ ist injektiv

Betrachten $\ker \tilde{A}$. Zeigen: $\ker \tilde{A} = \{0\}$

Sei $[x] \in \ker \tilde{A}$, d. h. $\tilde{A}[x] = Ax = 0 \Rightarrow x \in \ker A \Rightarrow [x] = 0$

$\Rightarrow \tilde{A}$ injektiv $\Rightarrow \tilde{A} : X/\ker A \rightarrow Y$ ist bijektiv.

Aus Satz (3.5-11) folgt, dass $\tilde{A}^{-1} : Y \rightarrow X/\ker A$ stetig ist

$\Rightarrow \tilde{A}$ ist offene Abbildung ($G \subseteq X/\ker A$ offen $\xrightarrow{\tilde{A}^{-1}\text{stg.}}$ $\underbrace{(\tilde{A}^{-1})^{-1}(G)}_{=A(G)}$ offen in Y).

Nun ist $A = \tilde{A} \circ \varphi : X \rightarrow Y$. Da φ offene Abbildung und \tilde{A} offene Abbildung $\Rightarrow A$ offene Abbildung. \square

Folgerung (3.6-8). Sei X Banachraum, Y ein normierter Raum, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Wenn im $A \subseteq Y$ ein vollständiger Teilraum ist, so ist $A : X \rightarrow \text{im } A$ eine offene Abbildung und die Räume $X/\ker A$ und $\text{im } A$ sind linear homöomorph zueinander, d. h.

$$X/\ker A \simeq \text{im } A$$

Bemerkung (3.6-9). Seien X, Y Banachräume und $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann sind die Sätze (3.5-12) (Satz von Banach über den inversen Operator) und (3.6-7) (Open-Mapping-Theorem) gleichwertig.

Beweis. Sei $A : X \rightarrow Y$ offene Abbildung. Betrachten das vollständige Urbild des inversen Operators auf der Menge G $(A^{-1})^{-1}(G) = A(G)$. Da A eine offene Abbildung ist, folgt, dass $A(G)$ offen in Y ist. Damit ist A^{-1} ein linearer, stetiger Operator. \square

Aufgabe (3.6-10). Seien $(X, d), (Y, \rho)$ metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Bijektion. Zeigen Sie: Wenn $f : X \rightarrow Y$ stetig ist und X kompakt, so ist $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig. (Hinweis: Man zeige, dass f eine offene Abbildung ist.)

3.7 Die Fortsetzung linearer, stetiger Funktionale

Definition (3.7-1). Seien X, Y normierte Räume, $M_1, M_2 \subseteq X$ lineare Teilräume. Der Operator $A : M_2 \rightarrow Y$ heißt eine **Fortsetzung** des Operators $B : M_1 \rightarrow Y$, wenn gilt:

- 1) $M_1 \subseteq M_2$
- 2) $Ax = Bx \forall x \in M_1$

Umgekehrt heißt $B = A|_{M_1}$ die **Einschränkung** von A auf M_1 .

Satz (3.7-2) (Satz über die stetige Fortsetzung). Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, sowie $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \rightarrow Y$ ($\mathcal{D}(A_0) \subseteq X$) ein linearer, stetiger Operator. Dann existiert ein linearer, stetiger Operator $A : \overline{\mathcal{D}(A_0)} \rightarrow Y$ als eindeutige Fortsetzung von A_0 auf $\overline{\mathcal{D}(A_0)}$ mit $\|A\| = \|A_0\|$.

Beweis. Sei $x \in \overline{\mathcal{D}(A_0)} \Rightarrow \exists x_n \in \mathcal{D}(A_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$
 $\Rightarrow \|A_0 x_n - A_0 x_m\| = \|A_0(x_n - x_m)\| \leq \|A_0\| \|x_n - x_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \|A_0 x_n\|$ ist Fundamentalfolge in Y .

Da Y vollständig ist $\exists y \in Y : \|A_0 x_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Zeigen: y ist eindeutig durch x bestimmt.

Sei $x'_n \in \mathcal{D}(A_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $x'_n \rightarrow x \Rightarrow A_0 x'_n \rightarrow y'$.

Betrachten $\|A_0 x_n - A_0 x'_n\| \leq \|A_0\| \|x_n - x'_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow y = y'$.

Haben dadurch Operator $A : \overline{\mathcal{D}(A_0)} \rightarrow Y$ mit $Ax = y$ erhalten. Offenbar ist A linear (nachrechnen!) und für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt mit $x_n = x \forall n = 1, 2, \dots$

$\Rightarrow Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0 x = A_0 x \Rightarrow A$ ist Fortsetzung von A_0 auf $\overline{\mathcal{D}(A_0)}$.

Zeigen: $A : \overline{\mathcal{D}(A_0)} \rightarrow Y$ ist stetig mit $\|A\| = \|A_0\|$.

Aus $\|A_0 x_n\| \leq \|A_0\| \|x_n\|$ ($x_n \in \mathcal{D}(A_0)$) und $x_n \rightarrow x \in \overline{\mathcal{D}(A_0)}$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A_0\| \|x\| \quad \forall x \in \overline{\mathcal{D}(A)} \Rightarrow A$ ist stetig mit $\|A\| \leq \|A_0\|$.

Andererseits gilt:

$$\|A_0\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(A_0), \|x\| \leq 1} \|A_0 x\| = \sup_{x \in \mathcal{D}(A_0), \|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup_{x \in \overline{\mathcal{D}(A_0)}, \|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|$$

\Rightarrow Behauptung □

Bemerkung (3.7-3). Können also stets annehmen, dass das Definitionsgebiet $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ eines linearen, stetigen Operators $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow Y$ in X abgeschlossen ist.

Bemerkung (3.7-4). Sei X ein linearer Raum über \mathbb{C} und $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. F ist genau dann ein \mathbb{C} -lineares Funktional auf X , wenn ein \mathbb{R} -lineares Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$F(x) = f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x) \quad \forall x \in X. \quad (*)$$

Beweis. 1) Sei $(*)$ erfüllt. Offenbar ist F additiv. Für $x \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\begin{aligned} F((\alpha + \mathbf{i}\beta)x) &= F(\alpha x) + F(\mathbf{i}\beta x) \\ &= f(\alpha x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}\alpha x) + f(\mathbf{i}\beta x) - \mathbf{i}f(-\beta x) \\ &= \alpha f(x) - \mathbf{i}\alpha f(\mathbf{i}x) + \beta f(\mathbf{i}x) + \mathbf{i}\beta f(x) \\ &= (\alpha + \mathbf{i}\beta)[f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x)] \\ &= (\alpha + \mathbf{i}\beta)F(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow F : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein \mathbb{C} -lineares Funktional.

2) Sei F nun \mathbb{C} -linear. Setzen $f = \operatorname{Re} F$, $g = \operatorname{Im} F \Rightarrow F = f + \mathbf{i}g$. Offenbar sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} -lineare Funktionale auf X . Nun folgt aus $F(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}F(x)$ sofort:

$$f(\mathbf{i}x) + \mathbf{i}g(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}(f(x) + \mathbf{i}g(x)) = \mathbf{i}f(x) - g(x)$$

$\Rightarrow f(\mathbf{i}x) = -g(x) \Rightarrow F(x) = f(x) - \mathbf{i}f(\mathbf{i}x) \Rightarrow$ Behauptung. □

Definition (3.7-5). Sei X ein linearer Raum (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Die Funktion $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **sublineares Funktional**, wenn gilt:

$$(1) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \quad (\text{vgl. (3.5-8)})$$

$$(2) \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall x \in X \quad \forall \alpha \geq 0$$

(vgl. Beispiel (3.5-9): $p(x) = \|Ax\|$)

Hilfssatz (3.7-6). Sei X ein \mathbb{R} -linearer Raum, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf X , $M_0 \subsetneq X$ ein linearer Teilraum und $x_0 \in X \setminus M_0$. Ist $f_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional mit $f_0(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M_0$, so existiert ein \mathbb{R} -lineares Funktional $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $M = M_0 + \mathbb{R}x_0$ ist, mit

$$f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in M_0$$

und

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M \quad (*)$$

(d. h. f ist eine Fortsetzung von f_0 auf M)

Beweis. Sei also $M = \{m + tx_0 : m \in M_0, t \in \mathbb{R}\}$. Offenbar ist $M \not\subseteq M_0$ ein linearer Teilraum, wobei gilt: $\forall x \in M \exists! m \in M_0, t \in \mathbb{R} : x = m + tx_0$

(Annahme: $x = m_1 + t_1 x_0 = m_2 + t_2 x_0$.

Für $t_1 = t_2 \Rightarrow$ Behauptung. Sei nun $t_1 \neq t_2 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{t_2 - t_1}(m_1 - m_2) \in M_0 \not\subseteq$)

Sei nun $c \in \mathbb{R}$ beliebig und für $x = m + tx_0 \in \mathbb{R}$ setzen wir $f(x) = f_0(m) + tc$. Offenbar ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein \mathbb{R} -lineares Funktional mit $f|_{M_0} = f_0$.

Wollen nun c so wählen, dass (*) von f erfüllt wird! Also muss gelten:

$$f(m + tx_0) = f_0(m) + tc \leq p(m + tx_0) \Rightarrow tc \leq p(m + tx_0) - f_0(m) \quad (**)$$

Für $t > 0 \Rightarrow c \leq p\left(\frac{m}{t} + x_0\right) - f_0\left(\frac{m}{t}\right) \Rightarrow$ wir müssen c also so wählen, dass

$$c \leq \inf_{m \in M_0} (p(m + x_0) - f_0(m)) =: b$$

Sei nun $t < 0$: Multiplizieren (**) mit (-1) durch

$$\Rightarrow -tc \geq f_0(m) - p(m + tx_0) \quad | : (-t) > 0$$

$$\Rightarrow c \geq f_0\left(\frac{m}{-t}\right) - p\left(\frac{m}{-t} - x_0\right)$$

Wir müssen also c so wählen, dass

$$c \geq \sup_{m \in M_0} (f_0(m) - p(m - x_0)) =: a$$

Kann man beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen? Ja, da aus

$$f_0(m_1 + m_2) = f_0(m_1) + f_0(m_2) \leq p(m_1 + m_2) \leq p(m_1 - x_0) + p(m_2 + x_0) \text{ folgt:}$$

$$f_0(m_1) - p(m_1 - x_0) \leq p(m_2 + x_0) - f_0(m_2) \quad \forall m_{1,2} \in M_0 \Rightarrow a \leq b.$$

Wählen also $a \leq c \leq b \Rightarrow$ Behauptung □

Bemerkung (3.7-7). Ist $a < b$, so kann man unendlich viele Fortsetzungen von f_0 auf M konstruieren.

Satz (3.7-8) (Hahn-Banach, reeller Fall). Seien X, p, M_0 und f_0 wie in Hilfsatz (3.7-6). Dann existiert ein \mathbb{R} -lineares Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = f_0(x) \quad \forall x \in M_0$$

und

$$F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

(d. h. F ist eine Fortsetzung von f_0 auf ganz X)

Beweis. (mit Zornschem Lemma (A-8))

Sei \mathfrak{A} die Menge aller \mathbb{R} -linearen Funktional $g : \mathcal{D}(g) \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathcal{D}(g) \subseteq X$), die Fortsetzungen von f_0 sind und die Bedingung $g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(g)$ erfüllen. Offenbar gilt $f_0 \in \mathfrak{A}$.

Für $g, h \in \mathfrak{A}$ setzen wir

$$g \preceq h \stackrel{\text{def}}{\iff} h \text{ ist Fortsetzung von } g \text{ (dies ist eine Halbordnung auf } \mathfrak{A})$$

$\Rightarrow (\mathfrak{A}, \preceq)$ ist halbgeordnete Menge.

Zeigen, dass (\mathfrak{A}, \preceq) die Bedingungen des Zornschen Lemmas erfüllt:

Sei $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ eine beliebige Kette (oder „linear geordnet“), d. h. für $h_1, h_2 \in \mathfrak{A}_0$ gilt o. B. d. A. $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow \mathcal{D}(h_1) \subseteq \mathcal{D}(h_2)$ und $h_1(x) = h_2(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(h_1)$.

Setzen $\mathcal{D} := \bigcup_{h \in \mathfrak{A}_0} \mathcal{D}(h) \Rightarrow \forall x \in \mathcal{D} \exists h \in \mathfrak{A}_0 : x \in \mathcal{D}(h)$

\Rightarrow Wir setzen: $h_0(x) = h(x)$.

Zeigen: $h_0(x)$ ist so wohldefiniert.

Sei $h' \in \mathfrak{A}_0$ mit $x \in \mathcal{D}(h')$. Da \mathfrak{A}_0 eine Kette ist, gilt o. B. d. A. $h \preceq h'$, d. h. $\mathcal{D}(h) \subseteq \mathcal{D}(h')$ und $h(x) = h'(x) = h_0(x) \Rightarrow h_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert.

Zeigen: \mathcal{D} ist lineare Menge und $h_0 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional.

Seien $x_1, x_2 \in \mathcal{D} \Rightarrow \exists h_1, h_2 \in \mathfrak{A}_0 : x_i \in \mathcal{D}(h_i) \quad (i = 1, 2)$

O. B. d. A. sei $h_1 \preceq h_2 \Rightarrow \mathcal{D}(h_1) \subseteq \mathcal{D}(h_2) \Rightarrow x_{1/2} \in \mathcal{D}(h_2)$. Da $\mathcal{D}(h_2)$ lineare Menge ist, folgt $x_1 + x_2 \in \mathcal{D}(h_2) \subseteq \mathcal{D}$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow h_2(x_1 + x_2) &= h_2(x_1) + h_2(x_2) \\ &= + \\ h_0(x_1 + x_2) &= h_0(x_1) + h_0(x_2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_0 \text{ ist additiv.}$$

Analog zeigt man: Aus $x \in \mathcal{D}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt $\lambda x \in \mathcal{D}$ und $h_0(\lambda x) = \lambda h_0(x)$.

Sei $x \in \mathcal{D}$, $h \in \mathfrak{A}_0$ mit $x \in \mathcal{D}(h) \Rightarrow h_0(x) = h(x) \leq p(x)$

Außerdem ist $M_0 \subseteq D$ (da alle Funktionale aus \mathfrak{A} Fortsetzung von f_0 sind).

Für $x_0 \in M_0$ gilt: $h_0(x_0) = h(x_0) = f_0(x_0) \Rightarrow h_0 \in \mathfrak{A}$.

Offenbar gilt: $h \preceq h_0 \quad \forall h \in \mathfrak{A} \Rightarrow h_0$ ist obere Schranke für \mathfrak{A}_0 .

Nach dem Zornschen Lemma besitzt also \mathfrak{A} ein maximales Element $F \in \mathfrak{A}$. Annahme: $\mathcal{D}(F) \neq X \Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus \mathcal{D}(F)$. Aus Hilfssatz (3.7-6) folgt, es existiert eine Fortsetzung \tilde{F} von F auf $\mathcal{D}(\tilde{F}) := \mathcal{D}(F) + \mathbb{R}x_0$ mit $\tilde{F}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(\tilde{F}) \Rightarrow \tilde{F} \in \mathfrak{A}$ und $F \not\preceq \tilde{F} \not\preceq F \Rightarrow$ Behauptung. \square

Satz (3.7-9) (Hahn-Banach, komplexer Fall). Sei X ein normierter Raum (über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), $M \subsetneq X$ ein linearer Teilraum von X und $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ ein lineares Funktional mit

$$|f(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in M.$$

Dann existiert ein lineares Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in M$$

und

$$|F(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Beweis. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Offenbar ist $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $p(x) = \|x\|$ ein sublineares Funktional ($f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M$).

Nach Satz (3.7-8) existiert ein lineares Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ als Fortsetzung von f auf ganz X mit $F(x) \leq \|x\| \quad \forall x \in X$

$$\Rightarrow -F(x) = F(-x) \leq \| -x \| = \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow |F(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X.$$

Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $f = f_R + \mathbf{i}g_R$ ($f_R = \operatorname{Re} f$, $g_R = \operatorname{Im} f$)

Mit Bemerkung (3.7-4) gilt: $g_R(x) = -f_R(\mathbf{i}x) \quad \forall x \in M$

$$\Rightarrow |f_R(x)| \leq |f(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in M$$

Wie schon gezeigt existiert ein $F_R : X \rightarrow \mathbb{R}$, linear mit $F_R(x) = f_R(x) \quad \forall x \in M$ und $|F_R(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X$.

Idee der Bemerkung (3.7-4): Für $x \in X$ sei $F(x) = F_R(x) - \mathbf{i}F_R(\mathbf{i}x) \Rightarrow F : X \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein \mathbb{C} -lineares Funktional.

Für $x \in M$ gilt auch $\mathbf{i}x \in M \Rightarrow F(x) = f_R(x) - \mathbf{i}f_R(\mathbf{i}x) = f(x) \Rightarrow F$ ist Fortsetzung von f .

Sei $x \in X$ und $\varphi = \arg F(x)$ ($F(x) \neq 0$)

$$\Rightarrow \mathbb{R} \ni |F(x)| = e^{-\mathbf{i}\varphi} F(x) = F(e^{-\mathbf{i}\varphi} x) = F_R(\cdot) - \underbrace{\mathbf{i}F_R(\cdot)}_{=0}$$

$$\Rightarrow |F(x)| = F_R(e^{-\mathbf{i}\varphi} x) \leq \|e^{-\mathbf{i}\varphi} x\| = |e^{-\mathbf{i}\varphi}| \|x\| = \|x\| \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \square$$

Folgerung (3.7-10) (Fortsetzung unter Erhalt der Norm). Sei X ein normierter Raum, X_0 ein linearer Teilraum von X . Ist $f_0 \in X_0^*$, so existiert ein $f \in X^*$ mit

$$f_0(x) = f(x) \quad \forall x \in X_0$$

und

$$\|f_0\|_{X_0^*} = \|f\|_{X^*}.$$

Beweis. Wenn $\|f_0\|_{X_0^*} = 0$ (d. h. $f_0 = 0$) $\Rightarrow f = 0 \Rightarrow$ Behauptung

Sei nun $\|f_0\|_{X_0^*} =: a > 0$.

Für $x \in X$ sei $\|\mathbf{x}\| := \|x\|$. Offenbar ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf X .

$$\Rightarrow |f_0(x)| \leq \|f_0\|_{X_0^*} \|x\| = \|x\| \quad \forall x \in X_0$$

Satz (3.7-8) liefert, es existiert ein lineares Funktional $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ mit

$$f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in X_0 \text{ und } |f(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq a \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow f \in X^* \text{ und } \|f\|_{X^*} \leq a \|f_0\|_{X_0^*}.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \|f\|_{X^*} &= \sup\{|f(x)| : x \in X \text{ mit } \|x\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{|f(x)| : x \in X_0, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|f_0(x)| : x \in X_0, \|x\| \leq 1\} \\ &= \|f_0\|_{X_0^*} \end{aligned}$$

□

Aufgabe (3.7-11). Sei H ein Hilbertraum, $\{0\} \neq H_0 \subseteq H$ ein abgeschlossener Teilraum und $f_0 : H_0 \rightarrow \mathbb{K}$ ein lineares, stetiges Funktional. Zeigen Sie (ohne Benutzung von Folgerung (3.7-10)), dass sich f_0 unter Erhalt der Norm eindeutig durch ein $f \in H^*$ auf ganz H fortsetzen lässt.

Aufgabe (3.7-12). Sei

$$X = \{x = \{\xi_1, \xi_2\} : \xi_i \in \mathbb{R} \ (i = 1, 2)\}$$

mit

$$\|x\|_1 := |\xi_1| + |\xi_2|$$

und

$$X_0 = \{x \in X : \xi_2 = 0\},$$

sowie $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_0(\{\xi_1, 0\}) = \xi_1.$$

Offenbar ist f_0 linear und stetig.

- (1) Berechnen Sie $\|f_0\|$.
- (2) Zeigen Sie, dass unendlich viele Fortsetzungen von f_0 unter Erhalt der Norm auf ganz X existieren.

Satz (3.7-13). Sei X ein normierter Raum, $E \subseteq X$ ein linearer Teilraum und $x_0 \in X$ mit $d := \text{dist}(x_0, E) > 0$. Dann existiert ein $f \in X^*$ mit

- (1) $f(x) = 0 \quad \forall x \in E$
- (2) $\|f\| = 1$
- (3) $f(x_0) = d$

Beweis. Sei $X_0 := E + \mathbb{K}x_0$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C})

$\forall x \in X_0 \exists! x' \in E, \lambda \in \mathbb{K} : x = x' + \lambda x_0$ (eindeutig, da $x_0 \notin E$)

Setzen $f_0(x) = \lambda d$ $x = x' + \lambda x_0 \Rightarrow f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ ist ein lineares Funktional mit $f_0(x_0) = d$ und $f_0(x') = 0 \quad \forall x' \in E$

Zeigen: $\|f_0\| = 1$.

Für $\lambda \neq 0$ folgt $\|x\| = \|x' + \lambda x_0\| = |\lambda| \left\| \frac{x'}{\lambda} + x_0 \right\| \geq |\lambda| d = |f_0(x)| \quad \forall x \in X_0$

$$\Rightarrow \|f_0\| \leq 1.$$

Aus $d = \inf_{x' \in E} \|x_0 - x'\| \Rightarrow \forall n = 1, 2, \dots \exists x_n \in E : \|x_0 - x_n\| < d + \frac{1}{n}$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} d &= f_0(x_0) - \underbrace{f_0(x_n)}_{=0} = f_0(x_0 - x_n) \leq \|f_0\| \|x_0 - x_n\| \\ &< \|f_0\| \left(d + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \leq \|f_0\| d \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|f_0\| \geq 1$.

Zusammenfassend folgt $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ ist lineares Funktional mit

1) $f_0(x) = 0 \quad \forall x \in E$, 2) $\|f_0\| = 1$, 3) $f_0(x_0) = d$

Aus Folgerung (3.7-10) folgt dann $\exists f \in X^*$ mit $f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in X_0$ und $\|f\| = \|f_0\| = 1 \Rightarrow$ Behauptung. \square

Folgerung (3.7-14) (Satz über die ausreichende Anzahl von Funktionalen). Sei X normierter Raum. Dann gilt:

$$\forall x_0 \in X \setminus \{0\} \exists f \in X^* : (1) \|f\| = 1, \quad (2) f(x_0) = \|x_0\|$$

Insbesondere trennen die Funktionale $f \in X^*$ die Punkte von X .

(d. h. $\forall x_1 \neq x_2 \exists f \in X^* : f(x_1) \neq f(x_2)$)

Beweis. Setzen in Satz (3.7-13) $E = \{0\} \Rightarrow d = \text{dist}(x_0, E) = \|x_0\| \Rightarrow 1), 2)$.

Seien $x_1 \neq x_2$ (in X). Setzen $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$.

$\Rightarrow f(x_0) = f(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| > 0 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ \square

Folgerung (3.7-15). Sei X normierter Raum. Dann gilt

(a) $f(x) = 0 \quad \forall f \in X^* \Rightarrow x = 0$

(b) $f(x_1) = f(x_2) \quad \forall f \in X^* \Rightarrow x_1 = x_2$

(c) $|f(x_0)| \leq C \quad \forall f \in X^*$ mit $\|f\| = 1 \Rightarrow \|x_0\| \leq C$

(d) Für $x_0 \in X$ gilt: $\|x_0\| = \sup\{|f(x_0)| : f \in X^* \text{ mit } \|f\| \leq 1\}$

Beweis. zu d): Sei $f \in X^*$ mit $\|f\| \leq 1 \Rightarrow |f(x_0)| \leq \|f\| \|x_0\| \leq \|x_0\|$

$\Rightarrow \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |f(x_0)| \leq \|x_0\|$ ($x_0 = 0$ trivial).

Sei $x_0 \neq 0 \Rightarrow \exists f \in X^*$ mit $\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$

$\Rightarrow \|x_0\| = f(x_0) \leq \sup_{f \in X^*} |f(x_0)| \Rightarrow$ Behauptung. \square

Folgerung (3.7-16). Sei $\emptyset \neq M \subseteq X$ (X normierter Raum). Dann gilt

$$x_0 \in \overline{\text{span}(M)} \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \quad \forall f \in X^* \text{ mit } f(M) = \{0\}.$$

Satz (3.7-17) (Existenz eines biorthogonalen Systems). Sei X ein normierter Raum. Zu jedem System $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ linear unabhängiger Elemente existiert ein System $\{f_1, \dots, f_n\} \subset X^*$ linear unabhängiger Funktionale mit

$$f_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}$$

($\{f_i\}_{i=1}^n$ heißt das zum System $\{x_i\}_{i=1}^n$ biorthogonale System)

Beweis. Sei $X_i = \text{span}\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} \subset X$ (i fixiert)
 $\Rightarrow X_i$ ist linearer, abgeschlossener Teilraum mit $x_i \notin X_i$ (da linear unabhängig)
 $\Rightarrow d_i = \text{dist}(x_i, X_i) > 0 \xrightarrow{\text{Satz (3.7-13)}} \exists \tilde{f}_i \in X^* : \tilde{f}_i(x) = 0 \quad \forall x \in X_i, \tilde{f}_i(x_i) = d_i$
 $\Rightarrow f_i := \frac{1}{d_i} \tilde{f}_i$ erfüllt obige Bedingung ($i = 1, 2, \dots, n$).

$\{f_i\}$ linear unabhängig: $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0 \Rightarrow 0 = 0(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) \quad \forall x \in X$.

Für $j \in \{1, \dots, n\}$ fixiert folgt $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = \lambda_j f_j(x_j) = \lambda_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$
 \Rightarrow System ist linear unabhängig. \square

Satz (3.7-18). Sei X ein normierter Raum und $\emptyset \neq S \subseteq X$ eine beliebige Teilmenge. Das System S ist genau dann biorthogonalisierbar, wenn S minimal ist (d. h. $\forall x' \in S$ gilt: $x' \notin \text{span}(S \setminus \{x'\})$)

Bemerkung (3.7-19). Es gilt:

- (a) S minimal $\Leftrightarrow S$ biorthogonal $\Leftrightarrow S$ linear unabhängig
- (b) S endlich: (S minimal $\Leftrightarrow S$ linear unabhängig)

Satz (3.7-20) (Umkehrung zu Satz (3.2-4)). Seien X, Y normierter Räume. Ist der Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ in der Operatornorm vollständig (d. h. ein Banachraum), so ist Y auch ein Banachraum.

Beweis. Sei $y_n \in Y$ ($n = 1, 2, \dots$), sodass $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ eine Fundamentalfolge ist, und $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$.

Aus Folgerung (3.7-14) ergibt sich $\exists f \in X^* : \|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\| = 1$

Betrachten $A_n : X \rightarrow Y$ gegeben durch $A_n x = f(x)y_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

$\Rightarrow A_n$ linear und $\|A_n x\| = |f(x)| \|y_n\| \leq (\|f\| \|y_n\|) \|x\|$

$\Rightarrow A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|(A_n - A_m)x\| &= \|f(x)y_n - f(x)y_m\| \\ &= |f(x)| \|y_n - y_m\| \\ &\leq \|f\| \|y_n - y_m\| \|x\| \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|A_n - A_m\| \leq \|f\| \|y_n - y_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ (da $\{y_n\}$ Fundamentalfolge)

$\Rightarrow \{A_n\}$ ist Fundamentalfolge in $\mathcal{L}(X, Y)$

Da $\mathcal{L}(X, Y)$ vollständig ist folgt, $\exists A \in \mathcal{L}(X, Y) : \|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow \|A_n x_0 - A x_0\| = \|y_n - A x_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, d. h. $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A x_0 \Rightarrow$ Behauptung. \square

Aufgabe (3.7-21). Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $X_0 \subseteq X$ ein linearer Teilraum von X und $f_n \in X_0^*, y_n \in Y$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\| \|y_n\| < \infty$.

Zeigen Sie:

(a) $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)y_n$ konvergiert in $Y \quad \forall x \in X_0$

(b) Der Operator $A_0 : X_0 \rightarrow Y$ mit $A_0 x = \sum_{n=1}^\infty f_n(x)y_n$ ($x \in X_0$) ist ein linearer, stetiger Operator.

(c) Es existiert eine lineare, stetige Fortsetzung $A : X \rightarrow Y$ von A_0 auf ganz X .

3.8 Der biduale Raum und der adjungierte Operator

Bemerkung (3.8-1). Sei X normierter Raum. Aus Abschnitt (3.2) folgt, dass $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ mit der Norm

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

ein Banachraum ist. Mithin kann man den Raum $(X^*)^* =: X^{**}$ der linearen, stetigen Funktionale $F : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ auf X^* betrachten. X^{**} heißt der zu X **biduale Raum**. Für $F \in X^{**}$ ist

$$\|F\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |F(f)|.$$

Welche Beziehung besteht zwischen X und X^{**} ?

Bemerkung (3.8-2). Sei X normierter Raum, $x \in X$ fixiertes Element. Dann ist $F_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben durch

$$F_x(f) := f(x) \quad \forall f \in X^*$$

ein lineares, stetiges Funktional aus X^{**} .

Beweis. $F_x(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$
 $= \lambda_1 F_x(f_1) + \lambda_2 F_x(f_2) \Rightarrow$ Linearität

Stetigkeit: $|F_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad \forall f \in X^* \Rightarrow \|F_x\| \leq \|x\| \Rightarrow$ stetig. □

Bemerkung (3.8-3). Sei

$$X_0^{**} = \{F \in X^{**} : \exists x \in X \text{ mit } F = F_x\}$$

(es ist möglich, dass $X^{**} \neq X_0^{**}$). Dann gilt:

Der Raum X ist linear isometrisch zu X_0^{**}

(d. h. X und X_0^{**} kann man identifizieren).

Beweis. Sei $J : X \rightarrow X^{**}$ mit $J(x) = F_x$

$$\Rightarrow J(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(f) = F_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(f) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$

$$= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) = \lambda_1 F_{x_1}(f) + \lambda_2 F_{x_2}(f)$$

$$\Rightarrow J(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 J(x_1) + \lambda_2 J(x_2)$$

$\Rightarrow J$ ist linearer Operator mit $\text{im } J = X_0^{**}$.

Aus Folgerung (3.7-15) ergibt sich weiter:

$$\|J(x)\| = \|F_x\| = \sup_{f \in X^*, \|f\| \leq 1} |F(f)| = \sup\{|f(x)| : f \in X^* \text{ mit } \|f\| \leq 1\} = \|x\|$$

\Rightarrow Behauptung. □

Bemerkung (3.8-4). Im Sinne dieser linearen Isometrie J können wir die Räume X und X_0^{**} identifizieren und X als Teilraum von X^{**} interpretieren.

Definition (3.8-5). Der normierte Raum X heißt **reflexiv**, wenn $X_0^{**} = X^{**}$ oder im Sinne obiger linearen Isometrie $X = X^{**}$ ist.

Satz (3.8-6) (Plessner). Entweder ist der normierte Raum X reflexiv, d. h. $X = X^{**}$ oder alle Räume $X, X^*, X^{**}, X^{***}, \dots$ sind nicht gleich.

Bemerkung (3.8-7).

- (a) Ein reflexiver Raum ist notwendig ein Banachraum.
- (b) Jeder abgeschlossene Teilraum eines reflexiven Raumes ist selbst reflexiv.

Definition (3.8-8). Seien X, Y normierte Räume, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ beliebiger Operator. Der Operator $A^* : Y^* \rightarrow X^*$ gegeben durch

$$A^*g := gA \quad (\text{d. h. } (A^*g)(x) = g(Ax) \quad \forall x \in X)$$

heißt der zu A **adjungierte Operator**.

Folgerung (3.8-9). Es gilt: $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ und $\|A^*\| = \|A\|$.

Beweis. Sei $g \in Y^*$, $A \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow gA \in X^*$ (da Komposition von linearen Abbildungen wieder linear ist).

$A^* : Y^* \rightarrow X^*$. Offenbar ist A^* linear.

$$\|A^*g\| \leq \|g\|\|A\| \quad \forall g \in Y^* \quad (3.4-2) \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\|$$

Setzen in (3.7-15) $x_0 = Ax$ ($x \in X$). Sei nun $g \in Y^*$ mit $\|g\| \leq 1$ und $x \in X$

$$\Rightarrow |g(Ax)| = |(A^*g)x| \leq \|A^*g\|\|x\| \leq \|A^*\|\|g\|\|x\| \leq \|A^*\|\|x\|.$$

Dann folgt aus der letzten Abschätzung:

$$\|Ax\| = \sup\{|g(Ax)| : g \in Y^*, \|g\| \leq 1\} \leq \|A^*\|\|x\|$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\| \quad \square$$

Aufgabe (3.8-10). Man zeige, dass gilt:

- (a) $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^* \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}; A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$
- (b) $(AB)^* = B^*A^* \quad \forall A \in \mathcal{L}(Y, Z), B \in \mathcal{L}(X, Y)$
- (c) $A \in \text{GL}(X, Y) \Leftrightarrow A^* \in \text{GL}(Y^*, X^*)$
Dabei gilt: $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Was passiert, wenn man zum Operator $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ den Operator $A^{**} := (A^*)^* \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ bildet?

Bemerkung (3.8-11). Seien $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und X reflexiv. Dann gilt:

$$A^{**} = A$$

(Ist X nicht reflexiv folgt $A = A^{**}|_{X_0^{**}}$)

3.9 Eine Beschreibung der Räume l_p^* ($1 \leq p < \infty$) und c_0^*

Bemerkung (3.9-1). Sei X ein normierter Folgenraum, der die Elemente

$$e_n = \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

enthält, sodass für jedes $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$ gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

(obige Räume erfüllen dies)

Dann gilt: $\forall f \in X^* \exists$ eine Folge $y = \{\eta_k\}$ ($\eta_k \in \mathbf{K}$), sodass

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta_k} \quad (*)$$

ist.

Beweis. Sei $f \in X^*$ und $\eta_k = \overline{f(e_k)}$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\sum \xi_k e_k\right) = \sum \xi_k f(e_k) = \sum \xi_k \overline{\eta_k}$$

\Rightarrow Behauptung. \square

Welche Bedingung muss die Folge $y = \{\eta_k\}$ erfüllen, damit (*) ein lineares, stetiges Funktional auf X ist?

Satz (3.9-2). Die Beziehung (*) definiert genau dann ein lineares, stetiges Funktional im Raum l_1 , wenn die Folge $y = \{\eta_k\} \in l_\infty$ ist. Dabei gilt: $\|f\| = \|y\|_\infty$

Beweis.

1) Sei $f : X \rightarrow \mathbf{K}$ gegeben durch (*) ein lineares, stetiges Funktional in l_1 .

$$\Rightarrow |\eta_k| = |\overline{f(e_k)}| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\|_1 = \|f\|$$

$$\Rightarrow \sup_k |\eta_k| \leq \|f\|$$

$$\Rightarrow y \in l_\infty \text{ und } \|y\|_\infty \leq \|f\|.$$

2) Sei nun $y = \{\eta_k\} \in l_\infty$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta_k} \right| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| |\overline{\eta_k}| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|y\|_\infty.$$

Da $x \in l_1$ folgt für $n \rightarrow \infty$

$$|f(x)| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 \Rightarrow f \in X^* \text{ mit } \|f\| \leq \|y\|_\infty \Rightarrow \text{Behauptung. } \square$$

Satz (3.9-3). (*) definiert genau dann ein lineares, stetiges Funktional im Raum l_p ($1 < p < \infty$), wenn $y = \{\eta_k\} \in l_q$ ist $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. Dabei ist $\|f\| = \|y\|_q$

Beweis. Notwendigkeit: Sei $f : X \rightarrow \mathbf{K}$ gegeben durch (*) ein lineares, stetiges Funktional und $\eta_k = |\eta_k| e^{i\varphi_k}$ (wobei $\varphi_k = \arg \eta_k$).

$$\text{Setzen } x_n = \left\{ \xi_k^{(n)} \right\}_{k=1}^{\infty} \text{ mit } \xi_k^{(n)} = \begin{cases} |\eta_k|^{q-1} e^{i\varphi_k} & : k \leq n \\ 0 & : k > n \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x_n) = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(n)} \overline{\eta_k} = \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q$$

Weiterhin gilt:

$$\|x_n\|_p^p = \left\{ \sum_{k=1}^n |\xi_k^{(n)}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{k=1}^n |\eta_k|^{p(q-1)} \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\| \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Damit folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|$$

$$\Rightarrow y \in l_q \text{ und } \|y\|_q \leq \|f\|$$

Hinlänglichkeit: Sei $y \in l_q$. Aus der Hölderungleichung folgt für $x \in l_p$:

$$\left| \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta_k} \right| \leq \left\{ \sum_{k=1}^n |\eta_k|^q \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow (*) \text{ definiert auf } l_p \text{ ein Funktional } f \in X^* \text{ mit } |f(x)| \leq \|y\|_q \|x\|_p$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq \|y\|_q \Rightarrow \text{Behauptung } \square$$

Satz (3.9-4). (*) ist genau dann die allgemeine Gestalt eines linearen, stetigen Funktionals f in c_0 , wenn $y = \{\eta_k\} \in l_1$. Dabei gilt: $\|f\| = \|y\|_1$

Beweis. 1) Sei $f \in c_0^*$ gegeben durch (*) und x_n wie in Satz (3.9-3) mit $q = 1$

$$\Rightarrow f(x_n) = \sum_{k=1}^n |\eta_k| \Rightarrow \sum_{k=1}^n |\eta_k| = |f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\|_\infty$$

Wegen $\|x_n\|_\infty = \sup_k |e^{i\varphi_k}| = 1$ folgt für $n \rightarrow \infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k| < \|f\| \Rightarrow y \in l_1 \text{ und } \|y\|_1 \leq \|f\|$$

2) Sei nun $y \in l_1 \Rightarrow |f(x)| = |\sum \xi_k \bar{\eta}_k| \leq \|x\|_\infty \|y\|_1$

$\Rightarrow f \in c_0^*$ und $\|f\| \leq \|y\|_1 \Rightarrow$ Behauptung □

Zusammenfassung (3.9-5). Aufgrund der Isometrien von X^* mit in den Sätzen aufgezeigten Räumen können wir diese mit X^* identifizieren, d. h. es gilt also:

$$(1) \ l_1^* = l_\infty$$

$$(2) \ l_p^* = l_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ 1 < p < \infty \right)$$

$$(3) \ c_0^* = l_1$$

Folgerung (3.9-6). Es gilt:

(a) Für $1 < p < \infty$ ist $l_p^{**} = l_p$, also ist l_p reflexiv.

(b) $c_0^{**} = l_\infty$, d. h. c_0 ist nicht reflexiv, da $c_0 \neq l_\infty$.

(Achtung: Man sollte zum Nachweis dieser Folgerung genau nachsehen, ob im Sinne der in Definition (3.8-5) genannten linearen Isometrie $l_p^{**} = l_p$ ist!)

Kapitel 4

Operatortheorie im Hilbertraum

4.1 Die Riesz- oder Hilbertadjungierte

Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ stets ein Hilbertraum und $\mathcal{L}(H)$ der Raum der linearen, stetigen Operatoren $A : H \rightarrow H$.

Bemerkung (4.1-1). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ und $y \in H$ fixiert. Dann ist $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben durch

$$f(x) = (Ax, y)$$

ein lineares, stetiges Funktional mit

$$\|f\| \leq \|A\| \|y\|.$$

Folgerung (4.1-2). Sei f wie in (4.1-1) erklärt. Dann gilt:

$$\exists! y^* \in H : f(x) = (Ax, y) = (x, y^*) \quad \forall x \in H \quad (\text{vgl. (3.1-10)})$$

(dabei gilt: $\|f\| = \|y^*\|$).

Bemerkung (4.1-3). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Offenbar wird über die Beziehung

$$(Ax, y) = (x, y^*) \quad \forall x \in H$$

jedem Element $y \in H$ eindeutig ein Element $y^* \in H$ zugeordnet.

Setzen $A^{*H}y = y^*$ und nennen A^{*H} die **Riesz-** oder **Hilbertadjungierte** von A . Offensichtlich gilt:

$$(Ax, y) = (x, A^{*H}y) \quad \forall x, y \in H.$$

In welcher Beziehung steht diese Rieszadjungierte von A zum in (3.8-8) definierten adjungierten Operator A^* von A ?

Bemerkung (4.1-4). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$, $f \in H^*$, $f := A^*g \in H^*$, sowie $R : H^* \rightarrow H$ der Operator aus (3.1-11) ($Rg = y_g$, wobei $g(x) = (x, y_g) \quad \forall x \in H$). Dann gilt: $RA^* = A^{*H}R$, d. h. folgendes Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} H^* \ni g & \xrightarrow{A^*} & f \in H^* \\ R \downarrow & & \downarrow R \\ H \ni y_g & \xrightarrow{A^{*H}} & y_f \in H \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\text{Beweis. } (x, A^{*H}Rg) &= (Ax, Rg) = (Ax, y_g) = g(Ax) \\
&= f(x) = (x, y_f) = (x, Rf) \\
&= (x, RA^*g) \quad \forall x \in H, \quad \forall g \in H^* \\
\Rightarrow (A^{*H}R)g &= (RA^*)g \quad \forall g \in H^* \quad \square
\end{aligned}$$

Vereinbarung. Da wir nun im Hilbertraum arbeiten, bezeichnen wir die Rieszadjungierte kurz mit A^* , d. h. es gilt:

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \forall x, y \in H.$$

Satz (4.1-5). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

- (a) $A^* \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|A^*\| = \|A\|$
- (b) $\exists (A^*)^* = A^{**}$. Dabei ist $A^{**} = A$.

Beweis. Additivität von A^* ist klar. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathcal{L}(H)$
 $(x, A^*(\lambda y)) = (Ax, \lambda y) = \overline{\lambda(Ax, y)} = \overline{\lambda(x, A^*y)} = (x, \lambda A^*y) \quad \forall x, y \in H$
 $\Rightarrow A^*(\lambda y) = \lambda A^*y \quad \forall y \in H$
 $\|A^*y\| = \|y^*\| = \|f\| \leq \|A\|\|y\| \Rightarrow \|A^*\| \leq \|A\| \Rightarrow A^* \in \mathcal{L}(H)$
 $\Rightarrow \exists A^{**} \in \mathcal{L}(H)$. A^{**} ist definiert durch
 $(A^*x, y) = (x, A^{**}y) \quad \forall x, y \in H$
 $(x, A^{**}y) = (A^*x, y) = (x, Ay) \Rightarrow (x, A^{**}y - Ay) = 0 \quad \forall x, y \in H$
Setzen: $x = A^{**}y - Ay \Rightarrow \|A^{**}y - Ay\|^2 = (A^{**}y - Ay, A^{**}y - Ay) = 0$
 $\Rightarrow A^{**}y = Ay \quad \forall y \in H \Rightarrow A^{**} = A$.
Ersetzen in $\|A^*\| \leq \|A\|$ A durch A^*
 $\Rightarrow \|A^{**}\| = \|A\| \leq \|A^*\| \Rightarrow \|A\| = \|A^*\| \quad \square$

Aufgabe (4.1-6). Seien $A, B \in \mathcal{L}(H)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass gilt:

- (a) $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (b) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$
- (c) $(AB)^* = B^*A^*$
- (d) $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(H) \Leftrightarrow \exists (A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Dabei gilt: $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Beispiel (4.1-7). Sei

$$H = l_2 := \{x = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty : \xi_k \in \mathbb{C} \ (k = 1, 2, \dots), \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2 < \infty\}$$

$$y = \{\eta_k\} \in l_2, \quad (x, y) := \sum_{k=1}^\infty \xi_k \overline{\eta_k}$$

$V : l_2 \rightarrow l_2$ mit $Vx = z$, wobei $\zeta_k = \xi_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$(Vx, y) = \sum_{k=1}^\infty \zeta_k \overline{\eta_k} = \sum_{k=1}^\infty \xi_{k+1} \overline{\eta_k} = \sum_{k=2}^\infty \xi_k \overline{\eta_{k-1}}$$

$$\tau_k = \begin{cases} 0 & : \ k = 1 \\ \eta_{k-1} & : \ k \geq 2 \end{cases} \Rightarrow Wy = \{\tau_k\}_{k=1}^\infty$$

$$\Rightarrow (Vx, y) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \overline{\tau_k} = (x, Wy), \text{ andererseits } (Vx, y) = (x, V^*y) \Rightarrow V^* = W$$

Da in l_2 ein Orthonormalsystem existiert und dieses System vollständig ist, kann jeder Operator $l_2 \rightarrow l_2$ als Matrix dargestellt werden.

4.2 Schwache Konvergenz im Hilbertraum

Definition (4.2-1). Sei $x_n \in H$ ($n = 1, 2, \dots$). Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ heißt **schwach konvergent** (in H), wenn ein Element $x_0 \in H$ existiert mit

$$(x_n, y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{K}} (x_0, y) \quad \forall y \in H$$

x_0 heißt **schwacher Grenzwert** von $\{x_n\}$ (Symbol: $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0$)

Beispiel (4.2-2). Sei $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ein Orthonormalsystem (d. h. $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$), $x \in H$ und setzen $c_n = (x, e_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) (n -te Fourier-Koeffizienten von x).

Es gilt: $\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 < \infty \Rightarrow c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, d. h. $(x, e_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow e_n \rightarrow 0$ aber $e_n \not\rightarrow 0$, da $\|e_n\| = 1$.

Folgerung (4.2-3). Sei $x_n \in H$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_0 \in H_0$. Aus $x_n \xrightarrow{H} x_0$, d. h. $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ folgt stets $x_n \rightarrow x_0$.

Beweis. $|(x_n, y) - (x_0, y)| = |(x_n - x_0, y)| \leq \|x_n - x_0\| \|y\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ □

Satz (4.2-4). Sei $x_n, x_0 \in H$ ($n = 1, 2, \dots$). Dann gilt:

$$x_n \rightarrow x_0, \text{ d. h. } \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \text{(a) } x_n \rightarrow x_0, \text{ (b) } \|x_n\| \xrightarrow{\mathbb{R}} \|x_0\|.$$

Beweis. 1) Aus $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow$ (a), (b)

2) Seien (a), (b) erfüllt. Betrachten

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\|^2 &= (x_n - x_0, x_n - x_0) \\ &= \|x_n\|^2 - (x_n, x_0) - (x_0, x_n) + \|x_0\|^2 \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad \|x_0\|^2 - (x_0, x_0) - (x_0, x_0) + \|x_0\|^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x_n - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow$ Behauptung. □

Folgerung (4.2-5). Der schwache Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

Satz (4.2-6). Eine schwach konvergente Folge ist stets beschränkt.

Beweis. Sei $x_n, x_0 \in H$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $x_n \rightarrow x_0$

$$\Rightarrow f_n(y) = (x_n, y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (x_0, y) = f_0(y) \quad \forall y \in H.$$

\Rightarrow Die Folge $\{f_n\}$ linearer, stetiger Funktionale konvergiert punktweise auf H gegen f_0 .

Der Satz von Banach-Steinhaus (3.3-5) liefert $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Da $\|f_n\| = \|x_n\| \Rightarrow \exists c > 0 : \|x_n\| \leq c, n = 1, 2, \dots$ □

Folgerung (4.2-7). Aus $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ folgt $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$

Beweis.

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y_0) + (x_n, y_0) - (x_0, y_0)| \\ &\leq |(x_n, y_n) - (x_n, y_0)| + |(x_n, y_0) - (x_0, y_0)| \\ &= |(x_n, y_n - y_0)| + |(x_n - x_0, y_0)| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y_0\| + |(x_n - x_0, y_0)| \\ &\leq c \|y_n - y_0\| + |(x_n - x_0, y_0)| \rightarrow 0 \quad \square \end{aligned}$$

Satz (4.2-8). Der Hilbertraum H ist schwach vollständig.

Beweis. Sei $x_n \in H$ ($n = 1, 2, \dots$) und $\{x_n\}$ eine schwache Fundamentalfolge, d. h. $|(x_n, y) - (x_m, y)| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0 \quad \forall y \in H$

$\Rightarrow \forall y \in H$ ist die Zahlenfolge $\{(x_n, y)\}$ eine Fundamentalfolge in \mathbb{K} . Da \mathbb{K} vollständig ist, folgt $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = f(y) \quad \forall y \in H$

Mit Folgerung (3.3-4) ergibt sich $f \in H^* \Rightarrow \exists! x_0 \in H : f(y) = (x_0, y)$

$\Rightarrow (x_n, y) \rightarrow (x_0, y) \quad \forall y \in H \Rightarrow x_n \rightharpoonup x_0$ □

Definition (4.2-9). Die Menge $M \subseteq H$ heißt **schwach relativ kompakt**, wenn jede unendliche Folge aus M eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Satz (4.2-10). Jede beschränkte Menge $M \subseteq H$ ist schwach relativ kompakt.

Beweis. Sei $M \subseteq H$ beschränkt, d. h. $\exists c > 0 : \|x\| \leq c \quad \forall x \in M$ und $x_n \in M$ ($n = 1, 2, \dots$). Setzen $H_0 = \overline{\text{span}\{x_n\}}$. Aus Satz (2.2-13) folgt, dass ein linearer, abgeschlossener Teilraum $H_1 \subseteq H$ existiert, sodass gilt:

$$H = H_0 \oplus H_1 \quad (H_1 = H_0^\perp)$$

Betrachten $\{(x_n, x_1)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$

$$\Rightarrow |(x_n, x_1)| \leq \|x_n\| \|x_1\| \leq c \cdot c = c^2 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow \{(x_n, x_1)\}$ beschränkt in $\mathbb{C} \Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $\{(x_{n_1, 1}, x_1)\}$, d. h. der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n_1, 1}, x_1)$ existiert.

Betrachten $\{(x_{n_1, 1}, x_2)\} \Rightarrow \exists \{x_{n_2, 2}\} \subset \{x_{n_1, 1}\}$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n_2, 2}, x_2)$ existiert. Wiederholung dieses Verfahrens liefert unendlich viele Folgen, wobei jede dieser Folgen Teilfolge der vorangegangenen ist:

$$\begin{array}{cccc} x_{1,1} & , & x_{2,1} & , & x_{3,1} & \dots \\ x_{1,2} & , & x_{2,2} & , & x_{3,2} & \dots \\ x_{1,3} & , & x_{2,3} & , & x_{3,3} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Die Diagonalfolge $\{x_{n,n}\}$ besitzt folgende Eigenschaft:

$$\text{Für } r \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n,n}, x_r) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n,n}, y_0) \quad \forall y_0 \in H_0$$

Sei nun $y \in H$ beliebig $\Rightarrow \exists y_0 \in H_0$ (wegen $H_0 = \overline{\text{span}\{x_n\}}$), $y_1 \in H_1 : y = y_0 + y_1$

$$\Rightarrow (x_{n,n}, y) = (x_{n,n}, y_0) + \underbrace{(x_{n,n}, y_1)}_{=0} = (x_{n,n}, y_0)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n,n}, y) \quad \forall y \in H$$

Weiter wie im Beweis von (4.2-8) $\Rightarrow \exists x_0 \in H : x_{n,n} \rightharpoonup x_0 \Rightarrow$ Behauptung □

Satz (4.2-11). Jeder stetige Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ ist schwach stetig.

Beweis. Zeigen: $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow Ax_n \rightharpoonup Ax_0$

Sei $y \in H$ beliebig $\Rightarrow (Ax_n, y) = (x_n, A^*y) \rightarrow (x_0, A^*y)$

$$\Rightarrow (x_0, A^*y) = (Ax_0, y) \quad \forall y \in H$$

$$\Rightarrow Ax_n \rightharpoonup Ax_0$$
 □

Folgerung (4.2-12). Seien $A \in \mathcal{L}(H)$, $x_n \rightharpoonup x_0$, $y_n \rightarrow y_0$. Dann gilt:

(a) $(Ax_n, y_n) \rightarrow (Ax_0, y_0)$

(b) $(x_n, Ay_n) \rightarrow (x_0, Ay_0)$

4.3 Kompakte oder vollstetige Operatoren in Hilberträumen

Definition (4.3-1). Sei $A : H \rightarrow H$ ein linearer Operator. Der Operator A heißt **kompakter** oder **vollstetiger Operator**, wenn er jede beschränkte Menge aus H in eine relativ kompakte Menge in H überführt.

Beispiel (4.3-2). Sei $K : H \rightarrow H$ ein linearer Operator mit $\dim \operatorname{im} K < \infty$. (K heißt endlichdimensionaler Operator)

$\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n \in \operatorname{im} K$ linear unabhängig ($\dim \operatorname{im} K = n$) als Basis von $\operatorname{im} K$.

$\Rightarrow \forall x \in H \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}) : Kx = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$

\Rightarrow jedem $x \in H$ wird eindeutig jeweils ein λ_j zugeordnet ($j = 1, \dots, n$) \Rightarrow damit wird auf H ein lineares, stetiges Funktional erklärt $\forall j = 1, \dots, n$.

$\Rightarrow \forall j = 1, \dots, n \exists! x_j \in H : \lambda_j = (x, x_j) \Rightarrow Kx = \sum_{i=1}^n (x, x_i) y_i$

Sei $M \subseteq H$ beschränkt, d. h. $\|x\| \leq c \forall x \in M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|Kx\| &= \left\| \sum_{i=1}^n (x, x_i) y_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |(x, x_i)| \|y_i\| \\ &\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| \right)}_{\text{const}} \|x\| \leq \text{const} \cdot c = c' \quad \forall x \in M \end{aligned}$$

$K(M) \subseteq \operatorname{im} K$ ist beschränkt. Da $\dim \operatorname{im} K < \infty$ folgt $K(M)$ ist relativ kompakt $\Rightarrow K$ ist vollstetig.

Folgerung (4.3-3). Der identische Operator $I : H \rightarrow H$ ($Ix = x$) ist genau dann vollstetig, wenn gilt: $\dim H < \infty$.

Folgerung (4.3-4). Der lineare Operator $A : H \rightarrow H$ ist genau dann vollstetig, wenn für $\bar{K} = \bar{K}(0, 1)$ (abgeschlossene Einheitskugel) gilt $A(\bar{K})$ ist relativ kompakt.

Satz (4.3-5). Jeder vollstetige Operator $A : H \rightarrow H$ ist stetig.

Beweis. Sei $\bar{K} = \bar{K}(0, 1) \Rightarrow A(\bar{K})$ ist relativ kompakt in H .

$\Rightarrow A(\bar{K})$ ist beschränkt (1.9-8).

$\Rightarrow \exists c > 0 : \|Ax\| \leq c \quad \forall x \in \bar{K}$

$\Rightarrow \|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in H$ □

Satz (4.3-6). Ein vollstetiger Operator $A : H \rightarrow H$ überführt eine schwach konvergente Folge in eine normkonvergente Folge.

Beweis. Sei $x_n \rightarrow x_0$. Annahme: $\|Ax_n - Ax_0\| \not\rightarrow 0$.

$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall k = 1, 2, \dots \exists x_{n_k} : \|Ax_{n_k} - Ax_0\| \geq \varepsilon_0$ (*)

(4.2-6) $\Rightarrow \{x_n\}$ ist beschränkt $\Rightarrow \{x_{n_k}\}$ beschränkt.

Da A vollstetig $\exists \{x_{n_{k_i}}\} \subset \{x_{n_k}\} : Ax_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{norm}} y \in H$

$\Rightarrow Ax_{n_{k_i}} \rightarrow y \Rightarrow$ da A schwach stetig: $Ax_0 = y$

$\Rightarrow \|Ax_{n_{k_i}} - Ax_0\| \rightarrow 0 \not\Leftarrow$ zu (*) □

Satz (4.3-7). Seien $T_{1/2}, T \in \mathcal{L}(H)$ vollstetig und $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann sind

(a) $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ ($\lambda_{1/2} \in \mathbb{K}$) und

(b) TA, AT

vollstetig.

Beweis. (b) TA ist trivial

AT : Sei $\overline{K} = \{x \in H : \|x\| \leq 1\} \Rightarrow T(\overline{K})$ relativ kompakt. Da A stetig ist, folgt $A(T(\overline{K}))$ ist relativ kompakt, d. h. $(AT)(\overline{K})$ relativ kompakt $\Rightarrow AT$ vollstetig. \square

Satz (4.3-8). Seien $A_n \in \mathcal{L}(H)$ vollstetig und $A \in \mathcal{L}(H)$. Wenn $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, so ist auch A vollstetig.

Beweis. $\overline{K} = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. Zeigen: $A(\overline{K})$ ist relativ kompakt. Konstruieren zu jedem $\varepsilon > 0$ für $A(\overline{K})$ ein relativ kompaktes ε -Netz. Setzen $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $\|A_n - A\| \rightarrow 0 \Rightarrow \exists n_o : \|A_{n_o} - A\| < \varepsilon$. Da A_{n_o} vollstetig ist, folgt $A_{n_o}(\overline{K}) =: N_\varepsilon$ ist relativ kompakt. Nun gilt: $\|A_{n_o}x - Ax\| = \|(A_{n_o} - A)x\| \leq \|A_{n_o} - A\| \|x\| \stackrel{\leq 1}{<} \varepsilon$

$\Rightarrow N_\varepsilon$ ist relativ kompaktes ε -Netz für $A(\overline{K})$

$\Rightarrow A(\overline{K})$ ist relativ kompakt. \square

Notiz (4.3-9). $\mathcal{L}(H)$ ist abgeschlossenes (4.3-8), zweiseitiges Ideal (4.3-7).

Bemerkung (4.3-10). Ist $A_n \in \mathcal{L}(H)$ vollstetig und $A_n x \rightarrow Ax \forall x \in H$, so folgt i. a. nicht, dass A vollstetig ist.

Beispiel: Sei $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ vollständiges Orthonormalsystem in H . Setzen $P_n : H \rightarrow H$ mit $P_n x = \sum_{k=1}^n c_k e_k$, wobei $c_k = (x, e_k)$.

(2.2.1) $P_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x = Ix$. Wenn $\dim H = \infty \Rightarrow I$ ist nicht vollstetig, aber die P_n sind vollstetig, weil sie endlich-dimensional sind.

Aufgabe (4.3-11). Sei H ein Hilbertraum, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ein Orthonormalsystem in H und $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ mit $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Zeigen Sie:

(a) $\sigma := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n (x, e_n) e_n$ konvergiert in $H \forall x \in H$

(b) $T : H \rightarrow H$ mit $T(x) = \sigma$ ist ein linearer, stetiger Operator in H

(c) T ist vollstetig.

Satz (4.3-12). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann sind äquivalent

(a) A ist vollstetig

(b) $x_n \rightharpoonup x_0, y_n \rightharpoonup y_0 \Rightarrow (Ax_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (Ax_0, y_0)$ (vergleiche dazu (4.2-12)(a)).

(c) $x_n \rightharpoonup x_0 \Rightarrow Ax_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Norm}} Ax_0$.

Beweis. (b) \Rightarrow (c) Sei $x_n \rightharpoonup x_0, y_n = Ax_n - Ax_0$. Da A auch schwach stetig $\Rightarrow y_n \rightharpoonup 0$

Betrachten $\|y_n\|^2 = (Ax_n - Ax_0, y_n) = (Ax_n, y_n) - (Ax_0, y_n) \rightarrow (Ax_0, 0) - 0 = 0$
 $\Rightarrow y_n \rightarrow 0$

(c) \Rightarrow (b) $x_n \rightharpoonup x_0, y_n \rightharpoonup y_0 \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax_0 \Rightarrow (Ax_n, y_n) \rightarrow (Ax_0, y_0)$

(a) \Rightarrow (c) Satz (4.3-6)

(c) \Rightarrow (a) $\overline{K} = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$. Aus Satz (4.3-10) folgt:

\overline{K} ist schwach relativ kompakt.

Zeigen: $A(\overline{K})$ relativ kompakt. Sei $\{y_n\} \subset A(\overline{K})$

$\Rightarrow \exists x_n \in \overline{K} : y_n = Ax_n$. Da \overline{K} schwach relativ kompakt

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} : x_{n_k} \rightharpoonup x_0$

$\Rightarrow Ax_{n_k} \xrightarrow{\text{norm}} Ax_0$, d. h. $y_{n_k} \rightarrow Ax_0 \Rightarrow A(\overline{K})$ relativ kompakt $\Rightarrow A$ vollstetig. \square

Satz (4.3-13). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt: Wenn A^*A vollstetig ist, so ist auch A vollstetig.

Beweis. Sei $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow A^*Ax_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A^*Ax_0$
 $\Rightarrow \|Ax_n - Ax_0\|^2 = (Ax_n - Ax_0, A(x_n - x_0))$
 $= (A^*Ax_n - A^*Ax_0, x_n - x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (4.2-7)
 $\Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax_0 \Rightarrow A$ ist vollstetig □

Folgerung (4.3-14). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt: Mit A ist auch A^* vollstetig. (d. h. A vollstetig $\Leftrightarrow A^*$ vollstetig ($A^{**} = A$))

Beweis. Sei A vollstetig $\Rightarrow AA^*$ vollstetig. Betrachten $(A^*)^*A^* = A^{**}A^* = AA^*$
 $B = A^* \Rightarrow B^*B$ ist vollstetig $\Rightarrow A^*$ vollstetig □

4.4 Normal auflösbare Operatoren

Definition (4.4-1). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. A heißt **normal auflösbar**, wenn gilt:
Die Gleichung $Ax = y$ ($x, y \in H$) ist genau dann lösbar, wenn

$$(y, z) = 0 \quad \forall z \in (\text{im } A)^\perp.$$

$(\text{im } A)^\perp$ heißt **Defektraum** von A .

Hilfssatz (4.4-2). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

$$(\text{im } A)^\perp = \ker A^*.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} z \in (\text{im } A)^\perp &\Leftrightarrow (z, y) = 0 \quad \forall y \in \text{im } A \\ &\Leftrightarrow (z, Ax) = 0 \quad \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow (A^*z, x) = 0 \quad \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow A^*z = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \ker A^* \end{aligned} \quad \square$$

Hilfssatz (4.4-3). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

$$(a) \quad H = \overline{\text{im } A} \oplus \ker A^*$$

$$(b) \quad H = \overline{\text{im } A^*} \oplus \ker A$$

Beweis. (a) Aufgabe (2.2-15): $(E^\perp)^\perp = \overline{\text{span}(E)}$; $E \subseteq H$
 $\Rightarrow (\ker A^*)^\perp = ((\text{im } A)^\perp)^\perp = \overline{\text{span}(\text{im } A)} = \overline{\text{im } A}$ (da $\text{im } A$ lineare Menge)
 \Rightarrow Behauptung □

Folgerung (4.4-4). $A \in \mathcal{L}(H)$ ist genau dann normal auflösbar, wenn

$$\overline{\text{im } A} = \text{im } A$$

(d. h. $\text{im } A$ ist abgeschlossen).

Beweis. 1) Sei $\overline{\text{im } A} = \text{im } A \Rightarrow H = \text{im } A \oplus \ker A^*$
 \Rightarrow Gleichung $Ax = y$ lösbar $\Leftrightarrow y \in \text{im } A$
 $\Leftrightarrow (y, z) = 0 \quad \forall z \in \ker A^* = (\text{im } A)^\perp \Rightarrow A$ normal auflösbar
2) Sei A normal auflösbar, d. h. $y \in \text{im } A \Leftrightarrow (y, z) = 0 \quad \forall z \in (\text{im } A)^\perp = \ker A^*$
 $\Leftrightarrow y \in (\ker A^*)^\perp \Leftrightarrow y \in \overline{\text{im } A} \Rightarrow \overline{\text{im } A} = \text{im } A$ □

Satz (4.4-5). Mit $A \in \mathcal{L}(H)$ ist auch A^* normal auflösbar.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal auflösbar, d. h. $\overline{\text{im } A} = \text{im } A =: H_1$ und $y_n \in \text{im } A^*$ ($n = 1, 2, \dots$) mit $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0 \in H \Rightarrow y_n \rightarrow y_0$ (+)
 $y_n \in \text{im } A^* \Rightarrow \exists x_n \in H : y_n = A^*x_n$. Setzen $f_n(Ax) = (Ax, x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$)
 $\Rightarrow f_n \in H^*$, wobei gilt:
 $f_n(Ax) = (Ax, x_n) = (x, A^*x_n) = (x, y_n) \rightarrow (x, y_0) \forall x \in H$
 $\Rightarrow f_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(y) \forall y \in H_1$
 Da $f_n \in H_1^* \Rightarrow f \in H_1^*$. Da H_1 abgeschlossen, folgt H_1 ist vollständig
 $\Rightarrow H_1$ ist Hilbertraum
 $\Rightarrow \exists z \in H_1 : f(y) = (y, z) \forall y \in H_1$
 Sei $x \in H$ beliebig. Betrachten
 $(x, A^*x_n - A^*z) = (x, A^*(x_n - z))$
 $= (Ax, x_n - z)$
 $= (Ax, x_n) - (Ax, z)$
 $= f_n(Ax) - f(Ax) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \forall x \in H$
 $\Rightarrow y_n = A^*x_n \rightarrow A^*z$. Aus (+) und eindeutigen schwachen Grenzwert folgt:
 $A^*z = y_0 \Rightarrow y_0 \in \text{im } A^*$
 $\Rightarrow \overline{\text{im } A^*} = \text{im } A^* \Rightarrow A^*$ normal auflösbar. □

4.5 Noether'sche Operatoren

Bezeichnung (4.5-1). Sie $A \in \mathcal{L}(H)$. Der Faktorraum

$$H/\overline{\text{im } A} =: \text{coker } A$$

heißt der **Kokern** von A und die Dimensionen

$$\alpha(A) := \dim \ker A$$

bzw.

$$\beta(A) := \dim \text{coker } A$$

heißen **Nullzahl** bzw. **Defektzahl** von A .

$$(\beta(A) < \infty \Rightarrow \overline{\text{im } A} = \text{im } A \rightarrow \text{Teil B})$$

Lemma (4.5-2). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann sind $\text{coker } A$ und $\ker A^*$ linear homöomorph zueinander.

Beweis. Es gilt: $H = \overline{\text{im } A} \oplus \ker A^*$. Sei $P : H \rightarrow H$ der Orthoprojektor von H auf $\ker A^* \Rightarrow \text{im } P = \ker A^*$ und $\ker P = \overline{\text{im } A}$.

P ist offensichtlich linear und stetig, d. h. $P \in \mathcal{L}(H)$.

Wie im Beweis vom Open-Mapping-Theorem sei

$$\tilde{P} : \text{coker } A \rightarrow \ker A^* \text{ mit } \tilde{P}([x]) = Px$$

$\Rightarrow \tilde{P}$ ist bijektiv und stetig.

Da $\ker A^*$ abgeschlossen und damit ein Banachraum ist, folgt \tilde{P}^{-1} ist linear und stetig \Rightarrow Behauptung □

Folgerung (4.5-3). Es gilt: $\beta(A) = \alpha(A^*)$.

Definition (4.5-4). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ normal auflösbar.

(a) A heißt **Noether'scher Operator** oder **Φ -Operator**, wenn gilt:

$$\alpha(A) < \infty \text{ und } \beta(A) < \infty$$

(b) A heißt **Φ_+ -Operator**, wenn gilt:

$$\alpha(A) < \infty$$

(b') A heißt **Φ_- -Operator**, wenn gilt:

$$\beta(A) < \infty$$

$\Phi_{\pm}(H)$ bzw. $\Phi(H)$ bezeichne die entsprechenden Mengen von Operatoren.

$$(\Phi_+(H) \cap \Phi_-(H) = \Phi(H))$$

(c) Sei $A \in \Phi_{\pm}(H)$ bzw. $A \in \Phi(H)$. Die Zahl

$$\text{ind } A := \alpha(A) - \beta(A)$$

heißt der **Index** von A .

Satz (4.5-5). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

$$A \in \Phi_{\pm}(H) \Leftrightarrow A^* \in \Phi_{\mp}(H).$$

Beweis. A sei normal auflösbar

$\Rightarrow A^*$ normal auflösbar und $\beta(A^*) = \alpha(A^{**}) = \alpha(A) \Rightarrow$ Behauptung □

Folgerung (4.5-6). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. Mit A ist auch A^* ein Φ -Operator und es gilt:

$$\text{ind } A^* = -\text{ind } A.$$

Satz (4.5-7). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$. A ist genau dann ein Φ_+ -Operator, wenn eine Konstante $C > 0$ und vollstetige Operatoren $T_i \in \mathcal{L}(H)$ ($i = 1, \dots, k$) existieren, sodass gilt:

$$\|Ax\| + \sum_{i=1}^k \|T_i x\| \geq C\|x\| \quad \forall x \in H \quad (*)$$

Beweis. 1) Sei $A \in \Phi_+(H)$, $H_1 := (\ker A)^{\perp} = \overline{\text{im } A^*}$

$\Rightarrow H = \ker A \oplus H_1$. Setzen $A_1 = A|_{H_1} : H_1 \rightarrow \text{im } A$

$\Rightarrow A_1 \in \mathcal{L}(H_1, \text{im } A)$ und bijektiv

Da $\text{im } A, H_1$ abgeschlossene Teilräume von H sind, folgt $\text{im } A, H_1$ sind Banachräume.

Nach Satz (3.5-12) folgt $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\text{im } A, H_1)$

$\Rightarrow \exists c_1 > 0 : \|Ax_1\| \geq c_1\|x_1\| \quad \forall x_1 \in H_1$. Sei $P : H \rightarrow H$ der Orthoprojektor auf $\ker A \Rightarrow \text{im } P = \ker A, \ker P = H_1$

$\Rightarrow \alpha(A) = \dim \ker A = \dim \text{im } P < \infty$ (da $A \in \Phi_+(H)$)

$\Rightarrow P$ endlich-dimensional $\Rightarrow P$ vollstetig Sei $x = x_1 + x_2, x_1 \in H_1, x_2 \in \ker A$.

$$\begin{aligned}
\text{Betrachten } \|Ax\| + \|Px\| &= \|Ax_1 + Ax_2\| + \|Px_1 + Px_2\| \\
&= \|Ax_1\| + \|Px_2\| \\
&\geq c_1\|x_1\| + \|x_2\| \\
&\geq \underbrace{\min\{c_1, 1\}}_{=c} (\|x_1\| + \|x_2\|) \\
&\geq c\|x\|
\end{aligned}$$

\Rightarrow Da P vollstetig \Rightarrow (*) gilt für $T_1 = P$.

2) Sei (*) erfüllt. Für $x \in \ker A \Rightarrow \sum_{i=1}^k \|T_i x\| \geq C\|x\|$ (**)

Zeigen: Jede beschränkte Menge $M \subseteq \ker A$ ist relativ kompakt.

Sei $\{x_n\} \subset M \subset \ker A$. Da T_1 vollstetig ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\{T_1 x_n^{(1)}\} \subset \{T_1 x_n\}$. Da T_2 vollstetig ist existiert eine konvergente Teilfolge $\{T_2 x_n^{(2)}\} \subset \{T_2 x_n^{(1)}\}$, usw. Da T_k vollstetig ist, existiert eine konvergente Teilfolge $\{T_k x_n^{(k)}\} \subset \{T_k x_n^{(k-1)}\}$

$\Rightarrow \{T_i x_n^{(k)}\}$ ($i = 1, \dots, k$) sind Fundamentalfolgen.

$$(**) \Rightarrow \|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}\| \leq \frac{1}{c} \sum_{i=1}^k \|T_i x_n^{(k)} - T_i x_m^{(k)}\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \{x_n^{(k)}\}$ Fundamentalfolge

Da $\ker A$ abgeschlossen und H vollständig, folgt, dass $\{x_n^{(k)}\}$ in $\ker A$ konvergiert $\Rightarrow M \subset \ker A$ ist relativ kompakt

Wegen Satz von Riesz (2.1-24) $\Rightarrow \alpha(A) = \dim \ker A < \infty$

Zeigen: $\overline{\text{im } A} = \text{im } A$. Sei wieder $H_1 = (\ker A)^\perp$, $A_1 = A|_{H_1}$, $\text{im } A_1 = \text{im } A$.

Sei nun $y_n \in \text{im } A$ mit $y_n \rightarrow y \in H$

$\Rightarrow \exists x_n \in H_1 : y_n = A_1 x_n$

Zeigen: $\{x_n\}$ ist beschränkt. Annahme: $\{x_n\}$ nicht beschränkt.

O. B. d. A. sei $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Setzen

$$x'_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \Rightarrow \|x'_n\| = 1$$

und $\|A_1 x'_n\| = \frac{1}{\|x_n\|} \|A_1 x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (da $\|A_1 x_n\| = \|y_n\| \rightarrow \|y\|$)

Da $\{x'_n\}$ beschränkt $\exists \{x'_{n_k}\} \subset \{x'_n\} : \{T_i x'_{n_k}\}$ konvergiert ($i = 1, \dots, k$).

$$\|x'_{n_k} - x'_{n_l}\| \leq \frac{1}{c} (\|A(x'_{n_k} - x'_{n_l})\| + \sum_{i=1}^k \|T_i(x'_{n_k} - x'_{n_l})\|) \xrightarrow{k, l \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \{x'_{n_k}\}$ ist Fundamentalfolge in H_1 . Da H_1 vollständig

$\Rightarrow \exists x \in H_1 : x'_{n_k} \rightarrow x'$

Andererseits:

$$\left. \begin{array}{l} Ax'_{n_k} \rightarrow Ax' \\ Ax'_{n_k} \rightarrow 0 \end{array} \right\} Ax' = 0 \Rightarrow x \in \ker A$$

Da $x' \in H_1 \Rightarrow x' = 0 \nmid$

$\Rightarrow \{x_n\}$ ist beschränkt.

Mit denselben Überlegungen erhält man eine Teilfolge $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x \in H$

$\Rightarrow Ax_{n_k} \rightarrow Ax$, $y_{n_k} \rightarrow y \Rightarrow Ax = y$

$\Rightarrow y \in \text{im } A \Rightarrow \text{im } A$ abgeschlossen \Rightarrow Behauptung □

Folgerung (4.5-8). Seien $A, T \in \mathcal{L}(H)$. Ist $A \in \Phi_\pm(H)$ bzw. $A \in \Phi(H)$ und T vollstetig, so ist $A + T$ entsprechend ein Φ_\pm - bzw. Φ -Operator.

Beweis. Sei $A \in \Phi_+(H) \Rightarrow$ es gilt (*) aus Satz (4.5-7)

Wegen $\|Ax\| = \|Ax + Tx - Tx\| \leq \|(A + T)x\| + \|Tx\|$

$\Rightarrow \|(A + T)x\| + \|Tx\| + \sum \|T_i x\| \geq \|Ax\| + \sum \|T_i x\| \geq C\|x\|$

$\Rightarrow A + T \in \Phi_+(H)$

Für $A \in \Phi_-(H)$ geht man zu $A^* + T^*$ über \Rightarrow Behauptung □

Bemerkung (4.5-9). Aus $A \in \Phi(H)$, $T \in \mathcal{L}(H)$ vollstetig folgt

$$\text{ind}(A + T) = \text{ind } A.$$

Satz (4.5-10). Sei $B \in \mathcal{L}(H)$. Dann gilt:

Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ ein Φ_{\pm} - bzw. Φ -Operator, so existiert ein $\rho > 0$, sodass für $\|B\| < \rho$ $A + B$ entsprechend ein Φ_{\pm} - bzw. Φ -Operator ist.

Beweis. Sei $A \in \Phi_+(H) \Rightarrow$ es gilt (*) aus Satz (4.5-7).

Wegen $\|Ax\| \leq \|(A + B)x\| + \|Bx\| \leq \|(A + B)x\| + \|B\|\|x\|$

$$\Rightarrow \|(A + B)x\| + \|B\|\|x\| + \sum_{i=1}^k \|T_i x\| \geq \|Ax\| + \sum \|T_i x\| \geq C\|x\|$$

$$\Rightarrow \|(A + B)x\| + \sum \|T_i x\| \geq C\|x\| - \|B\|\|x\|.$$

Wählen $\rho = \frac{C}{2}$ und $B \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|B\| < \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \|(A + B)x\| + \sum \|T_i x\| \geq \frac{C}{2}\|x\| \quad \forall x \in H \Rightarrow A + B \in \Phi_+(H).$$

Für $A \in \Phi_-(H)$ geht man zu $A^* \in \Phi_+(H)$ über \Rightarrow Behauptung □

Folgerung (4.5-11). $\Phi_{\pm}(H)$, $\Phi(H)$ sind offene Mengen in $\mathcal{L}(H)$ (im Sinne der Operatornorm).

Bemerkung (4.5-12). Für $A \in \Phi(H)$ kann man $\rho > 0$ so "klein" wählen, dass aus $\|B\| < \rho$ folgt:

$$\text{ind}(A + B) = \text{ind } A.$$

Satz (4.5-13). Wenn $T \in \mathcal{L}(H)$ vollstetig ist, so ist $A := I + T$ ein Φ -Operator mit $\text{ind } A = 0$.

Beweis. Da offenbar der identische Operator $I : H \rightarrow H$ ein Φ -Operator ist, ist A nach Folgerung (4.5-8) ein Φ -Operator. Würden wir noch die Bemerkung (4.5-9) heranziehen, so folgt aus $\text{ind } I = 0$ sofort $\text{ind}(I + T) = 0$.

Wir wollen dieses spezielle Resultat beweisen:

a) Wir zeigen: $\text{im } A = H \Leftrightarrow \ker A = \{0\}$ (d. h. $I + T$ surjektiv $\Leftrightarrow I + T$ injektiv)

Voraussetzung: Sei $\text{im } A = H$. Annahme: $\ker A \neq \{0\}$.

Wir setzen $N_k := \{x \in H : A^k x = 0\} = \ker A^k$ ($k = 1, 2, \dots$)

$$\Rightarrow \{0\} \subsetneq N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_k \subset \dots$$

Diese Inklusionen sind echt, d. h. $N_k \neq N_{k+1} \quad \forall k = 1, 2, \dots$

Nämlich: Aus $N_1 \neq \{0\} \Rightarrow \exists x_1 \neq 0 : x_1 \in N_1$.

Da $\text{im } A = H \Rightarrow \exists x_2 \in H : x_1 = Ax_2 \Rightarrow x_2 \neq 0$ und $A^2 x_2 = Ax_1 = 0 \Rightarrow x_2 \in N_2$

und $x_2 \notin N_1$, da $x_1 \neq 0 \Rightarrow N_1 \subsetneq N_2$. Per vollständiger Induktion zeigt man dann

$N_k \neq N_{k+1} \quad \forall k = 1, 2, \dots \Rightarrow N_k$ ist ein echter Teilraum des Hilbertraums N_{k+1}

(N_{k+1} abgeschlossen in $H \Rightarrow$ vollständig)

$$\Rightarrow \exists N_k^{\perp} := \{x \in N_{k+1} : (x, z) = 0 \quad \forall z \in N_k\} \neq \{0\}$$

mit $N_{k+1} = N_k \oplus N_k^{\perp}$ ($k = 1, 2, \dots$) \Rightarrow Können wählen:

$$y_1 \in N_1 \text{ mit } \|y_1\| = 1 \text{ und } y_2 \in N_2 \text{ mit } y_2 \in N_1^{\perp} \text{ und } \|y_2\| = 1 \Rightarrow y_1 \perp y_2$$

Wegen $N_3 = N_2 \oplus N_2^{\perp} \exists y_3 \in N_3$ mit $y_3 \in N_2^{\perp} \Rightarrow y_3 \perp y_2$ und da $y_1 \in N_2 \Rightarrow y_3 \perp y_1$

usw. gibt es eine Folge $\{y_k\}$ mit $\|y_k\| = 1$, $y_k \in N_k \cap N_{k-1}^{\perp}$ und $y_k \perp y_l \quad \forall k \neq l$.

Da nun $Ay_{k+1} \in N_k$, $Ay_k \in N_{k-1}$, $y_k \in N_k \Rightarrow y_{k+1} \perp z_k := Ay_{k+1} + y_k - Ay_k$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|Ty_{k+1} - Ty_k\|^2 &= \| -y_{k+1} + Ay_{k+1} + y_k - Ay_k \|^2 \\
&= \|z_k - y_{k+1}\|^2 \\
&= \|z_k\|^2 + \underbrace{\|y_{k+1}\|^2}_{=1} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{Ty_k\}$ besitzt keine konvergente Teilfolge $\not\rightarrow$ zu T vollstetig und $\{y_k\}$ beschränkt
 $\Rightarrow \ker A = \{0\}$.

Sei nun $\ker A = \{0\}$. Aus Hilfssatz (4.4-3) Teil (b) folgt

$$H = \overline{\operatorname{im} A^*} \oplus \ker A = \overline{\operatorname{im} A^*} = \operatorname{im} A^* \quad (A^* \text{ normal auflösbar}).$$

Wie eben gezeigt, ist $\ker A^* = \{0\}$. Wieder aus Hilfssatz (4.4-3) Teil (a) folgt

$$H = \overline{\operatorname{im} A} \oplus \ker A^* = \operatorname{im} A \Rightarrow \text{Behauptung a)}$$

b) Zeigen: $\alpha(A) = \beta(A)$ (d. h. $\operatorname{ind} A = 0$)

Sei $n = \alpha(A) = \dim \ker A$, $m := \beta(A) = \dim \ker A^* \Rightarrow \exists$ orthonormale Basen $e_1, \dots, e_n \in \ker A$ bzw. $f_1, \dots, f_m \in \ker A^*$. O. B. d. A. sei $n \leq m$. Wir setzen

$$Kx := \sum_{k=1}^n (x, e_k) f_k \Rightarrow K \in \mathcal{L}(H) \text{ mit } \operatorname{im} K \subseteq \ker A^* \Rightarrow K \text{ endlichdimensional}$$

$\Rightarrow K$ vollstetig $\Rightarrow T_1 := T + K$ vollstetig. Setzen $A_1 = I + T_1$.

Zeigen: $\ker A_1 = \{0\}$. Sei $A_1 x = 0 \Rightarrow Ax = -Kx$. Da $\operatorname{im} K \subseteq \ker A^*$ folgt mit Hilfssatz (4.4-3) $\operatorname{im} K \perp \operatorname{im} A \Rightarrow Ax = 0$ und $Kx = 0$. Damit folgt $x \in \ker A$ und $(x, e_k) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$, da f_1, \dots, f_n linear unabhängig folgt $x = 0$.

Nach Teil a) folgt $H = \operatorname{im} A_1$.

Sei nun $y \in \ker A^* \Rightarrow \exists x \in H : A_1 x = y \Rightarrow Ax = y - Kx$. Da $Ax \in \operatorname{im} A$ und $y - Kx \in \ker A^*$ sowie $\operatorname{im} A \perp \ker A^*$ folgt wieder: $Ax = 0$, $y - Kx = 0$

$$\Rightarrow y = \sum_{k=1}^n (x, e_k) f_k \Rightarrow m = \dim \ker A^* \leq n \Rightarrow m = n \Rightarrow \text{Behauptung} \quad \square$$

Satz (4.5-14) (Die Fredholm'schen Sätze). Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein Φ -Operator mit $\operatorname{ind} A = 0$. Dann gilt:

- (1) Die inhomogene Gleichung $Ax = y$ ist genau dann lösbar, wenn

$$(y, z) = 0 \quad \forall z \in \ker A^* \quad (*)$$

(normale Auflösbarkeit von A)

- (2) Die homogenen Gleichungen $Ax = 0$ und $A^*z = 0$ besitzen die gleiche Anzahl linear unabhängiger Lösungen ($0 = \operatorname{ind} A = \alpha(A) - \beta(A) = \alpha(A) - \alpha(A^*)$).

- (3) Fredholm'sche Alternative:

Entweder die Gleichung $Ax = y$ besitzt für jedes $y \in H$ eine Lösung (diese ist dann eindeutig) oder die Gleichung $Ax = 0$ hat nichttriviale Lösungen.

$$(H = \operatorname{im} A \oplus \ker A^* \Rightarrow H = \operatorname{im} A \Leftrightarrow \ker A^* = \{0\} \Leftrightarrow \ker A = \{0\})$$

Bemerkung (4.5-15). Man braucht die Bedingung (*) nur für die Elemente einer Basis von $\ker A^*$ nachprüfen. Das sind nur endlich viele.

4.5.1 Ergänzungen zur Φ -Theorie

Satz (4.5.1-1). Seien $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Dann folgt aus $BA \in \Phi_+(H)$ stets $A \in \Phi_+(H)$.

Beweis. Sei $BA \in \Phi_+(H)$. Nach (4.5-7), 1. Teil des Beweises, existiert ein vollstetiger Operator $T : H \rightarrow H$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \exists c' > 0 \text{ mit } \|x\| &\leq c'(\|BAx\| + \|Tx\|) \quad \forall x \in H \\ \Rightarrow \|x\| &\leq c'\|B\|\|Ax\| + c'\|Tx\| \leq \max\{c', c'\|b\|\}(\|Ax\| + \|Tx\|) \end{aligned}$$

Aus (4.5-7) folgt die Behauptung. \square

Folgerung (4.5.1-2). Seien $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Dann folgt aus $AB \in \Phi_-(H)$ stets $A \in \Phi_-(H)$.

Beweis. Aus $AB \in \Phi_-(H)$ folgt aus (4.5-5) $B^*A^* = (AB)^* \in \Phi_+(H)$
 $\Rightarrow A^* \in \Phi_+(H) \Rightarrow A \in \Phi_-(H)$ \square

Definition (4.5.1-3). Sei $K(H) := \{T \in \mathcal{L}(H) : T \text{ vollstetig}\}$. Der Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ heißt **(zweiseitig) regularisierbar** bezüglich $K(H)$, wenn Operatoren $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(H)$ und $T_1, T_2 \in K(H)$ existieren, sodass gilt:

- (1) $B_1A = I - T_1$
- (2) $AB_2 = I - T_2$

Folgerung (4.5.1-4). Seien (1), (2) aus Definition (4.5.1-3) erfüllt. Dann ist $AB_1 - I \in K(H)$, d. h. in (1), (2) kann man auch $B_1 = B_2 =: B$ setzen.

Beweis. Zeigen zunächst: $B_2 - B_1 \in K(H)$. Aus 1) und 2) folgt

$$B_1AB_2 = B_1(AB_2) = B_1(I - T_2) = B_1 - B_1T_2 \text{ bzw.}$$

$$B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = (I - T_1)B_2 = B_2 - T_1B_2$$

$\Rightarrow B_2 - B_1 = T_1B_2 - B_1T_2 \in K(H)$, wegen (4.3-7). Daraus folgt nun:

$$AB_1 - I = AB_1 - AB_2 + AB_2 - I = A(B_1 - B_2) + T_2 \in K(H) \quad \square$$

Folgerung (4.5.1-5). Wenn der Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ bezüglich $K(H)$ regularisierbar ist, so ist A ein Φ -Operator.

Beweis. Seien $B \in \mathcal{L}(H)$ und $T_{1,2} \in K(H)$ mit $BA = I - T_1$, $AB = I - T_2$.

Da $I - T_{1,2} \in \Phi(H)$, folgt $BA, AB \in \Phi(H) \Rightarrow BA \in \Phi_+(H)$ bzw. $AB \in \Phi_-(H)$

$\Rightarrow A \in \Phi_+(H)$, $\ker A \in \Phi_-(H) \Rightarrow$ Behauptung

(Natürlich ist auch B ein Φ -Operator) \square

Satz (4.5.1-6). Jeder Φ -Operator $A \in \mathcal{L}(H)$ ist bezüglich $K(H)$ regularisierbar.

Beweis. Da $\ker A$ und $\text{im } A$ in H abgeschlossene Teilräume sind, gilt:

$$H = \ker A \oplus H_1 \quad (H_1 = (\ker A)^\perp) \text{ bzw. } H = \text{im } A \oplus H_2 \quad (H_2 = (\text{im } A)^\perp).$$

Setzen $A_1 = A|_{H_1} : H_1 \rightarrow \text{im } A \Rightarrow A_1$ ist bijektiv. Nach dem Satz von Banach über den inversen Operator ist $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\text{im } A, H_1)$.

Sei nun $P_1 : H \rightarrow H$ der Orthoprojektor auf $\ker A$ und $P_2 : H \rightarrow H$ der Orthoprojektor auf H_2 .

Wegen $\dim \ker A = \alpha(A) < \infty$ bzw. $\dim H_2 = \dim H / \text{im } A = \beta(A) < \infty$ sind P_1 und P_2 endlichdimensional, also vollstetig.

Setzen nun $B := A_1^{-1}(I - P_2) \Rightarrow By \in H_1$

$$\Rightarrow AB_y = \underbrace{A_1 A_1^{-1}}_{=I_{\text{im } A}}(I - P_2)y = (I - P_2)y$$

$$\Rightarrow AB = (I - P_2)$$

Und weiter ist: $A = A(I - P_1) + AP_1 = A(I - P_1)$, da $P_1x \in \ker A \quad \forall x \in H$, also $AP_1x = 0$.

Außerdem ist $(I - P_2)A = A \Rightarrow BA = A_1^{-1}(I - P_2)A = A_1^{-1}A = I_{H_1}$

$\Rightarrow BA = BA(I - P_1) = I_{H_1}(I - P_1) = I - P_1$

Da $P_{1/2} \in K(H)$ folgt die Behauptung. \square

Folgerung (4.5.1-7). Seien $A, B \in \Phi(H)$. Dann ist auch $BA \in \Phi(H)$.

Beweis. Seien $B_1, A_1 \in \mathcal{L}(H)$ und $T_{1/2}, T'_{1/2} \in K(H)$

mit $A_1A = I - T_1, \quad AA_1 = I - T_2$

$B_1B = I - T'_1, \quad BB_1 = I - T'_2$

$\Rightarrow (BA)(A_1B_1) = B(AA_1)B_1 = B(I - T_2)B_1 = BB_1 - BT_2B_1 = I - T'_2 - \underbrace{BT_2B_1}_{\in K(H)}$
 $\underbrace{\in K(H)}$

Analog ist $(A_1B_1)(AB) = I - T$ mit $T \in K(H) \Rightarrow$ Behauptung \square

Folgerung (4.5.1-8). Seien $A, B \in \mathcal{L}(H)$. Ist $BA \in \Phi(H)$ und $A \in \Phi(H)$

(bzw. $B \in \Phi(H)$), so ist auch $B \in \Phi(H)$ (bzw. $A \in \Phi(H)$).

Beweis. Seien $A, BA \in \Phi(H) \Rightarrow \exists A' \in \mathcal{L}(H), T' \in K(H) : AA' = I - T'$ und

auch $A'A - I \in K(H) \Rightarrow A' \in \Phi(H) \Rightarrow (BA)A' \in \Phi(H)$. Nun ist $B = BAA' + BT'$.

Da $BT' \in K(H) \Rightarrow B \in \Phi(H)$. \square

Satz (4.5.1-9). Seien $A, B \in \Phi(H)$. Dann gilt:

$$\text{ind}(BA) = \text{ind } A + \text{ind } B.$$

Beweis. 1) Da $\ker A \subseteq \ker BA$ und da beide lineare, abgeschlossene Teilräume des Hilbertraumes H sind, folgt, dass ein abgeschlossener Teilraum $H' \subseteq H$ existiert mit $\ker BA = \ker A \oplus H'$.

Da $\dim \ker BA < \infty$, folgt $\dim \ker A < \infty, n_1 = \dim H' < \infty$

$\Rightarrow \alpha(BA) = \alpha(A) + n_1$ (*)

Zeigen: $H_1 := \text{im } B \cap \ker B \cong H'$ (linear isomorph)

Sei $0 \neq x' \in H' \Rightarrow x' \in \ker BA, x' \notin \ker A$

$\Rightarrow y = Ax' \neq 0$ und $Bx' = BAx' = 0 \Rightarrow y \in \ker B$ und trivialerweise $y \in \text{im } A$

$\Rightarrow y \in H_1$. Offenbar ist diese Zuordnung $\varphi : H' \rightarrow H_1$ mit $\varphi(x') = y$ linear und injektiv.

φ ist auch surjektiv: Sei $y \in H_1 \Rightarrow y \in \text{im } A, y \in \ker B \Rightarrow \exists x \in H : y = Ax$

$\Rightarrow 0 = By = BAx \Rightarrow x \in \ker BA \Rightarrow \exists x' \in H', x'' \in \ker A$ mit $x = x' + x''$

$\Rightarrow y = Ax = Ax' + \underbrace{Ax''}_{=0} = Ax' \Rightarrow \varphi(x') = y \Rightarrow \varphi$ ist bijektiv

$\Rightarrow H' \cong H_1$ und $n_1 = \dim H_1$

2) Da H_1 linearer, abgeschlossener Teilraum (im $A, \ker B$ abgeschlossen) des linearen, abgeschlossenen Teilraumes $\ker B$ ist, existiert ein linearer, abgeschlossener Teilraum $H_2 \subseteq \ker B$ mit

$$\ker B = H_1 \oplus H_2 \quad (**)$$

$$\dim H_2 = \alpha(B) - n_1 \quad (***)$$

Nun ist $\text{im } A \cap H_2 = \{0\}$ (Sei $y \in \text{im } A, y \in H_2 \Rightarrow y \in \ker B$

$\Rightarrow y \in \text{im } A \cap \ker B = H_1 \Rightarrow y = 0$)

$L := \text{im } A \dot{+} H_2$ ist als topologische direkte Summe von $\text{im } A$ und H_2 ein linearer, abgeschlossener Teilraum von H (Anhang B).

Damit existiert ein linearer, abgeschlossener Teilraum H_3 mit $H = L \oplus H_3$

$\Rightarrow H = (\text{im } A \dot{+} H_2) \oplus H_3 \Rightarrow \text{im } A \perp H_3, H_2 \perp H_3$ und $H = \text{im } A \dot{+} (H_2 \oplus H_3)$
 \Rightarrow (siehe Anhang B) $\beta(A) = \dim H / \text{im } A = \dim(H_2 \oplus H_3) = \dim H_2 + \underbrace{\dim H_3}_{=n_3}$

$\stackrel{(***)}{\Rightarrow} \beta(A) = \alpha(B) - n_1 + n_3 \Rightarrow \alpha(B) - \beta(A) = n_1 - n_3$ (4*)

3) Offenbar gilt: $B(\text{im } A) = \text{im } BA$. Wenden nun B auf die Darstellung $H = \text{im } A \dot{+} (H_2 \oplus H_3)$ an:

$\text{im } B = B(H) = B(\text{im } A \dot{+} (H_2 \oplus H_3)) = B(\text{im } A) \dot{+} B(H_2) \dot{+} B(H_3)$.

Wegen $H_2 \subseteq \ker B$ folgt $\text{im } B = \text{im } BA \dot{+} B(H_3)$

Nun gilt: $H = \text{im } B \oplus \ker B^* \Rightarrow H = \text{im } BA \dot{+} (B(H_3) \oplus \ker B^*)$

$\Rightarrow \beta(BA) = \dim H / \text{im } BA = \dim B(H_3) + \underbrace{\dim \ker B^*}_{\beta(B)}$

$\Rightarrow \beta(BA) = \beta(B) + \dim B(H_3)$

4) Zeigen: $n_3 = \dim B(H_3)$.

Sei $\tilde{B} = B|_{H_3} : H_3 \rightarrow B(H_3) = \text{im } \tilde{B} \Rightarrow \tilde{B} : H_3 \rightarrow \text{im } \tilde{B}$ ist surjektiv.

Zeigen: \tilde{B} ist injektiv.

Sei $x \in \ker \tilde{B} \stackrel{(***)}{\Rightarrow} \exists x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$ mit $x = x_1 + x_2$. Da $H_1 = \text{im } A \cap \ker B$ folgt $x_1 \in \text{im } A$.

Wegen $\text{im } A \perp H_3, H_2 \perp H_3$ (siehe oben) folgt $0 = (x, x_1) = (x_1, x_1) + \underbrace{(x_1, x_2)}_{=0}$

$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x = x_2 \in H_2 \Rightarrow x = 0$ (wegen $H_2 \perp H_3$)

$\Rightarrow \tilde{B} : H_3 \rightarrow B(H_3)$ ist bijektiv $\Rightarrow n_3 = \dim H_3 = \dim B(H_3)$

$\Rightarrow \beta(BA) = \beta(B) + n_3$ (5*)

5) Aus (*), (4*), (5*) folgt:

$$\begin{aligned} \text{ind}(BA) &= \alpha(BA) - \beta(BA) \\ &= \alpha(A) + n_1 - \beta(B) - n_3 \\ &= \alpha(A) - \beta(B) + (n_1 - n_3) \\ &= \alpha(A) - \beta(B) + \alpha(B) - \beta(A) \\ &= \alpha(A) - \beta(A) + \alpha(B) - \beta(B) \\ &= \text{ind } A + \text{ind } B \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung (4.5.1-10). Sei $A \in \Phi(H)$ und $B \in \mathcal{L}(H)$ ein Regularisator für A (vergleiche: Folgerung (4.5.1-5)). Dann gilt:

$$B \in \Phi(H) \text{ und } \text{ind } A + \text{ind } B = 0.$$

Beweis. Wie schon in Folgerung (4.5.1-5) bemerkt, ist aus Symmetriegründen auch $B \in \Phi(H)$. Sei also $BA = I - T_1$ ($T_1 \in K(H)$). Aus Satz (4.5-13) folgt

$$0 = \text{ind}(I - T_1) = \text{ind } BA = \text{ind } A + \text{ind } B \quad \square$$

Satz (4.5.1-11). Sei $A \in \Phi(H)$ und $C \in \mathcal{L}(H)$. Dann existiert eine Zahl $r > 0$, sodass aus $\|C\| < r$ folgt:

$$A + C \in \Phi(H) \text{ und } \text{ind}(A + C) = \text{ind } A.$$

Beweis. Sei $B \in \mathcal{L}(H)$ ein Regularisator für A , d. h.

$\exists T_{1/2} \in K(H)$ mit $BA = I - T_1$ und $AB = I - T_2$.

Wählen $r = \min \left\{ \frac{1}{\|B\|}, \rho \right\}$, wobei $\rho > 0$ die Zahl aus Satz (4.5-10) ist.

Damit folgt $A + C \in \Phi(H) \forall C \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|C\| < r \Rightarrow \|BC\| \leq \|B\|\|C\| < 1$.

Aus Satz (3.4-8) folgt $I + BC$ ist invertierbar, d. h. $\exists (I + BC)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

Damit folgt insbesondere $I + BC \in \Phi(H)$ mit $\text{ind}(I + BC) = 0$.

Betrachten nun:

$$B(A + C) = BA + BC = I - T_1 + BC = (I + BC) - T_1 = (I + BC)(I - T) \text{ mit}$$

$$T := (I + BC)^{-1}T_1 \in K(H)$$

$\Rightarrow I - T \in \Phi(H)$ mit $\text{ind}(I - T) = 0$. Mit Folgerung (4.5.1-10) ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{ind}(I + BC) + \text{ind}(I - T) = \text{ind}(B(A + C)) \\ &= \text{ind } B + \text{ind}(A + C) = -\text{ind } A + \text{ind}(A + C) \end{aligned} \quad \square$$

Satz (4.5.1-12). Sei $A \in \Phi(H)$ und $T \in K(H)$. Dann ist

$$A + T \in \Phi(H)$$

und

$$\text{ind}(A + T) = \text{ind } A.$$

Beweis. In (4.5-8) wurde schon $A + T \in \Phi(H)$ gezeigt.

Sei $B \in \mathcal{L}(H)$ ein Regularisator für A

$$\Rightarrow \exists T_1 \in K(H) \text{ mit } BA = I - T_1$$

$$\Rightarrow B(A + T) = I - (T_1 - BT), \text{ wobei } T_1 - BT \in K(H)$$

$$\Rightarrow 0 = \text{ind}(B(A + T)) = \text{ind } B + \text{ind}(A + T) = -\text{ind } A + \text{ind}(A + T) \quad \square$$

Bemerkung (4.5.1-13). Sei $A \in \Phi(H)$. Dann kann man die Aussagen von (4.5-8), (4.5-10) auch mit Hilfe von Satz (4.5-13) und (4.5.1-5), (4.5.1-6) beweisen. Man beachte aber, dass man die fundamentale Aussage (4.5-7) auch hier benutzt.

Anhang A

Vom Zorn'schen Lemma bis zum Wohlordnungssatz von Zermelo

Definition (A-1). Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und " \preceq " eine Relation auf X . Das Paar (X, \preceq) heißt **halbgeordnete Menge** (oder teilweise oder partiell geordnet) und " \preceq " eine Halbordnung auf X , wenn für $x, y, z \in X$ gilt:

- (01) $x \preceq x \quad \forall x \in X$ (Reflexivität)
- (02) Aus $x \preceq y, y \preceq x$ folgt stets $x = y$ (Antisymmetrie)
- (03) Aus $x \preceq y, y \preceq z$ folgt stets $x \preceq z$ (Transitivität)

Beispiel (A-2).

- (a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit gewöhnlicher Ordnungsrelation " \leq " ist halbgeordnete (sogar geordnete) Menge.
- (b) $X = \mathbb{C}$ und für $z_k := x_k + iy_k, (x_k, y_k \in \mathbb{R})$ sei $z_1 \preceq z_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$
- (c) $X = \{1, 2, \dots, 12\}$ mit $m \preceq n \stackrel{\text{def}}{\iff} m$ teilt n

Definition (A-3). Sei (X, \preceq) halbgeordnet.

- (a) Die Menge $K \subseteq X$ mit $K \neq \emptyset$ heißt eine **Kette** (oder **linear geordnet**) in (X, \preceq) , wenn für alle $x, y \in K$ stets $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ gilt.
- (b) Die Kette $M \subseteq X$ heißt **maximale Kette** (kurz: maximal), wenn für jede Kette $K \subseteq X$ mit $M \subseteq K$ gilt: $M = K$.

Beispiel (A-4).

- (a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ mit " \leq " sind Ketten.
- (b) (\mathbb{C}, \preceq) wie in (Beispiel (A-2)(b)). Eine Kette ist z.B. maximale Kette (Gerade)
- (c) (X, \preceq) wie in (Beispiel (A-2)(c)). $\{1, 2, 6\}$ ist eine Kette, aber nicht maximal, da $\{1, 2, 6\} \subsetneq \{1, 2, 6, 12\}$. Letztere ist maximal.

Definition (A-5). Sei (X, \preceq) halbgeordnet.

- (a) Das Element $s \in X$ heißt eine **obere Schranke** der Menge $A \subseteq X$, wenn gilt:
 $a \preceq s \quad \forall a \in A$
- (b) Das Element $m \in X$ heißt **maximal** in (X, \preceq) , wenn aus $x \in X$ und $m \preceq x$ folgt: $m = x$. Analog definiert man ein minimales Element.

Beispiel (A-6).

- (a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ besitzen kein maximales Element, \mathbb{N} hat ein minimales Element.
- (b) In Beispiel (A-2)(c) sind 7, 8, 9, 10, 11, 12 maximal und 1 minimal.

Axiom (A-7). Jede halbgeordnete Menge (X, \preceq) besitzt eine maximale Kette.

Daraus ergibt sich

Lemma (A-8) (Zorn'sches Lemma). Sei (X, \preceq) halbgeordnet. Besitzt jede Kette $K \subseteq X$ eine obere Schranke in X , so besitzt X ein maximales Element.

Beweis. Nach Axiom (A-7) besitzt X eine maximale Kette M und diese nach Voraussetzung des Lemmas eine obere Schranke $s \in X$.

Zeigen: s ist maximal in X .

Annahme: s ist nicht maximal, d. h. $\exists a \in X$ mit $s \not\preceq a \Rightarrow x \preceq a \quad \forall x \in M$ und $a \notin M$ (sonst wäre, da $x \preceq s \quad \forall x \in M$, auch $a \preceq s \Rightarrow a = s$)

$\Rightarrow K := M \cup \{a\}$ ist eine Kette in X mit $M \not\subseteq K \Rightarrow M$ ist keine maximale Kette $\not\Rightarrow$ Behauptung. \square

Folgerung (A-9). Sei (X, \preceq) halbgeordnet. Dann gilt: Jede Kette K_0 in (X, \preceq) liegt in einer maximalen Kette von (X, \preceq) .

Beweis. Sei $K_0 \subseteq X$ eine Kette in (X, \preceq) und \mathfrak{K} die Menge aller Ketten K in X mit $K_0 \subset K$. Offenbar ist $(\mathfrak{K}, \subseteq)$ eine halbgeordnete Menge.

Zeigen: $(\mathfrak{K}, \subseteq)$ erfüllt die Voraussetzung des Zorn'schen Lemmas.

Sei $\{K_i\}_{i \in I}$ eine Kette in $(\mathfrak{K}, \subseteq)$. Wir setzen $K = \bigcup_{i \in I} K_i$.

Offenbar ist $K_0 \subseteq K_i \subseteq K \quad \forall i \in I$ (*).

Zeigen: K ist eine Kette in X . Sei $x_1, x_2 \in K \Rightarrow \exists i_1, i_2 \in I : x_l \in K_{i_l} \quad (l = 1, 2)$.

Da $\{K_i\}_{i \in I}$ eine Kette in $\mathfrak{K} \Rightarrow$ (o.E.d.A) $K_{i_1} \subseteq K_{i_2} \Rightarrow x_1, x_2 \in K_{i_2}$. Da K_{i_2} eine Kette in X ist $\Rightarrow x_1 \preceq x_2$ oder $x_2 \preceq x_1 \Rightarrow K \in \mathfrak{K}$, wobei (*) bedeutet, dass K eine obere Schranke für $\{K_i\}_{i \in I}$ ist. Aus dem Zorn'schen Lemma folgt nun die Behauptung. \square

Bemerkung (A-10). Da in jeder halbgeordneten Menge (X, \preceq) eine einpunktige Menge eine Kette ist, besitzt (X, \preceq) eine maximale Kette, wenn für (X, \preceq) das Zorn'sche Lemma gilt, d. h. das Zorn'sche Lemma und das Axiom (A-7) sind äquivalent.

Definition (A-11). Sei $\{X_j\}_{j \in I}$ ein beliebiges System nichtleerer Mengen. Die Menge

$$\prod_{j \in I} X_j := \left\{ g : I \rightarrow \bigcup_{j \in I} X_j : g(j) \in X_j \quad \forall j \in I \right\}$$

heißt **Produktmenge** der $X_j \quad (j \in I)$. Anstelle von $g \in \prod_{j \in I} X_j$ schreiben wir $(x_j)_{j \in I}$

und $x_j = g(j)$.

Satz (A-12) (Auswahlaxiom von Zermelo). Sei $X_j \neq \emptyset \ \forall j \in I$. Dann gilt: Es existiert mindestens eine Funktion $g \in \prod X_j$, d. h. $\prod X_j \neq \emptyset$.
Setzen wir $M = \{g(j)\}_{j \in I}$, so besteht M aus den Elementen x_j , von denen je eines aus jeder Menge X_j des Systems $\{X_j\}$ ausgewählt wurde.

Beweis. Setzen

$$X := \{(f; D_f) : \emptyset \neq D_f \subseteq I, f : D_f \rightarrow \bigcup_{j \in I} X_j \text{ mit } f(j) \in X_j \ \forall j \in D_f\}.$$

Führen auf X folgende Halbordnung ein:

$$(f; D_f) \preceq (g; D_g) \stackrel{\text{def}}{\iff} D_f \subseteq D_g \text{ und } f(j) = g(j) \ \forall j \in D_f \text{ (Nachrechnen!)}$$

Zeigen: Jede Kette in (X, \preceq) besitzt in X eine obere Schranke.

Sei also $K \subseteq X$ eine Kette in X . Wir setzen $I_0 = \bigcup_{(f; D_f) \in K} D_f$ und definieren

$$f_0 : I_0 \rightarrow \bigcup_{j \in I} X_j \text{ wie folgt:}$$

$$\forall j \in I_0 \exists (f; D_f) \in K \text{ mit } j \in D_f. \text{ Es sei } f_0(j) := f(j).$$

Diese Definition ist korrekt, denn sein $(f'; D_{f'}) \in K$ und $j \in D_{f'}$. Da K eine Kette ist, gilt o.E.d.A. $(f; D_f) \preceq (f'; D_{f'})$, d. h. $D_f \subseteq D_{f'}$ und $f(j) = f'(j) =: f_0(j)$, woraus die Korrektheit folgt.

Offenbar ist $D_{f_0} = I_0 \supseteq D_f$ und $f_0(j) = f(j) \ \forall j \in D_f$ mit $f_0(j) \in X_j \ \forall j \in I_0$
 $\Rightarrow (f_0; D_{f_0}) \in X$ und $(f; D_f) \preceq (f_0; D_{f_0}) \ \forall (f; D_f) \in K \Rightarrow K$ besitzt in X eine obere Schranke. $\stackrel{\text{Zorn}}{\implies}$ In X existiert ein maximales Element $(g; D_g)$.

Zeigen: $D_g = I$.

Annahme: $D_g \neq I \Rightarrow \exists j' \in I \setminus D_g$ und da $X_{j'} \neq \emptyset$ auch ein $a_{j'} \in X_{j'}$.

$$\text{Wir setzen: } D_{g'} = D_g \cup \{j'\} \text{ und } g'(j) := \begin{cases} g(j) & : j \in D_g \\ a_{j'} & : j = j' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (g'; D_{g'}) \in X \text{ mit } (g; D_g) \not\preceq (g'; D_{g'}) \text{ zu } (g; D_g) \text{ maximal}$$

$$\Rightarrow (g; I) \in X, \text{ d. h. } g : I \rightarrow \bigcup X_j \text{ mit } g(j) \in X_j \ \forall j \in I \quad \square$$

Definition (A-13). Eine Kette (K, \preceq) heißt **wohlgeordnet** (oder **vollständig geordnet**), wenn jede nichtleere Teilmenge A von K ein kleinstes Element besitzt (d. h. $\exists a_0 \in A : a_0 \preceq a \ \forall a \in A$).

Beispiel (A-14). (\mathbb{N}, \leq) ist wohlgeordnet, aber z. B. (\mathbb{Z}, \leq) nicht!

Satz (A.0-15) (Wohlordnungssatz von Zermelo). Sei $N \neq \emptyset$. Dann existiert auf N eine Ordnung " \preceq ", sodass (N, \preceq) wohlgeordnet ist.

Beweis. Ist $N = \{n\}$ einelementig, so ist $(N, =)$ wohlgeordnet.

Sei nun $N \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und

$$X := \{(M, \leq_M) : M \subseteq N \text{ und } (M, \leq_M) \text{ wohlgeordnet}\}.$$

Offenbar ist $X \neq \emptyset$. Wir definieren auf X eine Halbordnung:

$$(M_1, \leq_{M_1}) \preceq (M_2, \leq_{M_2}) \stackrel{\text{def}}{\iff} M_1 \subseteq M_2$$

mit " \leq_{M_1} " \equiv " \leq_{M_2} " auf M_1 und $a \preceq_{M_2} b \ \forall a \in M_1 \ \forall b \in M_2 \setminus M_1$ (Nachweis!)

Sei nun (wieder) K eine Kette in (X, \preceq) . Wir setzen $M_0 = \bigcup_{(M, \leq_M) \in K} M$ und defi-

nieren " \leq_{M_0} " wie folgt:

Für $a, b \in M_0 \exists (M, \leq_M) \in K$ mit $a, b \in M$ (da K eine Kette ist) und setzen dann:

$$a \preceq_{M_0} b \stackrel{\text{def}}{\iff} a \preceq_M b \text{ (ist korrekt, da } K \text{ eine Kette ist)}$$

$\Rightarrow (M_0, \leq_{M_0}) \in X$ ist eine obere Schranke von $K \stackrel{\text{Zorn}}{\implies}$ In X existiert ein maximales Element (M^*, \leq_*)

Zeigen $M^* = N$.

Annahme: $\exists a \in N \setminus M^*$. Setzen $M' = M^* \cup \{a\}$ und $b \preceq_{M'} a \ \forall b \in M^*$

$$\Rightarrow (M^*, \leq_*) \not\preceq (M', \leq_{M'}) \Rightarrow \text{Behauptung.} \quad \square$$

Anhang B

Topologische Komplemente

Definition (B-1). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum und $M, N \subset X$ lineare Teilräume.

(a) Die Menge

$$L := M + N := \{x + y : x \in M, y \in N\}$$

heißt **Summe** von M und N .

(b) Die Summe $L = M + N$ heißt **direkte Summe** von M und N , wenn gilt:
 $M \cap N = \{0\}$ (Symbol: $L = M \oplus N$)

Folgerung (B-2). Die Summe $M + N$ ist ein linearer Teilraum von X .

Bemerkung (B-3). Die Summe $L = M + N$ ist genau dann eine direkte Summe, wenn gilt:

$$\forall l \in L \exists! x \in M, y \in N : l = x + y$$

(die Darstellung von l ist eindeutig)

Definition (B-4). Sei X ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ein linearer Operator $P : X \rightarrow X$ heißt **Projektor**, wenn $P^2 = P$ ist. (P heißt auch idempotent).

Bemerkung (B-5). Sei $P : X \rightarrow X$ ein Projektor. Dann gilt:

(a) Der Operator $Q = I - P$ (I – identischer Operator) ist ein Projektor (genannt der ergänzende Projektor zu P) und $\ker P = \operatorname{im} Q$, sowie $\ker Q = \operatorname{im} P$

(b) Ist X ein normierter Raum und $P : X \rightarrow X$ ein stetiger Projektor, so ist auch $Q = I - P$ stetig und $\operatorname{im} P, \operatorname{im} Q$ sind abgeschlossene Teilräume von X . Außerdem gilt: $\|P\| \geq 1, \|Q\| \geq 1$.

Satz (B-6). Sei X ein \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) und M, N Teilräume. $X = M \oplus N$ genau dann, wenn ein Projektor $P : X \rightarrow X$ existiert mit $M = \operatorname{im} P$ und $\ker P = N$. (N heißt das algebraische Komplement von M in X)

Beweis. (1) Sei $P : X \rightarrow X$ ein Projektor mit $M = \operatorname{im} P, N = \ker P$ (P heißt Projektor auf M parallel zu N). Sei $Q = I - P \Rightarrow P + Q = I \Rightarrow x = Px + Qx$, wobei $Px \in M$ und $Qx \in N$ ($\ker P = \operatorname{im} Q$)

Sei $y \in M \cap N \Rightarrow y \in M = \operatorname{im} P, y \in N = \ker P \Rightarrow \exists x \in X : y = Px$ und $Px = 0 \Rightarrow 0 = Py = P^2x = Px = y \Rightarrow X = M \oplus N$.

(2) Sei $X = M \oplus N \Rightarrow \forall x \in X \exists! x' \in M, x'' \in N : x = x' + x''$.

Definieren: $P : X \rightarrow X$ mit $Px = x'$. Offenbar ist P linear und wenn $x \in M$

$\Rightarrow x' = 0, x'' = x \Rightarrow Px = x \Rightarrow \forall x \in X$ gilt: $P^2x = P(Px) = Px' = x' = Px$

$\Rightarrow P^2 = P \Rightarrow P$ ist Projektor mit $\operatorname{im} P = M$. Sei nun $x \in N \Rightarrow x' = 0, x'' = x$

$\Rightarrow Px = 0 \Rightarrow N \subseteq \ker P$. Sei weiter $x \in \ker P$ und $x = x' + x''$ ($x' \in M, x'' \in N$)

$\Rightarrow 0 = Px = x' \Rightarrow x = x'' \in N \Rightarrow N = \ker P \Rightarrow$ Behauptung. \square

Lemma (B-7). Sei X ein linearer Raum und $A : X \rightarrow X$ ein linearer Operator. Dann gilt: Der Faktorraum $X/\ker A$ ist linear isomorph zu $\operatorname{im} A$, d. h. $X/\ker A \simeq \operatorname{im} A$

Beweis. Sei $N = \ker A$. Wir betrachten $\tilde{A} : X/N \rightarrow X$ mit $\tilde{A}([x]) = Ax$ ($x \in [x]$) $\Rightarrow \tilde{A}$ ist linear mit $\ker \tilde{A} = \{[0]\}$
 $\Rightarrow \tilde{A} : X/N \rightarrow \operatorname{im} A$ ist bijektiv \Rightarrow Behauptung. \square

Folgerung (B-8). Sei X ein linearer Raum und M, N Teilräume. Ist $X = M \oplus N$ die direkte Summe von M, N , so gilt: $X/N \simeq M$.

Beweis. $P : X \rightarrow X$ Projektor auf M parallel zu N
 $\Rightarrow \operatorname{im} P = M, N = \ker P \Rightarrow$ Behauptung. \square

Definition (B-9). Sei X ein linearer Raum, $N \subset X$ ein Teilraum von X . Die Dimension des linearen Raumes X/N heißt die **Kodimension** von N (kurz: $\operatorname{codim} N$).

Beispiel (B-10). Sei $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ein lineares Funktional auf dem linearen Raum X mit $f \neq 0$ und $X_1 = \ker f$. Dann gilt:

- (a) $\operatorname{codim} X_1 = \dim X/X_1 = 1$
- (b) $\exists x_0 \in X \setminus X_1$ mit $X = \operatorname{span}\{x_0\} \oplus X_1$, d. h.
 $\forall x \in X \exists! \lambda \in \mathbb{K}, x_1 \in X_1 : x = \lambda x_0 + x_1$

Beweis. Nach (B-7) ist $X/X_1 \simeq \operatorname{im} f = \mathbb{K}$. Da $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1 \Rightarrow$ (a).

Zu (b): Da $f \neq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in X \setminus X_1 \Rightarrow X/X_1 \ni [x_0] \neq 0$.

Da $\dim X/X_1 = 1 \Rightarrow \forall [x] \in X/X_1 \exists! \lambda \in \mathbb{K} : [x] = \lambda[x_0]$

$\Rightarrow [x - \lambda x_0] = [0] \Rightarrow x_1 := x - \lambda x_0 \in X_1 \Rightarrow x = \lambda x_0 + x_1$.

Wegen $\lambda x_0 \notin \ker f \quad \forall \lambda \neq 0 \Rightarrow \ker f \cap \operatorname{span}\{x_0\} = \{0\} \Rightarrow$ Behauptung. \square

Definition (B-11). Sei X ein normierter Raum, M, N Teilräume mit $X = M \oplus N$ und $P : X \rightarrow X$ der Projektor auf M parallel zu N .

- (a) X heißt **topologische direkte Summe** von M und N (Symbol: $X = M \dot{+} N$), wenn der Projektor P stetig ist.
- (b) N heißt **topologisches Komplement** von M in X , wenn $X = M \dot{+} N$ ist.

Bemerkung (B-12). Ist $X = M \dot{+} N$, so sind M, N abgeschlossene Teilräume von X (siehe Bemerkung (B-5)(b)).

Satz (B-13). Sei X ein Banachraum und M, N abgeschlossene Teilräume von X . Gilt $X = M \oplus N$, so ist $X = M \dot{+} N$.

Beweis. Als abgeschlossene Teilräume des Banachraumes X sind M, N selbst Banachräume. Sei nun $\tilde{X} = M \times N$. Dann ist bekanntlich für $\{x', x''\} \in \tilde{X}$ durch $\|\{x', x''\}\| := \|x'\| + \|x''\|$ auf \tilde{X} eine Norm erklärt. Aus Satzes (1.3-8) folgt, dass \tilde{X} in dieser Norm vollständig ist.

Betrachten nun den Operator $S : \tilde{X} \rightarrow X$ mit $S(\{x', x''\}) = x' + x''$. Offenbar ist S linear. Außerdem gilt: $\|S(\{x', x''\})\| = \|x' + x''\| \leq \|x'\| + \|x''\| \quad \forall \{x', x''\} \in \tilde{X}$, d. h. S ist stetig. Wegen $X = M \oplus N$ folgt aus $x' + x'' = y' + y''$ sofort $x' = y', x'' = y'' \Rightarrow S$ ist injektiv und auch S ist surjektiv.

Nach dem Satz von Banach über den inversen Operator folgt $S^{-1} \in \mathcal{L}(X, \tilde{X})$.

Sei nun $P : X \rightarrow X$ der Projektor auf M parallel zu N und $P' : \tilde{X} \rightarrow M$ mit $P'(\{x', x''\}) = x' \Rightarrow P'$ ist linear und stetig $\Rightarrow P = P'S^{-1}$ ist stetig \Rightarrow Behauptung. \square

Satz (B-14). Seien X ein Banachraum und M, N abgeschlossene Teilräume mit $X = M \dot{+} N$. Dann ist der Faktorraum X/N linear homöomorph zu M .

Beweis. Sei $P : X \rightarrow X$ der Projektor auf M parallel zu N .

Wie in (B-7) ist $\tilde{P} : X/N \rightarrow M$ bijektiv.

Wie im Beweis von Satz (3.6-7) zeigt man, dass $\tilde{P} \in \mathcal{L}(X/N, M)$ ist.

Aus dem Satz von Banach (3.5-12) folgt $\tilde{P}^{-1} \in \mathcal{L}(M, X/N) \Rightarrow$ Behauptung. \square

Satz (B-15). Sei X ein normierter Raum, M ein abgeschlossener Teilraum von X und N ein endlichdimensionaler Teilraum von X . Dann ist $M + N$ ein abgeschlossener Teilraum von X .

Beweis. Sei $\varphi : X \rightarrow X/M$ die kanonische Abbildung.

Da $\dim N < \infty \Rightarrow \dim \varphi(N) < \infty \Rightarrow \varphi(N)$ ist in X/M abgeschlossen.

Da φ stetig ist folgt $\varphi^{-1}(\varphi(N)) = \ker \varphi + N = M + N$ ist abgeschlossen in X . \square

Satz (B-16). Sei X ein normierter Raum, $M \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum. Wenn $\dim M < \infty$ oder $\text{codim } M < \infty$ ist, so besitzt M ein topologisches Komplement N in X , d. h. $X = M \dot{+} N$.

Beweis. (1) Sei $m = \dim M < \infty$ und e_1, \dots, e_m eine Basis von M . Nach Satz (3.7-17) existiert zu dieser Basis ein biorthogonales System $f_1, \dots, f_m \in X^*$.

Setzen $N := \bigcap_{i=1}^m \ker f_i \Rightarrow N$ ist abgeschlossener Teilraum.

Zeigen: $X = M \dot{+} N$.

Definieren $P : X \rightarrow M$ mit $Px = \sum_{i=1}^m f_i(x)e_i$ ($x \in X$). Offenbar ist P linear und

$\|Px\| \leq (\sum \|f_i\| \|e_i\|) \|x\| \Rightarrow P$ ist stetig. Nun gilt:

$$Pe_j = \sum_{i=1}^m f_i(e_j)e_i \stackrel{\text{biorthogonal}}{=} f_j(e_j)e_j = e_j$$

$$\Rightarrow P^2x = P(Px) = P(\sum f_i(x)e_i) = \sum f_i(x)Pe_i = Px$$

$\Rightarrow P$ ist ein Projektor mit $M = \text{im } P$.

Zeigen: $N = \ker P$.

Sei $x \in N \Rightarrow f_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow Px = 0 \Rightarrow x \in \ker P$. Sei umgekehrt

$x \in \ker P$, d. h. $0 = Px = \sum f_i(x)e_i$. Da $\{e_i\}_{i=1}^m$ linear unabhängig

$\Rightarrow f_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m \Rightarrow x \in N$. Aus (B-6) folgt $X = M \oplus N$ und da P stetig

ist folgt $X = M \dot{+} N$.

(2) Sei nun $m = \text{codim } M < \infty$, d. h. $\dim X/M = m$

$\Rightarrow \exists$ Basis $[x_1], \dots, [x_m]$ für $X/M \Rightarrow$ Die Repräsentanten x_1, \dots, x_m sind in X linear unabhängig. Setzen $N := \text{span}\{x_1, \dots, x_m\}$.

Zeigen: $X = M \dot{+} N$.

Sei $\varphi : X \rightarrow X/M$ die kanonische Abbildung

$$\Rightarrow \forall x \in X \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K} : \varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i [x_i] \Rightarrow x - \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in \ker \varphi = M.$$

Setzen $Q : X \rightarrow N$ mit $Qx = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ ($x \in X$) $\Rightarrow N = \text{im } Q$.

Wegen $\varphi(x_i) = [x_i]$ ($i = 1, \dots, m$) $\Rightarrow Qx_i = x_i$ ($i = 1, \dots, m$)

$\Rightarrow Q^2 = Q$ (wie oben). $Q : X \rightarrow N$ ist ein Projektor.

Außerdem gilt: $x \in M \Leftrightarrow \varphi(x) = \sum \lambda_i [x_i] = 0 \stackrel{\text{linear unabhängig}}{\Leftrightarrow} \lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$)

$\Leftrightarrow Qx = 0 \Rightarrow M = \ker Q \Rightarrow X = M \oplus N$.

Zeigen: Q ist stetig.

$\|Qx\| \leq \sum |\lambda_i| \|x_i\| \leq \max \|x_i\| \sum |\lambda_i|$. Da $\sum |\lambda_i|$ eine Norm auf N darstellt, ergibt sich aus Folgerung (2.1-19): $\exists C > 0 : \sum |\lambda_i| \leq C \|x\| \Rightarrow \|Qx\| \leq \text{const} \|x\|$

$\Rightarrow Q$ ist stetig und $X = M \dot{+} N$. \square

Definition (B-17). Sei X ein normierter Raum und $\emptyset \neq M \subseteq X$ eine beliebige Menge. Setzen

$$M^\perp := \{f \in X^* : f(x) = 0 \quad \forall x \in M\}$$

(vergleiche: Definition (2.2-11))

Bemerkung (B-18). M^\perp ist ein linearer, abgeschlossener Teilraum von X^* .

Satz (B-19). Sei X ein normierter Raum und $M \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann gilt:

$$\text{codim } M < \infty \Leftrightarrow \dim M^\perp < \infty$$

Ist eine der Bedingungen erfüllt, dann ist $\text{codim } M = \dim M^\perp$.

Beweis. (1) Sei $\text{codim } M = m < \infty$ und $x_1, \dots, x_m \in X$ wie im 2. Teil des Beweises von (B-16). Genau wie dort ist also $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i [x_i]$, wobei die λ_i durch $x \in X$ eindeutig bestimmt sind. Das definiert die Funktionale $f_j : x \rightarrow \mathbf{K}$ durch $f_j(x) = \lambda_j$ ($j = 1, \dots, m$) \Rightarrow Die f_j sind linear und wie oben folgt:

$$|f_j(x)| = |\lambda_j| \leq \sum_{i=1}^m |\lambda_i| \leq C \|x\| \Rightarrow f_j \in X^* \text{ und wegen } \varphi(x_j) = [x_j]$$

$$\Rightarrow f_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases} \Rightarrow \{f_i\} \text{ ist biorthogonal zu } \{x_i\}$$

$\Rightarrow f_1, \dots, f_m$ sind linear unabhängig. Setzen $L = \text{span}\{f_1, \dots, f_m\} \Rightarrow$ Für $x \in M$, $f \in L$ ist $f(x) = 0 \Rightarrow L \subseteq M^\perp$.

Sei $f_0 \in M^\perp \setminus L \Rightarrow f_0, f_1, \dots, f_m$ sind linear unabhängig

$\Rightarrow \exists e_0, e_1, \dots, e_m \in X$ mit $f_j(e_i) = \delta_{ij}$ $i, j = 0, \dots, m \Rightarrow e_0, e_1, \dots, e_m \notin M$

$\Rightarrow [e_i] = \varphi(e_i) \neq 0 \quad \forall i = 0, \dots, m$.

Da $\dim X/M = \text{codim } M = m \Rightarrow [e_0], [e_1], \dots, [e_m]$ sind linear abhängig.

$$\Rightarrow \exists \alpha_i \in \mathbf{K} : \sum_{i=0}^m \alpha_i [e_i] = 0, \sum_{i=0}^m |\alpha_i| > 0 \Rightarrow x := \sum_{i=0}^m \alpha_i e_i \in M$$

$$\Rightarrow f_j(x) = 0 \quad (j = 0, \dots, m) \Rightarrow 0 = \alpha_j f_j(e_j) = \alpha_j \quad j = 0, \dots, m \not\Leftarrow$$

$\Rightarrow M^\perp = L$. Da $\dim L = m \Rightarrow \dim M^\perp = m$.

(2) Sei nun $\dim M^\perp = m < \infty$ und f_1, \dots, f_m eine Basis in M^\perp

$\Rightarrow \exists e_1, \dots, e_m \in X : f_j(e_i) = \delta_{ij}$. Setzen $N = \text{span}\{e_1, \dots, e_m\} \Rightarrow \dim N = m$,

da die e_i linear unabhängig sind. Aus (B-16) folgt, es existiert ein abgeschlossener Teilraum M , sodass $X = M \dot{+} N$. Nach (B-14) ist $X/M \simeq N$

$\Rightarrow \text{codim } M = \dim X/M = \dim N = m = \dim M^\perp$. □

Anhang T

Topologische Grundbegriffe des metrischen Raumes (X, d)

offene Kugel	
offen	abgeschlossen
1) innerer Punkt einer Menge 2) $\text{int } A$ – Menge der inneren Punkte der Menge A	a) Berührungspunkt einer Menge b) \bar{A} – Menge aller Berührungspunkte der Menge A
Eigenschaften der Funktionen	
$\text{int} : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$	$- : \mathfrak{P}(X) \rightarrow \mathfrak{P}(X)$
I1: $\text{int } A \subseteq A$ I2: $\text{int}(A \cap B) = \text{int } A \cap \text{int } B$ I3: $\text{int}(\text{int } A) = \text{int } A$ I4: $\text{int } X = X$	H1: $A \subseteq \bar{A}$ H2: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ H3: $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ H4: $\overline{\emptyset} = \emptyset$
3) Definition der offenen Menge	c) Definition der abgeschlossenen Menge
$A \text{ offen} \Leftrightarrow \text{int } A = A$	$A \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow \bar{A} = A$
Eigenschaften des Systems	
\mathfrak{G} der offenen Mengen G1: $\emptyset, X \in \mathfrak{G}$ G2: Aus $G_i \in \mathfrak{G}$ folgt: $\bigcup G_i \in \mathfrak{G}$ G3: Aus $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ folgt: $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{G}$	\mathfrak{F} der abgeschlossenen Mengen F1: $\emptyset, X \in \mathfrak{F}$ F2: Aus $F_i \in \mathfrak{F}$ folgt: $\bigcap F_i \in \mathfrak{F}$ F3: Aus $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ folgt: $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$
Dualität	
4) $G \in \mathfrak{G} \Leftrightarrow X \setminus G \in \mathfrak{F}$ 5) $\text{int } A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$	d) $F \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow X \setminus F \in \mathfrak{G}$ e) $\bar{A} = X \setminus \text{int}(X \setminus A)$
Rückkoppelung	
6) $\text{int } A = \bigcup \{G : G \subseteq A, G \in \mathfrak{G}\}$	f) $\bar{A} = \bigcap \{F : A \subseteq F, F \in \mathfrak{F}\}$

Index

- Berührungspunkt, 16
- Element
 - maximal, 98
- Folge
 - beschränkt, 8
 - Cauchyfolge, 11
 - Fundamentalfolge, 11
 - konvergent, 40
 - Norm-konvergent, 40
 - schwach konvergent, 83
- Fredholm'sche Alternative, 92
- Funktion
 - linear, 42
 - stetig, 19
 - stetig im Punkt, 19
- Funktional, 53
 - halbadditiv, 65
 - nichtnegativ, 65
 - sublinear, 71
- Gleichung
 - Parseval, 52
- Grenzwert, 7
 - Eindeutigkeit, 8
 - schwacher, 83
- Häufungspunkt, 16
- Isometrie, 13
- isometrisch, 13
- Isomorphismus, 42
- Kompaktheit
 - schwach relativ, 84
- Konvergenz
 - koordinatenweise, 9
 - nach der Metrik, 7
 - normkonvergent, 58
 - punktweise, 58
 - schwach, 83
 - schwach konvergent, 58
 - stark konvergent, 58
- Kugel
 - abgeschlossene, 16
- offene, 15
- Menge
 - ε -Netz, 29
 - 1. Kategorie, 26
 - 2. Kategorie, 26
 - abgeschlossen, 16
 - Ableitung, 16
 - Abschließung, 16
 - Abstand eines Punktes, 17
 - dicht liegen, 13, 18
 - folgen-kompakt, 32
 - halbgeordnet, 97
 - innerer Punkt, 16
 - Kette, 97
 - maximal, 97
 - wohlgeordnet, 99
 - kompakt, 30
 - linear geordnet, 97
 - nirgends dicht, 18
 - obere Schranke, 98
 - offen in, 16
 - offene Überdeckung, 30
 - präkompakt, 29
 - Produktmenge, 98
 - Rand, 18
 - relativ folgen-kompakt, 32
 - relativ kompakt, 30
 - Residualmenge, 27
 - schwach relativ kompakt, 84
 - total beschränkt, 29
- Menge:Durchmesser, 22
- Metrik, 5
 - äquivalent, 8
- Norm, 39
 - Faktornorm, 68
- Operator
 - Φ -Operator, 89
 - Φ_+ -Operator, 89
 - Φ_- -Operator, 89
 - abgeschlossen, 63
 - adjungierter, 78
 - beschränkt, 54

- Bild, 53
- Defektzahl, 88
- Definitionsgebiet, 53
- Einschränkung, 70
- endlichdimensionaler, 85
- Fixpunkt, 27
- Fortsetzung, 70
- Hilbertadjungierte, 81
- Index, 89
- inverser, 62
- invertierbar, 62
- Kokern, 88
- kompakter, 85
- kontrahierend, 27
- linear, 53
- Multiplikation, 61
- Noether, 89
- Norm, 57
- normal auflösbar, 87
- Nullzahl, 88
- Produkt, 61
- regularisierbar, 93
- Rieszadjungierte, 81
- stetig invertierbar, 62
- vollstetiger, 85
- orthogonal, 47
 - orthogonale Projektion, 48
 - orthogonale Summe, 48
 - orthogonales Komplement, 47
 - System, 49
- Projektor, 101
- Quadraturformeln, 61
- Raum
 - Banachraum, 40
 - bidualer, 77
 - Defektraum, 87
 - dualer, 58
 - Faktorraum, 68
 - Hilbertraum, 46
 - isometrisch isomorph, 42
 - Kodimension, 102
 - linear homöomorph, 42
 - linear isomorph, 42
 - metrischer, 5
 - mit Skalarprodukt, 45
 - normierter, 39
 - komplexer, 39
 - reeller, 39
 - reflexiv, 77
 - separabel, 20
 - Teilraum, 5
 - topologisch direkte Summe, 102
 - topologisch gleich, 8
 - topologisches Komplement, 102
 - unitär, 46
 - Unterraum, 5
- Reihe
 - absolut konvergent, 40
 - konvergent, 40
 - Neumann, 63
 - Partialsumme, 40
 - Summe, 40
 - unendliche, 40
- Satz
 - Approximation durch Linearkombinationen, 43
 - Arzela-Ascoli, 37
 - ausreichende Anzahl von Funktionalen, 75
 - Auswahlaxiom von Zermelo, 99
 - Banach über den abgeschlossenen Graphen, 64
 - Banach über den inversen Operator, 67
 - Banach und Steinhaus, 60
 - Cantor, 31
 - Existenz biorthogonales System, 75
 - Fortsetzung unter Erhalt der Norm, 73
 - Hahn-Banach, 72, 73
 - Hausdorff, 32
 - Lemma von der Fast-Senkrechten, 44
 - Open-Mapping-Theorem, 69
 - Plessner, 77
 - Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, 59
 - Riesz, 42, 44, 56
 - Riesz-Fischer, 52
 - stetige Fortsetzung, 70
 - Vervollständigung metrischer Räume, 13
 - Wohlordnungssatz von Zermelo, 99
 - Zorn'sches Lemma, 98
- Schwarzsche Ungleichung, 45
- Skalarprodukt, 45
- stetig
 - Hölder-stetig, 37
- System
 - orthonormiert, 49
 - vollständig, 48
 - zentriert, 31

Teilraum

Summe, 101
direkte, 101

Umgebung, 16

r -Umgebung, 15

Vervollständigung, 13

vollständig, 12