Skript zur Vorlesung

Orthogonale Polynome II

SS 2003

Peter Junghanns

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon & Breach, New York, 1978.

[2] G. Freud, Orthogonale Polynome, Berlin, 1969.

[3] I. P. Natanson, Konstruktive Funktionentheorie, Berlin, 1955.

[4] P. G. Nevai, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1979.

[5] P. Nevai, Orthogonal Polynomials, Theory and Practice, NATO ASI Series C, Vol. 294, 1990.

[6] N. Obreschkoff, Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome, Berlin, 1963.

[7] R. Remmert, Funktionentheorie 2, Springer-Verlag, Berlin, ..., 1992.

[8] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1939.

Kapitel 5

Belegungsfunktionen und das Darstellungstheorem

5.1 Vorbetrachtungen

Definition 5.1 *Eine beschränkte, nicht fallende Funktion* $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* **Belegungsfunktion**, *wenn alle Momente*

$$\mu_n := \int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\psi(x) \, , \quad n = 0, 1, 2, \dots \, , \tag{5.1}$$

endlich sind. Die Menge

$$S(\psi) := \{x \in \mathbb{R} : \psi(x+\delta) - \psi(x-\delta) > 0 \;\forall\, \delta > 0\}$$

nennt man **Spektrum** *von* ψ. *Ein* $x \in S(\psi)$ *heißt* **Spektralpunkt** *von* ψ.

Lemma 5.2 *Es seien* E *eine abzählbare Menge und* $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Folge von Funktionen, so dass die Zahlenfolge* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *für jedes* $x \in E$ *beschränkt ist. Dann existiert eine Teilfolge von* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, *die überall auf* E *konvergiert.*

Lemma 5.3 *Ist* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge nicht fallender und gleichmäßig beschränkter Funktionen* $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *so existiert eine Teilfolge* $\left\{\varphi_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$, *so dass für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *der Grenzwert* $\varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi_{n_j}(x)$ *existiert. Die Funktion* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist beschränkt und nicht fallend.*

Lemma 5.4 *Die Funktionen* $\varphi_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, *seien nicht fallend und gleichmäßig beschränkt, wobei* $-\infty < a < b < \infty$ *und* $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ *für alle* $x \in [a,b]$ *erfüllt sei. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\varphi_n(x) = \int_a^b f(x)\, d\varphi(x) \quad \forall\, f \in \mathbf{C}[a,b] \, .$$

5.2 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass das Spektrum einer Belegungsfunktion abgeschlossen ist.

2. Es sei ψ eine Belegungsfunktion mit unendlichem Spektrum $S(\psi)$. Man zeige, dass dann das über (5.1) definierte Momentenfunktion auf $S(\psi)$ definit ist (vgl. Def. 1.16).

3. Die Zahlenfolge $\{\gamma_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ sei für jedes $k = 1, 2, \ldots$ beschränkt. Man zeige, dass dann eine streng monoton wachsende Folge $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ natürlicher Zahlen existiert, so dass die Folge $\left\{\gamma_{n_j k}\right\}_{j=1}^{\infty}$ für jedes $k = 1, 2, \ldots$ konvergiert.

5.3 Das Darstellungstheorem

Es sei $\mathcal{L}$ ein positiv definites Momentenfunktional mit dem zugehörigen OPS $\{P_n(x)\}$. Dann gilt für $M_k(x) = x^k$ (vgl. Abschnitt 1.4)

$$\mu_k = \mathcal{L}[M_k] = \sum_{j=1}^{n} A_{nj} x_{nj}^k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1\,. \tag{5.2}$$

Wir definieren

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < x_{nn}\,, \\ A_{nn} + \cdots + A_{np} & , \quad x_{np} \le x < x_{n,p-1}\,,\ n \ge p > 1\,, \\ \mu_0 & , \quad x \ge x_{n1}\,. \end{cases} \tag{5.3}$$

Dann gilt $S(\psi_n) = \{x_{nj}\}_{j=1}^{n}$, $\psi_n(x_{nj}+0) - \psi_n(x_{nj}-0) = A_{nj}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} A_{nj} x_{nj}^k = \mu_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1\,. \tag{5.4}$$

Ist $[a, b]$ ein beschränktes Trägerintervall von $\mathcal{L}$, so folgt aus Lemma 5.3 und Lemma 5.4 die Existenz einer Teilfolge $\left\{\psi_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\psi_{n_j}(x) \longrightarrow \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, und

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, d\psi(x) = \mu_k = \mathcal{L}[M_k]\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.5}$$

Das Beispiel

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < n\,, \\ 1 & , \quad x \ge n\,, \end{cases} \qquad \psi_n(x) \longrightarrow \psi(x) = 0\,,\ x \in \mathbb{R},$$

zeigt, dass die Aussage von Lemma 5.4 i.a. nicht für unbeschränkte Intervalle gilt.

Theorem 5.5 *Es seien $\mathcal{L}$ positiv definit und ψ_n wie in (5.3) definiert. Dann existiert eine Teilfolge $\left\{\psi_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\psi_{n_j}(x) \longrightarrow \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, so dass $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Belegungsfunktion mit unendlichem Spektrum ist, für die (5.5) gilt.*

Eine Belegungsfunktion $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit unendlichem Spektrum, die (5.5) erfüllt, nennt man eine **Darstellung** von $\mathcal{L}$.

Theorem 5.6 *Jedes positiv definite Momentenfunktional $\mathcal{L}$ besitzt eine Darstellung $\psi(x)$ mit $S(\psi) \subset [\eta_1, \xi_1]$. Ist umgekehrt $\psi(x)$ eine Darstellung von $\mathcal{L}$ mit $S(\psi) \subset [a,b]$, so folgt $[\eta_1, \xi_1] \subset [a,b]$ (vgl. Folg. 1.19).*

5.4 Übungsaufgaben

1. Man finde eine Folge von Belegungsfunktionen $\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit unendlichem Spektrum, die gegen $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, für die aber $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi_n(x)$ **nicht** gegen $\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, d\varphi(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergiert.

2. Wie kann man im Fall $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < \infty$ das Rieszsche Darstellungstheorem (für lineare und beschränkte Funktionale über $\mathbf{C}[\eta_1, \xi_1]$) zum Beweis von Theorem 5.6 verwenden?

5.5 Zur Lage der Spektralpunkte einer Darstellung

Im weiteren seien $\mathcal{L}$ stets **positiv definit** und $\{P_n(x)\}$ das zugehörige **monische** OPS.

Satz 5.7 *Ist φ eine Darstellung von $\mathcal{L}$, so gilt*

$$S(\varphi) \cap (x_{n,j+1}, x_{nj}) \neq \emptyset \quad \forall\, j = 1, \ldots, n-1\,,\ \forall\, n = 2, 3, \ldots$$

Eine Darstellung ψ, die Grenzwert einer Teilfolge von $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist (vgl. (5.3)), nennt man **natürliche Darstellung** von $\mathcal{L}$.

Satz 5.8 *Es seien ψ eine natürliche Darstellung von $\mathcal{L}$, $G \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, und es existiere ein Index n_0, so dass $P_n(x) \neq 0$ für alle $x \in G$ und für alle $n > n_0$. Dann gilt $S(\psi) \cap G = \emptyset$.*

Folgerung 5.9 *Es seien ψ eine natürliche Darstellung von $\mathcal{L}$ und $s \in S(\psi)$. Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Index $n \in \mathbb{N}$ ein Index $N > n$ und ein Index $k \in \{1, \ldots, N\}$, so dass $s - \varepsilon < x_{Nk} < s + \varepsilon$. Definieren wir also die Mengen*

$$\mathbf{X} := \{x_{nj} : 1 \leq j \leq n\,,\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

und

$$\mathbf{Z} = \{x \in \mathbb{R} : P_n(x) = 0 \text{ für unendliche viele } n\}\,,$$

so gilt

$$S(\psi) \subset \mathbf{X}' \cup \mathbf{Z}\,. \tag{5.6}$$

($\mathbf{X}'$ bezeichnet die Menge der Häufungspunkte der Menge $\mathbf{X}$.)

Wir erinnern an die Definition der Zahlen ξ_j und η_j ,

$$\xi_j = \lim_{n\to\infty} x_{nj}\,, \ \eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1}\,, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Offenbar gilt

$$-\infty := \eta_0 \le \eta_1 \le \eta_2 \le \cdots \le \eta \le \xi \le \cdots \le \xi_2 \le \xi_1 \le \xi_0 := \infty\,,$$

wobei

$$\xi := \lim_{j\to\infty} \xi_j \quad \text{und} \quad \eta := \lim_{j\to\infty} \eta_j$$

zu setzen ist.

Satz 5.10 *Es sei φ eine Darstellung von $\mathcal{L}$. Dann gilt:*

(a) Aus $\eta_k < \eta_{k+1}$ folgt $S(\varphi) \cap (\eta_k, \eta_{k+1}] \ne \emptyset$.

(b) Aus $\eta_k = \eta_{k+1}$ folgt $\eta_k \in S(\varphi)'$.

(c) $\eta \in S(\varphi)'$.

Satz 5.11 *Sind $\eta_1 > -\infty$ und ψ eine natürliche Darstellung von $\mathcal{L}$, so gilt $\eta_j \in S(\psi)\ \forall\, j = 1, 2, \ldots$ und $S(\psi) \cap (-\infty, \eta) = \{\eta_j : j \ge 1,\, \eta_j < \eta\}$.*

Satz 5.12 *Existiert ein Index p mit $\eta_p = \eta_{p+1}$, so gilt $\eta_p = \eta$.*

Es sind somit nur die folgenden drei Situationen möglich:

1. $-\infty = \eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta$,

2. $-\infty < \eta_1 < \cdots < \eta_p = \eta_{p+1} = \cdots = \eta$,

3. $-\infty < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta$.

Ist also ψ eine natürliche Darstellung des positiv definiten Momenfunktionals $\mathcal{L}$, so lässt sich das Spektrum von ψ in der Form

$$S(\psi) = \Sigma_\eta \cup S_1 \cup \Sigma_\xi$$

mit

$$\Sigma_\eta = \begin{cases} \emptyset\,, & \text{falls } \eta = -\infty\,, \\ \{\eta_j : j \ge 1\,,\ \eta_j < \eta\}\,, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

der analog definierten Menge Σ_ξ und einer Menge $S_1 \subset [\eta, \xi]$ schreiben.

5.6 Übungsaufgaben

1. Es sei $-\infty < \eta_k < \eta_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Man zeige, dass dann
$$0 < \psi(\eta_k + 0) - \psi(\eta_k - 0) \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} [\widetilde{p}_j(\eta_k)]^2 \right)^{-1}$$
für jede natürliche Darstellung von $\mathcal{L}$ gilt.

2. Man zeige, dass das Spektrum einer natürlichen Darstellung eines symmetrischen positiv definiten Momentenfunktionals symmetrisch bezüglich 0 liegt.

3. Es seien $0 < \eta_k < \eta_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, und $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{-1} < \infty$. Man zeige, dass dann die Funktionenfolge $\{P_n(z)/P_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ auf jeder beschränkten Teilmenge der komplexen Ebene gleichmäßig beschränkt ist.

4. Es seien E eine abgeschlossene Trägermenge von $\mathcal{L}$ und $q(x) \in \mathbb{R}_{n+2}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so dass $\mathcal{L}[M_k q] = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt. Man beweise: Sind x_1 und x_2 zwei nebeneinander liegende reelle Nullstellen von $q(x)$, so gilt $E \cap (x_1, x_2) \neq \emptyset$.

5.7 Zur Bestimmtheit des Momentenfunktionals

Das Ziel unserer weiteren Überlegungen ist der Nachweis, dass für ein positiv definites Momentenfunktional $\mathcal{L}$ mit $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < \infty$ sich zwei Belegungsfunktionen nur durch eine Konstante in ihren gemeinsamen Stetigkeitspunkten unterscheiden.

Für ein $x_0 \notin (\eta_1, \xi_1)$ definieren wir
$$Q_n(x) = P_{n+1}(x) + a\, P_n(x) \quad \text{mit} \quad a = -\frac{P_{n+1}(x_0)}{P_n(x_0)} \neq 0\,.$$

Wegen $Q_n(x_{n+1,k}) = a\, P_n(x_{n+1,k})$ wechselt $Q_n(x_{n+1,k})$ das Vorzeichen (vgl. den Beweis von Theorem 1.18), so dass $Q_n(x)$ genau $n+1$ reelle Nullstellen $x_{nk}^* \in (x_{n+1,k+1}, x_{n+1,k})$, $k = 1, \ldots, n$, und $x_{n0}^* = x_0$ besitzt. Es sei ψ eine Darstellung von $\mathcal{L}$. Es gibt nun Zahlen A_{nk}^*, so dass die Quadraturformel
$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(x)\, d\psi(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{nk}^* \pi(x_{nk}^*)$$
für alle Polynome $\pi \in \mathbb{C}_{2n+1}[x]$ gilt. Analog zu Satz 1.27 gilt
$$A_{n0}^* = \left(\sum_{k=0}^{n} [\widetilde{p}_k(x_0)]^2 \right)^{-1}, \tag{5.7}$$

wobei $\{\widetilde{p}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ das orthonormierte Polynomsystem zu $\mathcal{L}$ bezeichnet. Weiterhin kann man zeigen, dass die Ungleichungen

$$A_{n0}^* \geq \psi(x_0) - \psi(-\infty)\,, \quad x_0 \leq \eta_1\,, \tag{5.8}$$

und

$$A_{n0}^* \geq \psi(+\infty) - \psi(x_0)\,, \quad x_0 \geq \xi_1\,, \tag{5.9}$$

erfüllt sind. Unter Verwendung von (5.7), (5.8), (5.9) und Theorem 3.32 ergibt sich

Folgerung 5.13 *Ist $-\infty < \eta_1 < \xi_1 < +\infty$, so gilt $S(\psi) \subset [\eta_1, \xi_1]$ für jede Darstellung ψ des positiv definiten Momentenfunktionals $\mathcal{L}$.*

Lemma 5.14 *Es seien $\varphi_j : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $j = 1,2$, zwei Funktionen beschränkter Variation auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ mit der Eigenschaft*

$$\int_a^b x^n \, d\varphi_1(x) = \int_a^b x^n \, d\varphi_2(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so dass $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = c$ für alle gemeinsamen Stetigkeitspunkte $x \in [a,b]$ von φ_1 und φ_2 gilt.

Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$, deren Darstellungen $\psi(x)$ im Sinne von Lemma 5.14 eindeutig sind, heißt **determiniert**, $\psi(x)$ nennt man dann **im wesentlichen eindeutige Darstellung** von $\mathcal{L}$.

Theorem 5.15 *Ist $[\eta_1, \xi_1]$ kompakt,so ist $\mathcal{L}$ determiniert.*

Satz 5.16 *Für ein determiniertes Funktional $\mathcal{L}$ mit der wesentlich eindeutigen Darstellung $\psi(x)$ gilt, dass $S(\psi)$ Teilmenge jeder abgeschlossenen Trägermenge von $\mathcal{L}$ ist.*

5.8 Klassische Momentenprobleme

1. **(Das Stieltjessche Momentenproblem)** T. J. Stieltjes formulierte 1894 das folgende Momentenproblem: Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Belegungsfunktion $\psi(x)$ mit unendlichem Spektrum in $[0,\infty)$, so dass

   $$\int_0^{\infty} x^n \, d\psi(x) = \mu_n\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,,$$

   gilt.

2. **(Das Hamburger Momentenproblem)** Um 1920/21 stellte H. Hamburger das zum Stietltesschen Momentenproblem analoge Problem, wobei lediglich das Interval $[0,\infty)$ durch $(-\infty,\infty)$ ersetzt ist.

Wir definieren (vgl. Kapitel 1)

$$\Delta_n = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta_n^{(1)} = \det \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_{n+2} & \cdots & \mu_{2n+1} \end{bmatrix},$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

Theorem 5.17 *Das Hamburger Momentenproblem besitzt genau dann eine Lösung, wenn für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Ungleichung $\Delta_n > 0$ gilt.*

Theorem 5.18 *Das Stieltjessche Momentenproblem besitzt genau dann eine Lösung, wenn das durch die Folge $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ definierte Momentenfunktional $\mathcal{L}$ auf $[0, \infty)$ postive definit ist.*

Theorem 5.19 *Das Stieltjessche Momentenproblem besitzt genau dann eine Lösung, wenn für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Ungleichungen $\Delta_n > 0$ und $\Delta_n^{(1)} > 0$ erfüllt sind.*

Theorem 5.20 (Erstes allgemeines Darstellungstheorem) *Für eine beliebige Zahlenfolge $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ existiert eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkter Variation, so dass*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \, d\varphi(x) = \mu_n \,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \,,$$

gilt.

Theorem 5.21 (Zweites allgemeines Darstellungstheorem) *Für zwei beliebige Zahlenfolgen $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ sowie das Polynomsystem $\{P_n(x)\}$, definiert durch die Rekursionsformel*

$$P_{-1} \equiv 0 \,, \; P_0 \equiv 1 \,, \; P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x) \,, \; n = 1, 2, \ldots$$

(vgl. (1.4)), existiert eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränkter Variation, so dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) P_n(x) \, d\varphi(x) = \beta_0 \beta_1 \cdots \beta_n \delta_{mn} \,, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots \,,$$

gilt. Die Funktion $\varphi(x)$ kann genau dann reellwertig gewählt werden, wenn die Zahlenfolgen $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ reell sind. Sie ist als Belegungsfunktion genau dann wählbar, wenn $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.

5.9 Übungsaufgaben

Ein nicht identisch verschwindendes Polynom $Q(x)$ nennt man ein bzgl. $\mathcal{L}$ **quasi-orthogonales Polynom der Ordnung** $n + 1$, wenn sein Grad nicht größer als $n + 1$ ist und

$$\mathcal{L}[M_k Q] = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

gilt.

1. Man zeige, dass $Q(x)$ genau dann ein quasi-orthogonales Polynom der Ordnung $n+1$ ist, wenn zwei komplexe Zahlen α und β existieren, so dass $Q(x) = \alpha P_{n+1}(x) + \beta P_n(x)$ und $|\alpha| + |\beta| > 0$ gilt.

2. Man beweise, dass für jede komplexe Zahl z_0 ein quasi-orthogonales Polynom $Q(x)$ der Ordnung $n+1$ existiert, so dass $Q(z_0) = 0$ erfüllt ist. Dieses Polynom ist bis auf einen nicht verschwindenden konstanten Faktor eindeutig bestimmt.

3. Man beweise: Ein quasi-orthogonales Polynom $Q \in \mathbb{R}[x]$ hat nur reelle und einfache Nullstellen, von denen höchsten eine außerhalb des Intervalls (η_1, ξ_1) liegt.

4. Es sei $Q(x)$ ein reelles quasi-orthogonales Polynom der Ordnung $n+1$ mit den Nullstellen $y_n < y_{n-1} < \cdots < y_1 < y_0$. Man zeige:

   (a) Es existieren Zahlen B_k , $k = 0, 1, \ldots, n$, so dass

   $$\mathcal{L}[\pi] = \sum_{k=0}^{n} B_k \pi(y_k) \quad \forall\, \pi \in \mathbb{C}_{2n+1}$$

   gilt.

   (b) Es existiert ein Polynom $\pi^*(x) \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$ vom Grad $2n$, so dass für $0 \leq p < n$ gilt:

      i. $\pi^*(y_k) = 1$, $n \geq k \geq n-p$,
      ii. $\pi^*(y_j) = 0$, $n-p > j \geq 0$,
      iii. $\pi^*(x) \geq 1$, $x \leq y_{n-p}$,
      iv. $\pi^*(x)$ ist monoton fallend für $y_{n-p} \leq x \leq y_{n-p-1}$.

   (c) Für jede Darstellung $\varphi(x)$ von $\mathcal{L}$ gilt

   $$\int_{-\infty}^{y_{n-p}+0} d\varphi(x) < B_n + B_{n-1} + \cdots + B_{n-p} ,$$

   $$\int_{y_p-0}^{\infty} d\varphi(x) < B_0 + B_1 + \cdots + B_p$$

   und

   $$B_n + B_{n-1} + \cdots + B_{n-p} < \int_{-\infty}^{y_{n-p-1}+0} d\varphi(x) .$$

   (d) Definiert man die Treppenfunktionen $\varphi_n(x)$ bzgl. der Knoten y_k und der Gewichte B_k analog zu den Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ (bzgl. der Knoten x_{nk} und der Gewichte A_{nk}), so gilt

   $$\varphi_(y_{n-p} + 0) - \varphi(y_{n-p} - 0) \leq \varphi_n(y_{n-p} + 0) - \varphi_n(y_{n-p} - 0)$$

   für $p = 0, 1, \ldots, n$.

Kapitel 6

Orthogonale Polynome in der komplexen Ebene

6.1 Definitionen. Lage der Nullstellen

- Sei μ ein positives Maß auf den Borelmengen der komplexen Ebene. Der Träger $S = S(\mu) = \operatorname{supp}(\mu)$ von μ sei kompakt und enthalte unendlich viele Punkte.
- Wir definieren das innere Produkt
$$\langle f, g\rangle = \int f(z)\overline{g(z)}\, d\mu(z)\,, \quad f, g \in \mathbf{L}^2(\mu)\,.$$

Beispiel 6.1

1. *$E \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt, $\langle f, g\rangle = \int_E f(z)\overline{g(z)}w(z)\, dxdy$ mit $z = x + \mathbf{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $w(z) \geq 0$ auf E, $0 < \int_E w(z)\, dxdy < \infty$.*
2. *$\Gamma \subset \mathbb{C}$ beschränkte Kurve, $\langle f, g\rangle = \int_\Gamma f(z)\overline{g(z)}w(z)\, ds(z)$, ds - Bogenmaß auf Γ, $w(z) \geq 0$ auf Γ, $0 < \int_\Gamma w(z)\, ds(z) < \infty$.*

- Da der Träger S unendlich viele Punkte enthält, sind die Funktionen $1, z, \ldots, z^n, \ldots$ linear unabhängig. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert damit eine eindeutig bestimmte Folge $\{\widetilde{p}_n\}_{n=1}^{\infty}$ von Polynomen
$$\widetilde{p}_n(z) = \widetilde{p}_n(z;\mu) = \gamma_n z^n + \ldots \in \mathbb{C}_{n+1}[z] \quad \text{mit} \quad \gamma_n > 0 \quad \text{und} \quad \langle \widetilde{p}_m, \widetilde{p}_n\rangle = \delta_{mn}\,.$$
Mit $P_n(z) = P_n(z;\mu) = \dfrac{1}{\gamma_n}\widetilde{p}_n(z;\mu)$ bezeichnen wir wieder die entsprechenden monischen orthogonalen Polynome.

Satz 6.2 *Ein Polynom $P_n(z) = z^n + \ldots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]$ ist genau dann orthogonales Polynom n-ten Grades , wenn*
$$\int |P_n(z)|^2\, d\mu = \min\left\{\int |Q_n(z)|^2\, d\mu : Q_n(z) = z^n + \ldots\right\}$$
gilt.

Beweis. Wir betrachten folgendes Minimierungsproblem: Gesucht ist ein Polynom

$$\widetilde{q}_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \widetilde{p}_j(z) \in \mathbb{C}_n[z],$$

so dass

$$\int |z^n - \widetilde{q}_{n-1}(z)|^2 \, d\mu = \min\left\{ \int |z^n - q_{n-1}(z)|^2 \, d\mu : q_{n-1}(z) \in \mathbb{C}_n[z] \right\}.$$

Bekanntlich ist $\widetilde{q}_{n-1}(z)$ eindeutig bestimmt, und es gilt $\alpha_j = \langle z^n, \widetilde{p}_j \rangle$. Wir setzen $\widetilde{Q}_n(z) = z^n - \widetilde{q}_{n-1}(z)$. Es folgt

$$\langle \widetilde{Q}_n, \widetilde{p}_j \rangle = \langle z^n, \widetilde{p}_j \rangle - \langle \widetilde{q}_{n-1}, \widetilde{p}_j \rangle = 0, \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

also $\widetilde{Q}_n(z) = P_n(z)$. Da sowohl $P_n(z)$ als auch $\widetilde{q}_{n-1}(z)$ eindeutig bestimmt sind, ist der Satz bewiesen. □

Wir erinnern an Satz 1.17: Ist $S \subset [a,b] \subset \mathbb{R}$, so sind alle Nullstellen von $P_n(z;\mu)$ reell und einfach und in (a,b) gelegen.

Satz 6.3 *Alle Nullstellen von $P_n(z;\mu)$ liegen in der konvexen Hülle* $\mathrm{conv}(S)$ *des Trägers von* μ.

Satz 6.4 *Falls* $\mathrm{conv}(S)$ *kein Segment ist, liegen alle Nullstellen des Polynoms $P_n(z;\mu)$ im Inneren* $\mathrm{int\,conv}\,(S)$ *der konvexen Hülle des Trägers S von μ.*

Es ist möglich, dass alle Nullstellen von $P_n(z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ außerhalb von S liegen, z.B. für $S \subset \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z = 1\}$.

Wir setzen $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{P_\infty\}$. Mit $D_\infty(S)$ bezeichnen wir die Zusammenhangskomponente von $\overline{\mathbb{C}} \backslash S$, die den unendliche fernen Punkt P_∞ enthält (d.h. $D_\infty(S)$ ist offen, zusammenhängend und unbeschränkt). Der Rand dieser Zusammenhangskomponente $\partial D_\infty(S) =: \partial_\infty S$ heißt **äußerer Rand** von S. Die Menge $\mathrm{Pconv}(S) := \mathbb{C} \setminus D_\infty(S)$ nennt man **polynomiale konvexe Hülle** von S.

Beispiel 6.5 *Ist $S = \mathbb{T}$, so ist* $\mathrm{Pconv}(S) = \overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. *Ist aber*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \, \mathsf{Im}\, z \geq 0\},$$

so gilt $\mathrm{Pconv}(S) = S$.

Lemma 6.6 ([7], Kap. 12) *Jede auf* $\mathrm{Pconv}(S)$ *analytische Funktion kann gleichmäßig auf* $\mathrm{Pconv}(S)$ *durch Polynome approximiert werden.*

Lemma 6.7 *Sei $E \subset \mathbb{C}$ kompakt und $E \cap \mathrm{Pconv}(S) = \emptyset$ (d.h. $E \subset D_\infty(S)$). Dann existieren ein $m \in \mathbb{Z}_+$ und ein $\alpha \in (0,1)$, so dass für beliebige m Zahlen $z_1, \ldots, z_m \in E$ Zahlen $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft*

$$\prod_{k=1}^{m} \left| \frac{z - w_k}{z - z_k} \right| \leq \alpha \quad \forall z \in S$$

existieren.

Satz 6.8 *Sei $E \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und $E \cap P_{conv}(S) = \emptyset$. Dann existiert eine natürliche Zahl m_0, so dass*

$$\#\{z \in E : P_n(z;\mu) = 0\} \leq m_0 \quad \forall n = 1, 2, \dots ,$$

d.h., die Anzahl der Nullstellen von $P_n(z;\mu)$, die in E liegen, ist gleichmäßig beschränkt.

6.2 Asymptotik der Nullstellen

Wir definieren

$$\|v\|_S = \sup\{|v(z)| : z \in S(\mu)\}_{n=1}^{\infty}$$

und

$$t_n(S) := \min\{\|z^n + \cdots\|_S : z^n + \cdots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]\} .$$

Das eindeutig bestimmte Polynom $T_n(z) = T_n(z;\mu) = z^n + \cdots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]$ mit $t_n(S) = \|T_n\|_S$ heißt **Tschebyscheff-Polynom** (zu μ) n-ten Grades.

Aus Satz 6.2 folgt

$$\frac{1}{\gamma_n} = \left(\int |P_n(z)|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int |T_n(z)|^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \leq [\mu(S)]^{\frac{1}{2}} \, t_n(S) .$$

Der Grenzwert $\operatorname{cheb}(S) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_n(S)}$ (Er existiert!) heißt **Tschebyscheff-Konstante** für S.
Wegen $\gamma_n \geq \dfrac{1}{t_n(S)} \dfrac{1}{[\mu(S)]^{\frac{1}{2}}}$ folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n} \geq \frac{1}{\operatorname{cheb}(S)} . \tag{6.1}$$

Das Maß μ heißt **vollständig regulär**, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{p}_n(z;\mu)\|_S^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{6.2}$$

gilt.

Satz 6.9 *Ist das Maß μ vollständig regulär, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\gamma_n} = \frac{1}{\operatorname{cheb}(S)} .$$

Im folgenden gehen wir auf eine alternative Definition der Tschebyscheff-Konstante ein. Sei $E \subset \mathbb{C}$ kompakt, $\mathcal{M}(E)$ sei die Menge der positiven Borelmaße ν mit $S(\nu) \subset E$ und $\nu(E) = 1$. Für $\nu \in \mathcal{M}(E)$ definieren wir das **logarithmische Potential**

$$U^{\nu}(z) := \int \log|z-t|^{-1} \, d\nu(t)$$

und die **Energie** dieses Potentials

$$I[\nu] := \int U^\nu \, d\nu = \int\int \log|z-t|^{-1} \, d\nu(t)\, d\nu(z) .$$

Wir definieren $V(E) := \inf\{I[\nu] : \nu \in \mathcal{M}(E)\}$. Die Zahl $\mathrm{cap}(E) := e^{-V(E)}$ heißt **logarithmische Kapazität** von E .

Theorem 6.10 (elektrostatisches Problem) *Ist* $\mathrm{cap}(E) > 0$, *so existiert ein eindeutig bestimmtes Maß* $\nu_E \in \mathcal{M}(E)$ *mit* $I[\nu_E] = V(E)$.

Dieses Extremalmaß heißt **Gleichgewichtsverteilung** für E . Es gilt

(a) $S(\nu_E) \subset \partial_\infty E$, $\mathrm{cap}(\partial_\infty E \setminus S(\nu_E)) = 0$,

(b) $U^{\nu_E}(z) \le V(E)\ \forall\, z \in \mathbb{C}$,

(c) $\mathrm{cap}(E) = \mathrm{cheb}(E)$.

(Dabei gilt in (b) das Gleichheitszeichen für alle $z \in E$ mit evtl. Ausnahme einer Menge der Kapazität 0 .)

Der äußere Rand $\partial_\infty E$ bestehe aus analytischen Bögen. Wir definieren die Green'sche Funktion $g_E(z)$ für $D_\infty(E)$ mit dem Pol P_∞ durch folgende Bedingungen:

- $g_E(z)$ ist harmonisch in $D_\infty(E) \setminus \{P_\infty\}$,
- $g_E(z) \longrightarrow 0$ für $z \longrightarrow \partial_\infty E,\ z \in D_\infty(E)$,
- $\exists\, \widehat{V} \in \mathbb{C} : \Big(g_E(z) - \log|z|\Big) \longrightarrow \hat{V}$ für $|z| \longrightarrow \infty$.

Aus der Green'schen Formel folgt

$$\widehat{V} - g_E(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial_\infty E} \log|z-t|^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} g_E(t)\,|dt| = \int_{\partial_\infty E} \log|z-t|^{-1} \, d\widehat{\nu} ,$$

wobei $\mathbf{n}$ die äußere Normale an $\partial_\infty E$ bezeichnet und

$$\partial\widehat{\nu} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} g_E(t)\,|dt|$$

ist.

Theorem 6.11 *Besteht* $\partial_\infty E$ *aus endlich vielen analytischen Bögen, so gilt* $\widehat{V} = V(E)$, $\widehat{\nu} = \nu_E$ *und*

$$U^{\nu_E}(z) = V(E) - g_E(z) = \log\frac{1}{\mathrm{cap}(E)} - g_E(z) .$$

Beispiel 6.12 *Für* $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ *ist*

$$g_E(z) = \log \left| \frac{z}{R} \right| ,$$

$\widehat{V} = -\log R$ *und somit* $\operatorname{cap}(E) = R = \operatorname{cheb}(E)$. *Auf* $\partial_\infty E = E$ *gilt* $|dt| = ds$ *und*

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} g(t) = \frac{1}{R} ,$$

also $d\nu_E = \dfrac{ds}{2\pi R}$.

Beispiel 6.13 *Für* $E = [-1, 1]$ *ist*

$$g_E(z) = \log \left| z + \sqrt{z^2 - 1} \right|$$

und somit $\widehat{V} = -\log \frac{1}{2}$,

$$d\nu_E = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

Für ein Polynom $Q(z)$ mit den Nullstellen $z_1, ..., z_k$,

$$Q(z) = a_0 (z - z_1)^{m_1} ... (z - z_k)^{m_k} , \quad n = m_1 + ... + m_k ,$$

und eine Menge $A \subset \mathbb{C}$ definieren wir

$$\nu^Q(A) = \frac{1}{n} \sum_{z_j \in A} m_j .$$

Theorem 6.14 *Sei* $S \subset \mathbb{C}$ *kompakt mit positiver Kapazität. Die monischen Polynome* $Q_n(z) = z^n + \cdots \in \mathbb{C}_{n+1}[z]$ *mögen den Bedingungen*

(a) $\limsup_{n \to \infty} \|Q_n\|_S^{\frac{1}{n}} \leq \operatorname{cap}(S)$

und

(b) $\lim_{n \to \infty} \nu^{Q_n}(A) = 0$ *für alle abgeschlossenen Mengen* $A \subset \operatorname{int} \operatorname{Pconv}(S)$

genügen. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \int f \, d\nu^{Q_n} = \int f \, d\nu_S \tag{6.3}$$

für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit kompaktem Träger. Dabei ist* ν_S *die Gleichgewichtsverteilung für* S.

Die Bedingung (a) bedeutet, dass die Q_n asymptotisch minimal in der ∞-Norm sind (vgl. die Definition von cheb(S) und Aussage (c) nach Theorem 6.10). Die Bedingung (b) besagt, dass die Zahl der Nullstellen von $Q_n(z)$, die in einer abgeschlossenen Menge $A \subset \operatorname{int} \operatorname{Pconv}(S)$ liegen, für $n \longrightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

Theorem 6.15 *Sei μ ein vollständig reguläres Maß, und $S(\mu)$ besitze positive Kapazität. Ferner sei* $\operatorname{int}\operatorname{Pconv}(S(\mu)) = \emptyset$. *Dann gilt* $\nu^{P_n(\cdot,\mu)} \longrightarrow \nu_{S(\mu)}$ *im Sinne von (6.3).*

Theorem 6.16 *Es gelte* $S(\mu) \subset \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *und*

$$\limsup_{n\to\infty} |P_n(0;\mu)|^{\frac{1}{n}} = \rho \leq 1\,.$$

Ferner sei $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ *eine unendliche Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}'} |P_n(0;\mu)|^{\frac{1}{n}} = \rho\,.$$

(a) Ist $0 \leq \varrho \leq 1$, *so gilt*

$$\nu^{P_n} \overset{n\in\mathbb{N}'}{\longrightarrow} \frac{ds}{2\pi\rho}$$

(*Gleichgewichtsverteilung für* $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \rho\}$).

(b) Ist $\varrho = 1$, *so gilt*

$$\nu^{P_n} \overset{n\in\mathbb{N}'}{\longrightarrow} \frac{ds}{2\pi},$$

falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |P_k(0)| = 0\,.$$

Zur Bestimmung von ρ kann man im Fall $S \subset \mathbb{T}$ z.B. die folgende Aussage verwenden: Ist $d\mu(e^{\mathrm{i}s}) = \left|D(e^{\mathrm{i}s})\right|^2 ds$ f.ü. auf $[0, 2\pi]$, so ist ρ die kleinste Zahl, für die $\dfrac{1}{D(z)}$ auf $|z| \leq \dfrac{1}{\rho}$ analytisch ist.

Beispiel 6.17 *Für*

$$d\mu(e^{\mathrm{i}s}) = \left(\frac{5}{4} - \cos s\right) ds = \left|1 - \frac{1}{2}\, e^{\mathrm{i}s}\right|^2 ds\,, \quad 0 \leq s \leq 2\pi\,,$$

erhalten wir $\rho = \frac{1}{2}$.

Kapitel 7

Orthogonale Polynome in der numerischen Analysis

7.1 Cauchysche singuläre Integralgleichungen

Wir stellen uns die Aufgabe, eine Integralgleichung der Gestalt

$$a(x)u(x) + \frac{b(x)}{\pi \mathbf{i}} \int_{-1}^{1} \frac{u(y)\,dy}{y-x} + \int_{-1}^{1} h(x,y)u(y)\,dy = f(x)\,, \quad -1 < x < 1\,, \tag{7.1}$$

numerisch zu lösen. Dabei seien $a, b, f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ und $h : [-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ gegebene Funktionen. Die Funktion $u : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ ist gesucht. Dabei machen wir folgende Annahmen:

(a) Die Funktionen a und b sind stückweise stetig. Man nennt eine Funktion $a : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ **stückweise stetig**, wenn sie in $x = \pm 1$ stetig ist, in allen Punkten $x \in (-1,1)$ die einseitigen Grenzwerte

$$a(x \pm 0) = \lim_{y \to x \pm 0} a(y)$$

existieren und einer dieser Grenzwerte gleich dem Funktionswert $a(x)$ ist. Die Menge aller stückweise stetigen Funktionen über $[-1,1]$ bezeichnen wir mit $\mathbf{PC}[-1,1] = \mathbf{PC}$.

(b) Die Funktion f möge bzgl. des Tschebyscheff-Gewichtes erster Art quadratisch summierbar sein, d.h.

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \infty\,.$$

Diese Voraussetzung schreiben wir auch in der Form $f \in \mathbf{L}^2_\sigma$, wobei $\mathbf{L}^2_\sigma$ den Hilbertraum der bzgl. des Tschebyscheff-Gewichtes $\sigma(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ über $(-1,1)$ quadratisch summierbaren Funktionen (bzw. Funktionenklassen) mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_\sigma = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\sigma(x)\,dx$$

bezeichnet. Die Lösung u der Gleichung (7.1) suchen wir ebenfalls im Raum $\mathbf{L}^2_\sigma$.

(c) Der Kern $h(x,y)$ des regulären Integrals in (7.1) sei eine stetige Funktion $h:[-1,1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$. Somit sind der Operator

$$K:\mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{C}[-1,1]\,,\quad u\mapsto \int_{-1}^1 h(.,y)u(y)\,dy$$

ebenso wie der Operator $K:\mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ kompakte Operatoren. Ist $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ den Raum der linearen und beschränkten Operatoren $A:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y}$, wobei die Norm in diesem Raum durch

$$\|A\| = \|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} = \sup\left\{\|Ax\|_{\mathbf{Y}} : \|x\|_{\mathbf{X}} \le 1\right\}$$

erklärt ist. Den Teilraum der kompakten Operatoren bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Im Fall $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$ schreiben wir $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ und $\mathcal{K}(\mathbf{X})$ anstelle von $\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{X})$ bzw. $\mathcal{K}(\mathbf{X},\mathbf{X})$. Es gilt also $K\in\mathcal{K}(\mathbf{L}^2_\sigma,\mathbf{C}[-1,1])\subset\mathcal{L}(\mathbf{L}^2_\sigma,\mathbf{C}[-1,1])\subset\mathcal{L}(\mathbf{L}^2_\sigma)$.

Mit S bezeichnen wir den singulären Integraloperator

$$S:\mathbf{L}^2_\sigma\longrightarrow\mathbf{L}^2_\sigma\,,\quad u\mapsto\frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^1\frac{u(y)\,dy}{y-.}\,,$$

wobei das Integral im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes zu verstehen ist. Bekanntlich ist das System $\left\{\widehat{T}_n\right\}_{n=0}^\infty$ der normierten Tschebyscheff-Polynome erster Art mit (vgl. Abschnitt 0.1)

$$\widehat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,,\quad \widehat{T}_n(\cos s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos ns\,,\quad n=1,2,\ldots\,,\ s\in(0,\pi)\,,$$

ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) in $\mathbf{L}^2_\sigma$. Das System $\left\{\widehat{U}_n\right\}_{n=0}^\infty$ der normierten Tschebyscheff-Polynome zweiter Art (vgl. Übungsaufgabe 0.3, 2.)

$$\widehat{U}_n(\cos s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(n+1)s}{\sin s}\,,\quad n=0,1,2,\ldots\,,$$

ist ein VONS in $\mathbf{L}^2_\varphi$, $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$. Es gilt $(S\sigma)(x)\equiv 0$, woraus man mittels der Rekursionsformeln (0.3) und

$$U_{n+1}(x)=2\,x\,U_n(x)-U_{n-1}\,,\quad n=1,2,\ldots\,,$$

die Beziehungen

$$S\sigma T_n=-\mathbf{i}\,U_{n-1}\,,\quad n=1,2,\ldots\,, \tag{7.2}$$

und analog

$$S\varphi U_n=\mathbf{i}\,T_{n+1}\,,\quad n=0,1,2,\ldots\,, \tag{7.3}$$

ableiten kann. Da offenbar $\left\{\varphi\widehat{U}_n\right\}_{n=0}^\infty$ ebenfalls ein VONS in $\mathbf{L}^2_\sigma$ ist, sieht man, dass aus (7.3) die Beziehung $\|S\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2_\sigma)}=1$ folgt.

7.2 Kollokationsverfahren

Aus den Gleichungen (7.2) und (7.3) erkennt man auch, dass man bei Gleichungen der Gestalt (7.1) sogar bei glatten Eingangsdaten (a, b, f, h) mit Singularitäten der Lösung in den Randpunkten des Integrationsintervalls rechnen muss. Aus diesem Grund machen wir für die Näherungslösung auf dem Niveau n den Ansatz

$$u_n(x) = \varphi(x) \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \widehat{U}_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{nk} \widetilde{u}_k(x) \tag{7.4}$$

mit $\widetilde{u}_k(x) = \varphi(x)\widehat{U}_k(x)$. Mit $Q_n^\omega : \mathbf{C}[-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Gaußsche Quadraturformel zum Gewicht $\omega(x)$,

$$Q_n^\omega f = \int_{-1}^1 (L_n^\omega f)(x)\omega(x)\,dx = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}^\omega f(x_{nk}^\omega)\,.$$

Dabei bezeichnet $L_n^\omega f$ das Lagrangesche Interpolationspolynom der Funktion f bzgl. der Nullstellen x_{nk}^ω des orthogonalen Polynoms n-ten Grades zum Gewicht $\omega(x)$,

$$L_n^\omega f = \sum_{k=1}^n f(x_{nk}^\omega)\ell_{nk}^\omega\,, \quad \ell_{nk}^\omega(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^n \frac{x - x_{nj}^\omega}{x_{nk}^\omega - x_{nj}^\omega} = \frac{p_n^\omega(x)}{(x - x_{nk}^\omega)(p_n^\omega)'(x_{nk}^\omega)}\,.$$

$p_n^\omega(x)$ ist das orthonormierte Polynom n-ten Grades (mit positivem Leitkoeffizienten) zum Gewicht $\omega(x)$. Wir beschränken uns hier auf klassische Jacobi-Gewichte $\omega(x) = v^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha, \beta > -1$.

Die Konstruktion eines Kollokationsverfahrens zur Bestimmung einer Näherungslösung u_n der Gestalt (7.4) für die Gleichung (7.1) kann man nun in zwei Schritten beschreiben:

1. Die Anwendung des Integraloperators K auf die gesuchte Näherungslösung u_n approximieren wir mit Hilfe der Quadraturformel Q_n^φ,

$$Q_n^\varphi K u_n =: \widetilde{K}_n u_n\,, \quad \left(\widetilde{K}_n u_n\right)(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}^\varphi h(x, x_{nk}^\varphi)\,\frac{u_n(x_{nk}^\varphi)}{\varphi(x_{nk}^\varphi)}\,, \tag{7.5}$$

wobei $x_{nk}^\varphi = \cos\dfrac{k\pi}{n+1}$, $\lambda_{nk}^\varphi = \dfrac{\pi\left[1 - \left(x_{nk}^\varphi\right)^2\right]}{n+1}$.

2. Wir betrachten die Gleichung (7.1) lediglich in den Punkten $x = x_{nj}^\omega$,

$$a(x_{nj}^\omega)u_n(x_{nj}^\omega) + \frac{b(x_{nj}^\omega)}{\pi\mathbf{i}} \int_{-1}^1 \frac{u_n(y)\,dy}{y - x_{nj}^\omega} + \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}^\varphi h(x_{nj}^\omega, x_{nk}^\varphi)\,\frac{u_n(x_{nk}^\varphi)}{\varphi(x_{nk}^\varphi)} = f_n(x_{nj}^\omega)\,, \tag{7.6}$$

$j = 1, \ldots, n$, wobei die Funktion f_n eine gewisse Approximation für die Funktion f sei.

Wir werden uns hier auf die Fälle $\omega = \sigma$ und $\omega = \varphi$ beschränken.

Die Gleichungen (7.6) stellen ein Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Koeffizienten α_{nk} in (7.4) bzw. der unbekannten Funktionswerte $u_n(x_{nk}^{\varphi})$, $k = 1, \ldots, n$, dar. Es sind nun zwei Fragen zu beantworten:

1. Unter welchen Voraussetzungen ist das Gleichungssystem (7.6) zumindest für alle hinreichend großen n eindeutig lösbar?
2. Unter welchen Voraussetzungen konvergiert die Lösung u_n^* der Kollokationsgleichungen (7.6) im Sinne der $\mathbf{L}_\sigma^2$-Konvergenz gegen eine Lösung u^* von (7.1)?

Zur theoretischen Untersuchung des beschriebenen Verfahrens und der Beantwortung dieser Fragen schreiben wir die Gleichungen (7.1) und (7.6) als Operatorgleichungen in der Form

$$Au + Ku = f\,, \quad A = aI + bS\,, \tag{7.7}$$

bzw.

$$A_n u_n + K_n u_n = f_n\,, \quad A_n = M_n^\omega A L_n\,,\ K_n = M_n^\omega \widetilde{K}_n L_n\,,\ u_n \in \operatorname{im} L_n\,, \tag{7.8}$$

wobei $L_n : \mathbf{L}_\sigma^2 \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^2$ den Orthoprojektor von $\mathbf{L}_\sigma^2$ auf den Raum der Ansatzfunktion (7.4),

$$L_n f = \sum_{k=0}^{n-1} \langle f, \widetilde{u}_k \rangle_\sigma \widetilde{u}_k$$

und M_n^ω den gewichteten Interpolationsoperator $M_n^\omega = \varphi L_n^\omega \varphi^{-1} I$ bezeichnen,

$$(M_n^\omega f)(x) = \varphi(x) \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{nk}^\omega)}{\varphi(x_{nk}^\omega)} \ell_{nk}^\omega(x) =: \sum_{k=1}^n f(x_{nk}^\omega) \widetilde{\ell}_{nk}^\omega(x)\,.$$

Wir betrachten folgende allgemeine Situation. Es seien $\mathbf{H}$ eine Hilbertraum, $Q_n : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ eine Folge von Projektoren mit abgeschlossenen Bildräumen $\operatorname{im} Q_n =: \mathbf{H}_n$ und mit der Eigenschaft $\|Q_n u - u\|_{\mathbf{H}} \longrightarrow 0\ \forall\, x \in \mathbf{H}$. Ferne seien ein Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und eine Folge von Operatoren $B_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_n)$ gegeben. Zur approximativen Lösung der Gleichung

$$Bu = f \quad \text{in} \quad \mathbf{H} \tag{7.9}$$

verwenden wir die Folge von Gleichungen

$$B_n u_n = f_n \in \mathbf{H}_n\,. \tag{7.10}$$

Definition 7.1 *Wir sagen, dass das Näherungsverfahren* (7.10) *auf die Gleichung* (7.9) *anwendbar ist, wenn ein Index n_0 existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $f_n \in \mathbf{H}_n$ die Gleichung* (7.10) *eine eindeutige Lösung $u_n^* \in \mathbf{H}_n$ besitzt und wenn für jedes $f \in \mathbf{H}$ und $\|f_n - f\|_{\mathbf{H}} \longrightarrow 0$ auch $\|u_n^* - u^*\|_{\mathbf{H}} \longrightarrow 0$ gilt, wobei $u^* \in \mathbf{H}$ eine Lösung der Gleichung* (7.9) *ist.*

7.3 Funktionalanalytische Grundlagen

Es seien jetzt $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ Banachräume und $B_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ eine Folge von Operatoren. Man sagt, dass $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen den Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

- **schwach konvergiert** (in Zeichen: $B_n \rightharpoonup B$), wenn $f(B_n u) \longrightarrow f(Bu)$ für alle Funktionale $f \in \mathbf{Y}^*$ und für alle $u \in \mathbf{X}$ gilt,
- **stark konvergiert** (In Zeichen: $B_n \longrightarrow B$), wenn $\|B_n u - Bu\|_{\mathbf{Y}} \longrightarrow 0$ für alle $u \in \mathbf{X}$ gilt,
- **gleichmäßig konvergiert** (In Zeichen: $B_n \rightrightarrows B$), wenn $\|B_n - B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} \longrightarrow 0$ gilt.

Folgerung 7.2 *Es seien $B, B_n \in \mathbf{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

1. *Es sei $\|B_n u - Bu\|_{\mathbf{Y}} \longrightarrow 0$ für alle u aus einer in $\mathbf{X}$ dichten Teilmenge $\mathbf{X}'$. Ferner gelte $\gamma := \sup\left\{\|B_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} : n = 1, 2, \ldots\right\} < \infty$. Dann gilt $B_n \longrightarrow B$.*
2. *Gilt $f(B_n u) \longrightarrow f(Bu)$ für alle u aus einer in $\mathbf{X}$ dichten Teilmenge $\mathbf{X}'$ und für alle f aus einer in $\mathbf{Y}^*$ dichten Teilmenge $(\mathbf{Y}^*)'$ und $\gamma := \sup\left\{\|B_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} : n = 1, 2, \ldots\right\} < \infty$, so folgt $B_n \rightharpoonup B$.*

Satz 7.3 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit) *Es seien $B_n \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Gilt*

$$\sup\{\|B_n u\|_{\mathbf{Y}} : n = 1, 2, \ldots\} < \infty \quad \forall\, u \in \mathbf{X},$$

so ist auch $\sup\left\{\|B_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} : n = 1, 2, \ldots\right\} < \infty$.

Satz 7.4 (Banach-Steinhaus) *Konvergiert $\{B_n u\}_{n=1}^{\infty}$ für jedes $u \in \mathbf{X}$, so ist*

$$\sup\left\{\|B_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} : n = 1, 2, \ldots\right\} < \infty,$$

der durch $Bu := \lim_{n\to\infty} B_n u$ definierte Operator $B : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ ist linear und beschränkt, und es gilt

$$\|B\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})} \le \liminf_{n\to\infty} \|B_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X},\mathbf{Y})}.$$

Folgerung 7.5

1. *Es seien $B_n \longrightarrow B$. Ist $M \subset \mathbf{X}$ eine relativ kompakte Menge, so folgt*

   $$\lim_{n\to\infty} \sup\{\|(B_n - B)u\|_{\mathbf{Y}} : u \in M\} = 0,$$

   d.h. auf einer relativ kompakten Menge ist die starke Konvergenz gleichmäßig.
2. *Aus $B_n^* \longrightarrow B^* \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$, $C_n \longrightarrow C \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{V})$ und $K \in \mathcal{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ folgt*

   $$C_n K B_n \rightrightarrows CKB.$$

3. Aus $B_n \rightharpoonup B$ *und* $K \in \mathcal{K}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ *folgt* $KB_n \longrightarrow KB$ *.*

Wir betrachten nun wieder die Gleichungen (7.9) und (7.10).

Definition 7.6 *Wir nennen die Operatorfolge* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ **stabil**, *wenn ein Index* n_0 *existiert, so dass die Operatoren* $B_n : \mathbf{H}_n \longrightarrow \mathbf{H}_n$ *für alle* $n \geq n_0$ *invertierbar sind und*

$$\sup \left\{ \left\| B_n^{-1} Q_n \right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} : n = n_0, n_0 + 1, \ldots \right\} < \infty$$

gilt.

Satz 7.7 *Es sei* $B_n Q_n \longrightarrow B$ *. Dann ist die Approximationsmethode* (7.10) *genau dann auf die Gleichung* (7.9) *anwendbar, wenn der Operator* $B : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ *invertierbar und die Operatorfolge* $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ *stabil sind.*

7.4 Konvergenz von Interpolationsprozessen

Wir listen hier einige Eigenschaften der dem Kollokationsverfahren (7.6) bzw. (7.8) zugrundeliegenden Interpolationsprozesse auf. Zu Beginn verweisen wir auf eine wichtige Abschätzung.

Lemma 7.8 ([4], Theorem 9.25) *Es seien* μ *und* ν *klassische Jacobigewichte mit der Eigenschaft* $\mu\nu \in \mathbf{L}^1(-1,1)$ *und* $j \in \mathbb{N}$ *eine fixierte Zahl. Dann gilt für jedes Polynom* $q \in \mathbb{C}_{jn+1}[x]$ *,*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{nk}^{\mu} |q(x_{nk}^{\mu})| \nu(x_{nk}^{\mu}) \leq \text{const} \int_{-1}^{1} |q(x)| \mu(x) \nu(x)\, dx\,,$$

wobei die Konstante nicht von n *und* q *abhängt.*

Nach Satz 1.25 gilt für ein Jacobigewicht $\mu(x)$ und für eine stetige Funktion $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - L_n^{\mu} f\|_{\mu} = 0\,,$$

wobei $\|.\|_{\mu} = \|.\|_{\mathbf{L}^2_{\mu}}$. Dies lässt sich wie folgt verallgemeinern. Mit $\mathbf{R} = \mathbf{R}(-1,1)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{C}$,die auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(-1,1)$ beschränkt und Riemann-integrierbar sind.

Lemma 7.9 ([2], Satz III.1.6b and Satz III.2.1) *Es sei* $\mu(x) = (1-x)^{\gamma}(1+x)^{\delta}$ *ein klassisches Jacobigewicht* $(\gamma, \delta > -1)$ *. Falls* $f \in \mathbf{R}$ *und*

$$|f(x)| \leq \text{const}(1-x)^{\varepsilon-1-\gamma}(1+x)^{\varepsilon-1-\delta}\,, \quad -1 < x < 1\,,$$

für ein gewisses $\varepsilon > 0$ *gilt, so ist* $\lim_{n\to\infty} Q_n^{\mu} f = \int_{-1}^{1} f(x)\mu(x)\, dx$ *. Falls*

$$|f(x)| \leq \text{const}(1-x)^{\varepsilon-\frac{1+\gamma}{2}}(1+x)^{\varepsilon-\frac{1+\delta}{2}}\,, \quad -1 < x < 1\,,$$

dann $\lim_{n\to\infty} \|f - L_n^{\mu} f\|_{\mu} = 0$ *.*

Folgerung 7.10 *Falls* $f \in \mathbf{R}$ *und* $|f(x)| \le \mathrm{const}(1-x^2)^{\varepsilon-\frac{1}{4}}$, $-1 < x < 1$, *für ein gewisses* $\varepsilon > 0$, *so* $M_n^\omega f \longrightarrow f$ *in* $\mathbf{L}^2_\sigma$ *für* $\omega = \sigma$ *und* $\omega = \varphi$.

Jedes $u_n \in \operatorname{im} L_n$ können wir als gewichtetes Polynom $u_n(x) = \varphi(x) p_n(x)$ mit $p_n \in \mathbb{C}_n[x]$ schreiben. Hieraus folgt

$$\|u_n\|_\sigma^2 = \int_{-1}^1 |p_n(x)|^2 \varphi(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}^\varphi |p_n(x_{nk}^\varphi)|^2$$

und somit für $a \in \mathbf{PC}$

$$\|M_n^\varphi a u_n\|_\sigma^2 = \|\varphi L_n^\varphi a p_n\|_\sigma^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}^\varphi |a(x_{nk}^\varphi) p_n(x_{nk}^\varphi)|^2 \le \|a\|_\infty^2 \sum_{k=1}^n \lambda_{nk}^\varphi |p_n(x_{nk}^\varphi)|^2 = \|a\|_\infty^2 \, \|u_n\|_\sigma^2 \,.$$

Damit gilt

$$\|M_n^\varphi a u_n\|_\sigma \le \|a\|_\infty \, \|u_n\|_\sigma \quad \forall\, u_n \in \operatorname{im} L_n\,,\ \forall\, a \in \mathbf{PC}\,. \tag{7.11}$$

Um eine analoge Abschätzung für den Interpolationsoperator M_n^σ zu erhalten, betrachten wir die Quadraturformel

$$Q_n f = \int_{-1}^1 \left(L_n^\sigma f\right)(x) \varphi(x)\, dx = \sum_{k=1}^n \sigma_{nk} f(x_{nk}^\sigma)\,,$$

wobei für $n > 2$

$$\sigma_{nk} = \frac{\pi\left[1 - \left(x_{nk}^\varphi\right)^2\right]}{n}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{7.12}$$

gilt.

Lemma 7.11 ([2], Hilfssatz 2.4, § III.2) *Für jede Funktion* $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *gilt*

$$\int_{-1}^1 \left|\left(L_n^\sigma f\right)(x)\right|^2 \varphi(x)\, dx \le 2\, Q_n |f|^2\,.$$

Unter Verwendung von Lemma 7.9 und Lemma 7.11 erhält man

$$\|M_n^\sigma a u_n\|_\sigma \le \mathrm{const}\, \|a\|_\infty \, \|u_n\|_\sigma \quad \forall\, u_n \in \operatorname{im} L_n\,,\ \forall\, a \in \mathbf{PC}\,, \tag{7.13}$$

wobei die Konstante weder von n noch von der Funktion a abhängt.

Satz 7.12 *Es seien* $a, b \in \mathbf{PC}$ *und* $\omega = \sigma$ *oder* $\omega = \varphi$. *Dann gilt*

$$M_n^\omega (aI + bS) L_n \longrightarrow aI + bS \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^2_\sigma\,.$$

7.5 Übungsaufgaben

1. Man beweise die Formeln

$$\lambda_{nk}^{\sigma} = \frac{\pi}{n}, \quad \lambda_{nk}^{\varphi} = \frac{\pi\left[1 - \left(x_{nk}^{\varphi}\right)^2\right]}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

und (7.12).

2. Man beweise die Gültigkeit der Abschätzung (7.13).

3. Man beweise (7.2) und (7.3).

4. Es sei $\mu(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $-1 < x < 1$, das Tschebyscheff-Gewicht vierter Art. Für $x = \cos s$, $0 < s < \pi$, definieren wir

$$V_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\frac{1}{2}s}, \quad \widetilde{V}_n(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\cos\frac{1}{2}s}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Man zeige, dass $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ bzw. $\left\{\widetilde{V}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ ein VONS in $\mathbf{L}^2_{\mu}$ bzw. $\mathbf{L}^2_{\mu^{-1}}$ ist und dass

$$\frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^{1}\frac{V_n(y)}{y-x}\,\mu(y)\,dy = \mathbf{i}\widetilde{V}_n(x), \quad -1 < x < 1, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

gilt.

7.6 Fredholmeigenschaften singulärer Integraloperatoren

Es seien $\mathbf{H}$ ein Hilbertraum. Einen Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ nennt man **normal auflösbar**, wenn $\overline{\operatorname{im} B} = \operatorname{im} B$ gilt. Mit $\operatorname{coker} B$ bezeichnen wir das orthogonale Komplement zu $\operatorname{im} B$ in $\mathbf{H}$. Man nennt einen normal auflösbaren Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ einen **Fredholmoperator**, wenn $\dim\ker B$ und $\dim\operatorname{coker} B$ endlich sind. Die Zahl

$$\operatorname{ind}(B) := \dim\ker B - \dim\operatorname{coker} B$$

heißt dann **Fredholmindex** von B. Mit $\Phi(\mathbf{H})$ bezeichnen wir die Menge aller Fredholmoperatoren in $\mathbf{H}$.

Satz 7.13 *Falls $B \in \Phi(\mathbf{H})$ und $K \in \mathcal{K}(\mathbf{H})$, so $B + K \in \Phi(\mathbf{H})$ und* $\operatorname{ind}(B+K) = \operatorname{ind} B$.

Wir verwenden im weiteren die Bezeichnung $\mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} := \mathbf{L}^2_{v^{\alpha,\beta}}$, $v^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Satz 7.14 *Der Operator $S : \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ ist beschränkt, falls $-1 < \alpha, \beta < 1$ gilt.*

Für zwei Funktionen $a, b \in \mathbf{PC}$ mit $a(x) - b(x) \neq 0$ definieren wir $c(x) = \dfrac{a(x)+b(x)}{a(x)-b(x)}$, $-1 < x < 1$, und

$$\mathbf{c}(x,\lambda) = \begin{cases} (1-\lambda)c(x-0) + \lambda\, c(x+0) & : \quad x \in (-1,1)\,, \\ c(1) + [1-c(1)]\mathbf{f}_\alpha(\lambda) & : \quad x = 1\,, \\ 1 + [c(-1)-1]\mathbf{f}_\beta(\lambda) & : \quad x = -1\,, \end{cases}$$

wobei

$$\mathbf{f}_\alpha(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi\alpha\lambda}{\sin \pi\alpha}\, e^{-\mathbf{i}\pi\alpha(\lambda-1)} & : \quad \alpha \in (-1,1) \setminus \{0\}\,, \\ \lambda & : \quad \alpha = 0\,. \end{cases}$$

Satz 7.15 *Es seien $a, b \in \mathbf{PC}$ und $\alpha, \beta \in (-1,1)$. Der Operator $aI + bS : \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ ist genau dann Fredholmsch, wenn $a(x) - b(x) \neq 0$ und $\mathbf{c}(x,\lambda) \neq 0$ für alle $(x,\lambda) \in [-1,1] \times [0,1]$ gilt. Dabei ist der Index gleich*

$$\operatorname{ind}(aI + bS) = -\operatorname{wind} \mathbf{c}(x,\lambda)\,,$$

und der Operator $aI + bS : \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta} \longrightarrow \mathbf{L}^2_{\alpha,\beta}$ ist wenigstens einseitig invertierbar.

7.7 Stabilität als Invertierbarkeit in einer Banachalgebra

Es seien $\mathbf{H}$ ein Hilbertraum und $L_n : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ eine Folge von Projektoren mit $L_n \longrightarrow I$. Mit $\mathcal{F}$ bezeichnen wir die Menge aller Folgen $\{A_n\} = \{A_n\}_{n=1}^\infty$ von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n)$ mit

$$\|\{A_n\}_{n=1}^\infty\| = \|\{A_n\}_{n=1}^\infty\|_{\mathcal{F}} := \sup\left\{\|A_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} : n = 1, 2, \ldots\right\} < \infty\,. \tag{7.14}$$

Wir versehen diese Menge mit den algebraischen Operationen

$$\{A_n\} + \{B_n\} = \{A_n + B_n\}\,, \quad \lambda\{A_n\} = \{\lambda A_n\}\,, \quad \{A_n\}\{B_n\} = \{A_n B_n\}\,.$$

Lemma 7.16 *$\mathcal{F}$ ist mit der in (7.14) definierten Norm eine Banachalgebra.*

Mit $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\mathcal{F}$, die alle Folgen $\{G_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|G_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} = 0$ enthält.

Lemma 7.17 *$\mathcal{G}$ ist ein (zweiseitiges) abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{F}$.*

Satz 7.18 *Die Folge $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ ist genau dann stabil, wenn die Restklasse $\{A_n\} + \mathcal{G}$ in der Faktoralgebra $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ invertierbar ist.*

Lemma 7.19 *Für alle $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ gilt*

$$\|\{A_n\} + \mathcal{G}\|_{\mathcal{F}/\mathcal{G}} = \limsup_{n\to\infty} \|A_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})}\,.$$

Folgerung 7.20 *Es seien* $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ *stabil und* $\{T_n\} \in \mathcal{F}$ *so, dass*

$$\limsup_{n\to\infty} \|T_n L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})} < \liminf_{n\to\infty} \left\|A_n^{-1} L_n\right\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H})}^{-1} .$$

Dann ist auch die Folge $\{A_n + T_n\}$ *stabil.*

Wir setzen ab jetzt voraus, dass neben $L_n \longrightarrow I$ auch $L_n^* \longrightarrow I$ gilt. Ferner sei uns eine Operatorfolge $W_n \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ gegeben, die gemeinsam mit W_n^* schwach gegen Null konvergiert und für die $L_n W_n = W_n$ und $W_n^2 = L_n$ gilt. Mit $\mathcal{F}_0$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\mathcal{F}$ der Operatorfolgen $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, für die Operatoren $A = \mathcal{W}_1\{A_n\} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ und $\widetilde{A} = \mathcal{W}_2\{A_n\} \in \mathcal{L}(\mathbf{H})$ existieren, so dass

$$A_n L_n \longrightarrow A\,, \; A_n^* L_n^* \longrightarrow A^*\,, \; \widetilde{A}_n L_n := W_n A_n W_n \longrightarrow \widetilde{A}\,, \; \widetilde{A}_n^* L_n^* \longrightarrow \widetilde{A}^*$$

gilt. Mit $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}$ bezeichnen wir die Menge der Operatorfolgen der Gestalt

$$L_n T_1 L_n + W_n T_2 W_n + C_n \quad \text{mit} \quad T_1, T_2 \in \mathcal{K}(\mathbf{H})\,, \; \{C_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{G}\,.$$

Theorem 7.21

1. $\mathcal{F}_0$ *ist eine abgeschlossene Teilalgebra von* $\mathcal{F}$.
2. *Es gilt* $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_0$, *wobei* $\mathcal{W}_1\{J_n\} = T_1$ *und* $\mathcal{W}_2\{J_n\} = T_2$ *für jede Folge*
$$\{J_n\}_{n=1}^\infty = \{L_n T_1 L_n + W_n T_2 W_n + C_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{J}\,.$$
3. $\mathcal{J}$ *ist ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal in* $\mathcal{F}_0$.
4. *Eine Folge* $\{A_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{F}_0$ *ist genau dann stabil, wenn die Operatoren* $\mathcal{W}_j\{A_n\}$, $j = 1, 2$, *in* $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ *und die Restklasse* $\{A_n\} + \mathcal{J}$ *in der Faktoralgebra* $\mathcal{F}_0/\mathcal{J}$ *invertierbar sind.*

Dieses Theorem lässt sich auf folgende Situation verallgemeinern:

- Es seien $L_n^{(\omega)} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\omega)$, $\omega \in \Omega = \{1, \ldots, M\}$, Projektoren auf den Hilberträumen $\mathbf{H}_\omega$ und $E_n^{(\omega)} : \operatorname{im} L_n \longrightarrow \operatorname{im} L_n^{(\omega)}$, $\omega \in \Omega$, invertierbare Operatoren, die zu $\mathcal{L}(\mathbf{H}, \mathbf{H}_\omega)$ gehören.
- Die Operatorfolgen $\left\{ E_n^{(\omega_1)} \left(E_n^{(\omega_2)}\right)^{-1} L_n^{(\omega_2)} \right\}_{n=1}^\infty$ konvergieren schwach gegen Null für alle Indizees $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$.
- $\mathcal{F}_0$ ist die Algebra aller Folgen $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ von Operatoren $A_n \in \mathcal{L}(\operatorname{im} L_n)$, für die Operatoren $\mathcal{W}_\omega\{A_n\} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_\omega)$ existieren, so dass für alle $\omega \in \Omega$
$$E_n^{(\omega)} A_n \left(E_n^{(\omega)}\right)^{-1} L_n^{(\omega)} \longrightarrow \mathcal{W}_\omega\{A_n\}\,, \quad \left(E_n^{(\omega)} A_n \left(E_n^{(\omega)}\right)^{-1}\right)^* \left(L_n^{(\omega)}\right)^* \longrightarrow \mathcal{W}_\omega\{A_n\}^*$$
gilt.
- $\mathcal{J}$ ist die Menge aller Folgen der Gestalt
$$\{J_n\}_{n=1}^\infty = \sum_{\omega\in\Omega} \left\{ \left(E_n^{(\omega)}\right)^{-1} L_n^{(\omega)} T_\omega E_n^{(\omega)} \right\}_{n=1}^\infty + \{C_n\}_{n=1}^\infty\,, \quad T_\omega \in \mathcal{K}(\mathbf{H}_\omega)\,, \; \{C_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{G}\,.$$

7.8 Die Operatorfolge des Kollokationsverfahrens (7.8)

Wir konstruieren die Algebra $\mathcal{F}_0$ auf folgende Weise:

- $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2_\sigma$, $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}$, $\mathbf{H}_3 = \mathbf{H}_4 = \ell^2$,

$$\ell^2 = \left\{ x = \{\xi_n\}_{n=0}^\infty : \sum_{n=0}^\infty |\xi_n|^2 < \infty \right\} , \quad \langle x, y\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^\infty \xi_n \overline{\eta_n}$$

- $L_n u = \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \widetilde{u}_k\rangle_\sigma \widetilde{u}_k$, $\quad \Longrightarrow \quad L_n^* = L_n$

- $L_n^{(1)} = L_n^{(2)} = L_n$, $L_n^{(3)} = L_n^{(4)} = P_n$,

$$P_n \{\xi_n\}_{n=0}^\infty = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}, 0, 0, \ldots\}$$

- $E_n^{(1)} = L_n$, $E_n^{(2)} = W_n$, $E_n^{(3)} = V_n^\tau$, $E_n^{(4)} = \widetilde{V}_n^\tau$, $\tau = \sigma, \varphi$,

$$\begin{aligned} W_n u &= \sum_{k=0}^{n-1} \langle u, \widetilde{u}_{n-k-1}\rangle_\sigma \widetilde{u}_k \\ V_n^\tau u &= \{\omega_n^\tau u(x_{n1}^\tau), \ldots, \omega_n^\tau u(x_{nn}^\tau), 0, 0, \ldots\} \\ \widetilde{V}_n^\tau &= \{\omega_n^\tau u(x_{nn}^\tau), \ldots, \omega_n^\tau u(x_{n1}^\tau), 0, 0, \ldots\} \ , \end{aligned}$$

$$\omega_n^\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{n}} , \quad \omega_n^\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}$$

Für das Weitere benötigen wir die Operatoren

$$J : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma , \quad u \mapsto \sum_{n=0}^\infty \gamma_n \langle u, \widetilde{u}_n\rangle_\sigma T_n ,$$

mit $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\gamma_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, und

$$V : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma , \quad u \mapsto \sum_{n=0}^\infty \langle u, \widetilde{u}_n\rangle_\sigma \widetilde{u}_{n+1} .$$

Theorem 7.22 *Es seien $a, b \in \mathbf{PC}$ und $A = aI + bS$. Dann gehört die Folge $A_n = M_n^\tau A L_n$ des Kollokationsverfahrens (7.8) zur Algebra $\mathcal{F}_0$. Dabei gilt*

$$\mathcal{W}_1\{A_n\} = A , \quad \mathcal{W}_3\{A_n\} = a(1)\mathbf{I} + b(1)\mathbf{S} , \quad \mathcal{W}_4\{A_n\} = a(-1)\mathbf{I} - b(-1)\mathbf{S}$$

und

$$\mathcal{W}_2\{A_n\} = \begin{cases} J^{-1}(aJ + b\mathrm{i}V^*) & : \ \tau = \sigma , \\ aI - bS & : \ \tau = \varphi , \end{cases}$$

wobei

$$\mathbf{S} = \begin{cases} \left[\dfrac{1-(-1)^{j-k}}{\pi \mathbf{i}(j-k)} - \dfrac{1-(-1)^{j+k+1}}{\pi \mathbf{i}(j+k+1)} \right]_{j,k=0}^{\infty} & : \ \tau = \sigma\,, \\ \left[\dfrac{2(k+1)[1-(-1)^{j-k}]}{\pi \mathbf{i}[(j+1)^2-(k+1)^2]} \right]_{j,k=0}^{\infty} & : \ \tau = \varphi\,. \end{cases}$$

Wir definieren

$$K_n = (E_n^{(3)})^{-1} \left[\ (\omega_n^\tau)^2 k(x_{nj}^\tau, x_{nk}^\tau)\varphi(x_{nk}^\tau) \ \right]_{j,k=1}^{n} E_n^{(3)} L_n$$

(vgl. (7.5)).

Lemma 7.23 *Die Funktion $k(x,y)$ sei auf $[-1,1]^2$ stetig. Für den Integraloperator K mit dem Kern $k(x,y)$ (vgl.* (7.1) *und (c) in Abschnitt 7.1) gilt dann*

$$\{M_n^\tau K L_n\} \in \mathcal{J} \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|K_n - L_n K L_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_\sigma^2)} = 0\,.$$

Einige Schritte des **Beweis**es von **Theorem 7.22**: Wir beschränken uns auf den Fall $\tau = \sigma$.

1. Gleichmäßige Beschränkheit:

   Wir wissen bereits, dass $A_n L_n \longrightarrow A$ (Satz 7.12). Es gilt

$$\begin{aligned} (V_n^\sigma)^{-1}\{\xi_0,\ldots,\xi_{n-1},0,\ldots\} &= \frac{1}{\omega_n^\sigma}\sum_{j=1}^{n} \xi_{j-1}\widetilde{\ell}_{nj}^\sigma\,, \\ (\widetilde{V}_n^\sigma)^{-1}\{\xi_0,\ldots,\xi_{n-1},0,\ldots\} &= \frac{1}{\omega_n^\sigma}\sum_{j=1}^{n} \xi_{n-j}\widetilde{\ell}_{nj}^\sigma\,. \end{aligned}$$

   Für $u_n = \varphi v_n \in \operatorname{im} L_n$ haben wir

$$\begin{aligned} \|V_n^\sigma u_n\|_{\ell^2}^2 &= \frac{\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} \left|u_n(x_{nj}^\sigma)\right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_{nk}^\sigma [1-(x_{nk}^\sigma)^2]\,|v_n(x_{nk}^\sigma)|^2 \\ &\le \text{const} \int_{-1}^{1} |v_n(x)|^2 (1-x^2)\sigma(x)\,dx \\ &= \text{const}\,\|u_n\|_\sigma^2\,. \end{aligned}$$

Für $\xi = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}, 0, \ldots\} \in \operatorname{im} P_n$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left\|(V_n^\sigma)^{-1}\xi\right\|_\sigma^2 &= \frac{n}{\pi}\int_{-1}^1 \left|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_{j-1}}{\varphi(x_{nj}^\sigma)}\,\ell_{nj}^\sigma(x)\right|^2 \varphi(x)\,dx \\
&\leq \frac{2n}{\pi}\,Q_n \left|\sum_{j=1}^n \frac{\xi_{j-1}}{\varphi(x_{nj}^\sigma)}\,\ell_{nj}^\sigma(x)\right|^2 \\
&= 2\sum_{j=1}^n [1-(x_{nj}^\sigma)^2]\frac{|\xi_{j-1}|^2}{[\varphi(x_{nj}^\sigma)]^2} \\
&= 2\,\|\xi\|_{\ell^2}^2 \,.
\end{aligned}$$

Analog behandelt man $\widetilde{V}_n^\sigma$ und $(\widetilde{V}_n^\sigma)^{-1}$. Auch die $W_n = W_n^{-1}$ sind gleichmäßig beschränkt, so dass alle zu betrachtenden Operatorfolgen diese Eigenschaft haben.

2. Bestimmung der A_n^* und deren starke Konvergenz:

   Dazu berechnen wir die Koeffizienten $\alpha_{nj}^\sigma(f)$ in der Formel

$$M_n^\sigma f = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}^\sigma(f)\widetilde{u}_j \,.$$

   Für $j = 0, \ldots, n-2$ gilt

$$\alpha_{nj}^\sigma(f) = \langle M_n^\sigma f, \widetilde{u}_j\rangle_\sigma = \langle L_n^\sigma \varphi^{-1} f, \varphi^2 U_j\rangle_\sigma \,,$$

   also

$$\alpha_{nj}^\sigma(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_j(x_{nk}^\sigma)\,, \quad j = 0, \ldots, n-2 \,.$$

   Aus $(1-x^2)U_{n-1}(x) = \frac{1}{2}\,[T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)]$ folgt

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,n-1}^\sigma(f) &= \langle L_n^\sigma \varphi^{-1} f, \varphi^2 U_{n-}\rangle_\sigma = \frac{1}{2}\langle L_n^\sigma \varphi^{-1} f, T_{n-1}\rangle_\sigma \\
&= \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{nk}^\sigma)}{\varphi(x_{nk}^\sigma)}\,T_{n-1}(x_{nk}^\sigma) = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^n f(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_{n-1}(x_{nk}^\sigma)\,.
\end{aligned}$$

   Somit ist

$$\alpha_{nj}^\sigma(f) = \varepsilon_{nj}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n f(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_j(x_{nk}^\sigma)\,, \quad \varepsilon_{nj} = \begin{cases} 1 & : \quad j = 0, \ldots, n-2\,, \\ \frac{1}{2} & : \quad j = n-1\,. \end{cases}$$

Für beliebiges $a \in \mathbf{PC}$ und beliebige $u, v \in \mathbf{L}^2_\sigma$ erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned}
\langle M_n^\sigma a L_n u, v\rangle_\sigma &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}^\sigma (aL_n u)\overline{\langle v, \widetilde{u}_j\rangle_\sigma} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{nj}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} a(x_{nk}^\sigma)\sum_{\ell=0}^{n-1}\langle u, \widetilde{u}_\ell\rangle_\sigma \widetilde{u}_\ell(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_j(x_{nk}^\sigma)\overline{\langle v, \widetilde{u}_j\rangle_\sigma} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{\pi}{n}\underbrace{\overline{\sum_{k=1}^{n}\overline{a(x_{nk}^\sigma)}\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1}\varepsilon_{nj}\langle v, \widetilde{u}_j\rangle_\sigma \widetilde{u}_j(x_{nk}^\sigma)}_{\left[\frac{1}{2}(L_{n-1}+L_n)v\right](x_{nk}^\sigma)}\widetilde{u}_\ell(x_{nk}^\sigma)}}_{\frac{1}{\varepsilon_{n\ell}}\alpha_{n\ell}^\sigma\left(\overline{a}\frac{1}{2}(L_{n-1}+L_n)v\right)}\langle u, \widetilde{u}_\ell\rangle_\sigma \\
&= \langle u, (2L_n - L_{n-1})M_n^\sigma \overline{a}\frac{1}{2}(L_{n-1}+L_n)v\rangle_\sigma
\end{aligned}$$

und somit

$$(M_n^\sigma a L_n)^* = (L_n - \frac{1}{2}L_{n-1})M_n^\sigma \overline{a}(L_{n-1}+L_n) \longrightarrow \overline{a}I\,.$$

Aus der Formel von Poincaré-Bertrand

$$\langle Su, v\rangle = \langle u, Sv\rangle \quad \forall\, u \in \mathbf{L}^2_\sigma\,,\ \forall\, v \in \mathbf{L}^2_\varphi$$

folgt, dass der adjungierte Operator zu $S : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ gleich $S^* = \varphi S \varphi^{-1} I : \mathbf{L}^2_\sigma \longrightarrow \mathbf{L}^2_\sigma$ ist. Für $j = 0, \ldots, n-2$ und $u \in \mathbf{L}^2_\sigma$ folgt

$$\begin{aligned}
\langle M_n^\sigma S L_n u, \widetilde{u}_j\rangle_\sigma &= \langle L_n^\sigma \varphi^{-1} S L_n u, \varphi^2 U_j\rangle_\sigma \\
&= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}(SL_n u)(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_j(x_{nk}^\sigma) = \langle SL_n u, L_n^\sigma \widetilde{u}_j\rangle_\sigma \\
&= \langle u, L_n \varphi S \varphi^{-1} L_n^\sigma \widetilde{u}_j\rangle_\sigma\,.
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$\langle M_n^\sigma S L_n u, \widetilde{u}_{n-1}\rangle_\sigma = \frac{1}{2}\langle u, L_n \varphi S \varphi^{-1} L_n^\sigma \widetilde{u}_{n-1}\rangle_\sigma\,,$$

so dass

$$(M_n^\sigma S L_n)^* = \frac{1}{2}L_n \varphi S \varphi^{-1} L_n^\sigma (L_{n-1}+L_n) = \frac{1}{2}\varphi S \varphi^{-1} L_n^\sigma (L_{n-1}+L_n)\,.$$

Damit lässt sich zeigen, dass $(M_n^\sigma S L_n)^* \longrightarrow \varphi S \varphi^{-1} I$.

3. Konvergenz der $W_n A_n W_n$:

   Unter Verwendung von

$$\widetilde{u}_{n-1-m}(x_{nk}^\sigma) = (-1)^{k+1}\gamma_m T_m(x_{nk}^\sigma)\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,\ m = 0, \ldots, n-1\,,$$

erhalten wir mit $\gamma_0 = \sqrt{2}$ und $\gamma_m = 1$, $m \geq 1$, für $n > m$ (m fixiert)

$$\begin{aligned}
W_n M_n^\sigma a W_n \widetilde{u}_m &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n,n-1-j}^\sigma (a\widetilde{u}_{n-1-m})\widetilde{u}_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_{n,n-1-j} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} a(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_{n-1-m}(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_{n-1-j}(x_{nk}^\sigma)\widetilde{u}_j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} a(x_{nk}^\sigma)(J\widetilde{u}_m)(x_{nk}^\sigma)T_j(x_{nk}^\sigma)}_{\langle L_n^\sigma aJ\widetilde{u}_m, T_j\rangle_\sigma} J^{-1}T_j \\
&= J^{-1}L_n^\sigma aJ\widetilde{u}_m \longrightarrow J^{-1}aJ\widetilde{u}_m \,.
\end{aligned}$$

Weiterhin ist für $n > m > 0$

$$\begin{aligned}
W_n M_n^\sigma S W_n \widetilde{u}_m &= \mathbf{i}\, W_n M_n^\sigma T_{n-m} = \frac{\mathbf{i}}{2} W_n M_n^\sigma (U_{n-m} - U_{n-m-2}) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{2} W_n M_n^\sigma \varphi^{-1}(\widetilde{u}_{n-m} - \widetilde{u}_{n-m-2}) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{2} W_n M_n^\sigma \varphi^{-1} W_n(\widetilde{u}_{m-1} - \widetilde{u}_{m+1}) \\
&= -\frac{\mathbf{i}}{2} J^{-1}L_n^\sigma \varphi^{-1} J(\widetilde{u}_{m+1} - \widetilde{u}_{m-1}) \\
&= -\frac{\mathbf{i}}{2} J^{-1}L_n^\sigma \varphi^{-1}(\gamma_{m+1}T_{m+1} - \gamma_{m-1}T_{m-1}) \\
&= \mathbf{i}\, J^{-1}L_n^\sigma \widetilde{u}_{m-1}
\end{aligned}$$

und $W_n M_n^\sigma S W_n \widetilde{u}_0 = 0$. Somit folgt

$$W_n M_n^\sigma S W_n \widetilde{u}_m = \mathbf{i} J^{-1} L_n^\sigma V^* \widetilde{u}_m \longrightarrow \mathbf{i} J^{-1} V^* \widetilde{u}_m \,.$$

4. Konvergenz der $V_n^\sigma A_n (V_n^\sigma)^{-1} P_n$:

   Mit e_m bezeichnen wir die Folge $e_m = \{\delta_{mn}\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$. Nun ist für $n > m > 0$

$$\begin{aligned}
V_n^\sigma M_n^\sigma S (V_n^\sigma)^{-1} e_{m-1} &= \frac{1}{\omega_n^\sigma} V_n^\sigma M_n^\sigma S \widetilde{\ell}_{nm}^\sigma \\
&= \frac{1}{\omega_n^\sigma} V_n^\sigma \sum_{j=1}^{n} \left(S\widetilde{\ell}_{nm}^\sigma\right)(x_{nj}^\sigma)\widetilde{\ell}_{nj}^\sigma \\
&= \left\{\left(S\widetilde{\ell}_{nm}^\sigma\right)(x_{nj}^\sigma)\right\}_{k=1}^{n} =: \left\{s_{jm}^{(n)}\right\}_{j=1}^{n} .
\end{aligned}$$

   Man kann nun zeigen, dass

$$s_{jk}^{(n)} = \begin{cases} -\dfrac{\cos\frac{k+j-1}{2n}\pi}{n\mathbf{i}\sin\frac{k+j-1}{2n}\pi} & : \quad j+k \text{ gerade}, \\[2ex] -\dfrac{\cos\frac{k-j}{2n}\pi}{n\mathbf{i}\sin\frac{k-j}{2n}\pi} & : \quad j+k \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt. Unter Verwendung der Tatsache, dass aus $\xi,\eta\in\ell^2$, $|\xi_k^n|\le|\eta_k|$, $n\ge n_0$, und $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^n=\xi_k$, $k=0,1,2,\ldots$, die ℓ^2-Konvergenz $\xi^n\longrightarrow\xi$ folgt, kann man schließen, dass

$$\left\{s_{1m}^{(n)},s_{2m}^{(n)},\ldots,s_{nm}^{(n)},0,\ldots\right\}\xrightarrow{\ell^2}\left\{\lim_{n\to\infty}s_{jm}^{(n)}\right\}_{j=1}^{\infty}=:\{s_{jm}\}_{j=1}^{\infty}$$

für $n\to\infty$ gilt, wobei

$$s_{jk}=\frac{1-(-1)^{j-k}}{\pi\mathbf{i}(j-k)}-\frac{1-(-1)^{j+k-1}}{\pi\mathbf{i}(j+k-1)}\,.$$

7.9 Eine Teilalgebra von $\mathcal{F}_0$

Mit $\mathcal{A}_0$ bezeichnen wir die kleinste abgeschlossene Teilalgebra der in Abschnitt 7.8 definierten Algebra $\mathcal{F}_0$, die alle Folgen der Gestalt $\{M_n^\tau(aI+bS)L_n\}$ mit $a,b\in\mathbf{PC}$ und die entsprechenden Folgen der adjungierten Operatoren enthält.

Theorem 7.24 *(ohne Beweis) Eine Folge $\{A_n\}\in\mathcal{A}_0$ ist genau dann stabil, wenn alle Operatoren $\mathcal{W}_\omega:\mathbf{H}_\omega\longrightarrow\mathbf{H}_\omega$, $\omega=1,2,3,4$, invertierbar sind.*

Diskussion der Stabilitätsbedingungen für Folgen der Gestalt $\{M_n^\tau(aI+bS)L_n\}$:

1. Es gibt Operatoren $aI+bS:\mathbf{L}_\sigma^2\longrightarrow\mathbf{L}_\sigma^2$, die invertierbar sind, für die aber $aI-bS:\mathbf{L}_\sigma^2\longrightarrow\mathbf{L}_\sigma^2$ nicht invertierbar ist, z.B. $a(x)\equiv\frac12$, $b(x)=-\mathbf{i}x$ (vgl. Satz 7.15).
2. Für $a,b\in\mathbf{PC}$ ist der Operator $J^{-1}(aJ+\mathbf{i}bV^*):\mathbf{L}_\sigma^2\longrightarrow\mathbf{L}_\sigma^2$ genau dann invertierbar, wenn der Operator $aI+bS:\mathbf{L}_\sigma^2\longrightarrow\mathbf{L}_\sigma^2$ invertierbar ist.
3. Es sei $\chi\in\mathbf{L}^\infty(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}=\{t\in\mathbb{C}:|t|=1\}$, mit $\chi(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{\chi}_k t^k$. Mit $T(\chi):\ell^2\longrightarrow\ell^2$ bzw. $H(\chi):\ell^2\longrightarrow\ell^2$ bezeichnen wir den Toeplitz-Operator $T(\chi)=\left[\ \widehat{\chi}_{j-k}\ \right]_{j,k=0}^{\infty}$ bzw. den Hankel-Operator $H(\chi)=\left[\ \widehat{\chi}_{j+k+1}\ \right]_{j,k=0}^{\infty}$. Ferner sei $\mathbf{PC}_0$ die Menge der stückweise stetigen Funktionen $\chi:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{C}$, die für $t\ne\pm1$ stetig sind. Wir definieren für $\chi\in\mathbf{PC}_0$

$$\mathbf{c}_{T(\chi)}(t,\lambda)=\begin{cases}\chi(t) & :\ t\in\mathbb{T}\setminus\{\pm1\}\ ,\ \lambda\in[0,1]\,,\\ \lambda\chi(t+0)+(1-\lambda)\chi(t-0) & :\ t=\pm1\,,\ \lambda\in[0,1]\,,\end{cases}$$

und

$$\mathbf{c}_{H(\chi)}(t,\lambda)=\begin{cases}0 & :\ t\in\mathbb{T}\setminus\{\pm1\}\ ,\ \lambda\in[0,1]\\ -t\mathbf{i}[\chi(t+0)-\chi(t-0)]\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & :\ t=\pm1\,,\ \lambda\in[0,1]\,.\end{cases}$$

Lemma 7.25 *Es seien $\chi_1,\chi_2\in\mathbf{PC}_0$. Dann ist der Operator $T+H:=T(\chi_1)+H(\chi_2):\ell^2\longrightarrow\ell^2$ genau dann Fredholmsch, wenn $\mathbf{c}_{T+H}(t,\lambda):=\mathbf{c}_{T(\chi_1)}(t,\lambda)+\mathbf{c}_{H(\chi_2)}(t,\lambda)\ne0$ auf $\mathbb{T}\times[0,1]$ gilt. Der Fredholmindex ist dabei gleich der negativen Windungszahl des Bildes dieser Funktion bzgl. des Nullpunktes.*

Im Fall $\tau = \sigma$ ist nun

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_\sigma = T(\phi) - H(\phi) \quad \text{mit} \quad \phi(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} t)\,,$$

so dass

$$\mathbf{c}_{\mathbf{S}_\sigma}(t,\lambda) = \begin{cases} 1 & : \ \operatorname{Im} t > 0\,, \\ -1 & : \ \operatorname{Im} t < 0\,, \\ \pm(2\lambda - 1) + 2\mathbf{i}\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & : \ t = \pm 1\,. \end{cases}$$

Lemma 7.26 *Sei $\chi \in \mathbf{L}^\infty$. Der Operator $T(\chi) + H(\chi) : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ ist genau dann invertierbar, wenn er Fredholmsch mit dem Index 0 ist.*

Da $\{\mathbf{c}_{\mathbf{S}_\sigma}(t,\lambda) : (t,\lambda) \in \mathbb{T} \times [0,1]\} = \left\{e^{\mathbf{i}s} : s \in [0,\pi]\right\}$ gilt, ist nach Lemma 7.26 (beachte $\mathbf{S}_\sigma^* = T(\phi) + H(\phi)$) der Operator $a\mathbf{I} + b\mathbf{S}_\sigma : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, $a, b \in \mathbb{C}$, genau dann invertierbar, wenn $a + be^{\mathbf{i}s} \neq 0 \ \forall\, s \in [0,\pi]$ gilt.

Im Fall $\tau = \varphi$ haben wir

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_\varphi = T(\phi) - H(\phi_1) \quad \text{mit} \quad \phi_1(t) = t^{-1}\phi(t)\,,$$

so dass

$$\mathbf{c}_{\mathbf{S}_\varphi}(t,\lambda) = \begin{cases} 1 & : \ \operatorname{Im} t > 0\,, \\ -1 & : \ \operatorname{Im} t < 0\,, \\ \pm(2\lambda - 1) \pm 2\mathbf{i}\sqrt{\lambda(1-\lambda)} & : \ t = \pm 1\,. \end{cases}$$

Unter Verwendung von Lemma 7.25 erhält man hieraus, dass für Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$ der Operator $a\mathbf{I} + b\mathbf{S}_\varphi : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ genau dann Fredholmsch mit dem Index Null ist, wenn $|a| > |b|$ gilt.

Theorem 7.27 *Es seien $a, b \in \mathbf{PC}$ und $A = aI + bS$. Die Folge $\{M_n^\sigma A L_n\}$ ist genau dann stabil, wenn der Operator $A : \mathbf{L}_\sigma^2 \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^2$ invertierbar ist. Die Folge $\{M_n^\varphi A L_n\}$ ist genau dann stabil, wenn die Operatoren A, $aI - bS : \mathbf{L}_\sigma^2 \longrightarrow \mathbf{L}_\sigma^2$ invertierbar sind.*

7.10 Numerische Aspekte

Wir berechnen die Matrixdarstellungen $\mathbf{a}_n^\tau$ und $\mathbf{S}_n^\tau$ der Operatoren $M_n^\tau a L_n : \operatorname{im} L_n \longrightarrow \operatorname{im} L_n$ und $M_n^\tau S L_n : \operatorname{im} L_n \longrightarrow \operatorname{im} L_n$, in der Basis $\left\{\widetilde{\ell}_{nn}^\tau\right\}_{k=1}^n$ des Raumes $\operatorname{im} L_n$. Offenbar ist $\mathbf{a}_n^\omega = \operatorname{diag}\left[a(x_{1n}^\omega), \ldots, a(x_{nn}^\omega)\right]$. Unter Verwendung der Beziehungen

$$T_n'(x_{nk}^\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{n(-1)^{k+1}}{\varphi(x_{nk}^\sigma)} \quad \text{und} \quad U_n'(x_{nk}^\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(n+1)(-1)^{k+1}}{[\varphi(x_{nk}^\varphi)]^2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(S\widetilde{\ell}_{nk}^\sigma\right)(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(-1)^{k+1}}{n}\,\frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)T_n(y)}{(y - x_{nk}^\sigma)(y-x)}\,dy \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(-1)^{k+1}}{n(x_{nk}^\sigma - x)}\,\frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{y - x_{nk}^\sigma} - \frac{1}{y-x}\right)\varphi(y)T_n(y)\,dy \end{aligned}$$

und analog

$$\left(S\widetilde{\ell}^{\varphi}_{nk}\right)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(-1)^{k+1}\varphi(x^{\varphi}_{nk})}{(n+1)(x^{\varphi}_{nk}-x)}\,\frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{y-x^{\varphi}_{nk}}-\frac{1}{y-x}\right)\varphi(y)U_n(y)\,dy\,.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)T_n(y)}{y-x}\,dy &= \frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)\sigma(y)T_n(y)}{y-x}\,dy\\ &= -\mathbf{i}(1-x^2)U_{n-1}(x)-\frac{1}{\pi\mathbf{i}}\int_{-1}^{1}(y+x)\sigma(y)T_n(y)\,dy\\ &= -\mathbf{i}[\varphi(x)]^2U_{n-1}(x)\end{aligned}$$

und für $j\neq k$

$$\begin{aligned}\left(S\widetilde{\ell}^{\sigma}_{nk}\right)(x^{\sigma}_{nj}) &= \frac{1}{n\mathbf{i}}\,\frac{\varphi(x^{\sigma}_{nk})-(-1)^{j+k}\varphi(x^{\sigma}_{nj})}{x^{\sigma}_{nk}-x^{\sigma}_{nj}}\,,\\ \left(S\widetilde{\ell}^{\varphi}_{nk}\right)(x^{\varphi}_{nj}) &= \frac{1}{(n+1)\mathbf{i}}\,\frac{\varphi(x^{\varphi}_{nk})[1-(-1)^{j+k}]}{x^{\varphi}_{nk}-x^{\varphi}_{nj}}\,.\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)U_{n-1}(x)] = (1-x^2)U'_{n-1}(x)-2xU_{n-1}(x) = -nT_n(x)-xU_{n-1}(x)$$

und

$$T'_{n+1}(x) = (n+1)U_n(x)$$

schließen wir

$$\left(S\widetilde{\ell}^{\sigma}_{nk}\right)(x^{\sigma}_{nk}) = -\frac{1}{n\mathbf{i}}\,\frac{x^{\sigma}_{nk}}{\varphi(x^{\sigma}_{nk})}\,,\qquad \left(S\widetilde{\ell}^{\varphi}_{nk}\right)(x^{\varphi}_{nk}) = 0\,.$$

Somit lassen sich die Einträge der Matrix $\mathbf{S}^{\tau}_n$ außerhalb der Hauptdiagonale in der Form

$$\frac{\alpha^{\tau}_k-\alpha^{\tau}_j}{x^{\tau}_{nk}-x^{\tau}_{nj}}\,\beta^{\tau}_k$$

schreiben, wobei

$$\alpha^{\sigma}_k = (-1)^k\varphi(x^{\sigma}_{nk})\,,\ \beta^{\sigma}_k = \frac{(-1)^k}{n\mathbf{i}}\,,\ \alpha^{\varphi}_k = (-1)^k\,,\ \beta^{\varphi}_k = \frac{(-1)^k\varphi(x^{\varphi}_{nk})}{(n+1)\mathbf{i}}\,.$$

Das bedeutet, dass sich $\mathbf{S}^{\tau}_n$ als Produkt einer sog. Löwner-Matrix mit einer Diagonalmatrix schreiben lässt.

Wir bezeichnen die $n \times n$ Matrix $\mathbf{a}_n^\tau + \mathbf{S}_n^\tau \mathbf{b}_n^\tau$ mit $\mathbf{A} = [a_{jk}]_{j,k=1}^n$. Für $m = 1, 2, \ldots, n$ setzen wir $\mathbf{A}_m = [a_{jk}]_{j,k=1}^m$. Die Matrix $\mathbf{A}$ besitzt eine sog. diagonale Rangreduktion

$$\mathbf{A}\,\mathrm{diag}\,[x_{nj}^\tau]_{j=1}^n - \mathrm{diag}\,[x_{nj}^\tau]_{j=1}^n \mathbf{A} = \mathbf{g}_1 \mathbf{f}_1^T + \mathbf{g}_2 \mathbf{f}_2^T\,, \tag{7.15}$$

wobei

$$\mathbf{g}_1 = [1]_{j=1}^n\,,\ \mathbf{f}_1 = [\alpha_j^\tau \beta_j^\tau b(x_{nj}^\tau)]_{j=1}^n\,,\ \mathbf{g}_2 = [-\alpha_j^\tau]_{j=1}^n\,,\ \mathbf{f}_2 = [\beta_j^\tau b(x_{nj}^\tau)]_{j=1}^n\,.$$

Im weiteren betrachten wir eine etwas allgemeinere Situation. Die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ besitze eine Rangreduktion der Gestalt

$$\mathbf{A}\,\mathrm{diag}\,[\gamma_j]_{j=1}^n - \mathrm{diag}\,[\delta_j]_{j=1}^n \mathbf{A} = \varepsilon\alpha^T - \beta\zeta^T \tag{7.16}$$

mit $\alpha = [\alpha_j]_{j=1}^n$, $\beta = [\beta_j]_{j=1}^n$, $\varepsilon = [\varepsilon_j]_{j=1}^n$, $\zeta = [\zeta_j]_{j=1}^n$. Im Fall $\gamma_j \neq \delta_k$, $j,k = 1,\ldots,n$, haben wir z.B.

$$a_{jk} = \frac{\varepsilon_j \alpha_k - \beta_j \zeta_k}{\gamma_k - \delta_j}\,, \quad j,k = 1,\ldots,n\,.$$

In dem uns vorliegenden Fall (cf. (7.15)) ist diese Struktur zwar entlang der Hauptdiagonale gestört, aber die Grundlage der folgenden Überlegungen ist lediglich die Rangreduktion (7.16), die wir verwenden, um einen Algorithmus mit $O(n^2)$-Komplexität zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{7.17}$$

für gegebenes $\mathbf{y} = [y_j]_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ zu entwickeln. Dabei setzen wir voraus, dass $\mathbf{A}_m$ für alle $m = 1, 2, \ldots, n$ regulär ist.Das folgende Lemma gilt unabhängig von der Struktur der Matrix $\mathbf{A}$.

Lemma 7.28 *Sind $\mathbf{x}_0^{m-1}$ und $\widehat{\mathbf{x}}^{m-1}$ die Lösungen von*

$$\mathbf{A}_{m-1}\mathbf{x}_0^{m-1} = [a_{jm}]_{j=1}^{m-1} \quad \textit{und} \quad \mathbf{A}_{m-1}\widehat{\mathbf{x}}^{m-1} = [y_j]_{j=1}^{m-1}\,,$$

so gilt

$$\widehat{\mathbf{x}}^m = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}^{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\eta_m}{\chi_m} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^{m-1} \\ -1 \end{bmatrix}\,,$$

wobei $\eta_m = y_m - \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk} \widehat{x}_k^{m-1}$ *und* $\chi_m = \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk} x_{0k}^{m-1} - a_{mm}$.

Im folgenden zeigen wir, dass sich die Vektoren $\mathbf{x}_0^m$, $m = 1,\ldots,n-1$, berechnen lassen mittels der Lösungen $\mathbf{x}_1^m = [x_{1j}^m]_{j=1}^m$ und $\mathbf{x}_2^m = [x_{2j}^m]_{j=1}^m$ der Gleichungen

$$\mathbf{A}_m \mathbf{x}_1^m = [\varepsilon_j]_{j=1}^m \quad \text{and} \quad \mathbf{A}_m \mathbf{x}_2^m = [-\beta_j]_{j=1}^m\,, \tag{7.18}$$

die wiederum rekursiv unter Verwendung von Lemma 7.28 bestimmbar sind. Dazu seien

$$\mathbf{D}_m(\gamma) := \mathrm{diag}\,[\gamma_j]_{j=1}^m\,, \quad \mathbf{F}_m := \begin{bmatrix} \alpha_1 & \zeta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_m & \zeta_m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}_m := \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_m & -\beta_m \end{bmatrix}\,.$$

Infolge von (7.16) ist dann

$$\mathbf{A}_m\mathbf{D}_m(\gamma) - \mathbf{D}_m(\delta)\mathbf{A}_m = \mathbf{G}_m\mathbf{F}_m^T\,, \quad m = 1,\ldots,n\,. \tag{7.19}$$

Mit $\mathbf{I}_m$ bezeichnen wir die Einheitsmatrix der Ordnung m. Weiter seien

$$\mathbf{X}_m := [x_{kj}^m]_{j=1,k=1}^{m\ \ 2} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_m = \gamma_{m+1}\mathbf{I}_m - \mathbf{D}_m(\gamma) + \mathbf{X}_m\mathbf{F}_m^T\,.$$

Aus (7.19) und (7.18) folgt

$$\mathbf{A}_m\mathbf{K}_m^{-1} = [\gamma_{m+1}\mathbf{I}_m - \mathbf{D}_m(\delta)]^{-1}\mathbf{A}_m$$

und somit

$$\mathbf{A}_m\mathbf{K}_m^{-1}\mathbf{X}_m\mathbf{F}_{m+1}^T\mathbf{e}_{m+1} = [a_{j,m+1}]_{j=1}^m\,, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{x}_0^m = \mathbf{K}_m^{-1}\mathbf{X}_m\mathbf{F}_{m+1}^T\mathbf{e}_{m+1}\,,$$

wobei $\mathbf{e}_{m+1} = [\delta_{j,m+1}]_{j=1}^{m+1}$. Die Inverse der Matrix $\mathbf{K}_m$ gestattet die darstellung

$$\mathbf{K}_m^{-1} = [\gamma_{m+1}\mathbf{I}_m - \mathbf{D}_m(\gamma)]^{-1}\left(\mathbf{I}_m - \mathbf{X}_m\mathbf{R}_m^{-1}\mathbf{F}_m^T[\gamma_{m+1}\mathbf{I}_m - \mathbf{D}_m(\gamma)]^{-1}\right)$$

mit $\mathbf{R}_m = \mathbf{I}_2 + \mathbf{F}_m^T[\gamma_{m+1}\mathbf{I}_m - \mathbf{D}_m(\gamma)]^{-1}\mathbf{X}_m$. Zusammenfassend erhalten wir für $m < n$ die Formel

$$x_{0k}^m = \frac{\rho_{m2}x_{1k}^m + \rho_{m1}x_{2k}^m}{\rho_m(\gamma_{m+1} - \gamma_k)}\,, \quad k = 1,\ldots,m\,, \tag{7.20}$$

wobei

$$\rho_m = \alpha_{m1}\zeta_{m2} - \alpha_{m2}\zeta_{m1}\,,$$

$$\rho_{m1} = \zeta_{m+1}\alpha_{m1} - \alpha_{m+1}\zeta_{m1}\,, \quad \rho_{m2} = \alpha_{m+1}\zeta_{m2} - \zeta_{m+1}\alpha_{m2}\,,$$

$$\alpha_{m1} = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k x_{1k}^m}{\gamma_{m+1} - \gamma_k}\,, \qquad \alpha_{m2} = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k x_{2k}^m}{\gamma_{m+1} - \gamma_k}\,,$$

$$\zeta_{m1} = \sum_{k=1}^m \frac{\zeta_k x_{1k}^m}{\gamma_{m+1} - \gamma_k}\,, \qquad \zeta_{m2} = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\zeta_k x_{2k}^m}{\gamma_{m+1} - \gamma_k}\,.$$

Also: Gestattet die Matrix des Gleichungssystems (7.17) eine Rangreduktion der Gestalt (7.16) (vgl. (7.15)), so kann man abwechselnd Lemma 7.28 und (7.20) anwenden, um die Lösung $\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{x}}^n = [\xi_{jn}]_{j=1}^n$ von (7.17) mit $O(n^2)$ wesentlichen Operationen zu berechnen.

Eine Ide zur weiteren Reduktion der Komplexität:

Wir beschränken uns auf den Fall $\tau = \varphi$ und erinnern daran, dass die Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n$ in der Form

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{a}_n^\varphi + \mathbf{S}_n^\varphi\mathbf{b}_n^\varphi = \mathbf{a}_n^\varphi + \mathbf{S}_n^0\mathbf{D}_n(\beta)\mathbf{b}_n^\varphi$$

geschrieben werden kann, wobei

$$\mathbf{S}_n^0 = \left[\frac{\alpha_k^\varphi - \alpha_j^\varphi}{x_{nk}^\varphi - x_{nj}^\varphi}\right]_{j,k=1}^n = \mathbf{C}_n\mathbf{D}_n(\alpha) - \mathbf{D}_n(\alpha)\mathbf{C}_n\,.$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{C}_n$ die Cauchy-Matrix

$$\mathbf{C}_n = \left[\frac{1}{x_{nk}^{\varphi} - x_{nj}^{\varphi}} \right]_{j,k=1}^{n}$$

mit Nullen entlang der Hauptdiagonale. Mittels der diskreten Sinustransformation

$$\mathbf{S}_n^1 = \left[\sin \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{j,k=1}^{n}$$

und der tridagonalen Matrix $\Gamma_n = \mathrm{tridiag}[-\mathbf{c}, \mathbf{0}, \mathbf{c}]$ mit $\mathbf{c} = \frac{1}{2}[3, 5, \ldots, 2n-1]$ sowie der Diagonalmatrix $\mathbf{D}_n = \mathrm{diag}\left[(-1)^k \sin \frac{k\pi}{n+1}\right]_{k=1}^{n}$ gestattet $\mathbf{C}_n$ die Darstellung

$$\mathbf{C}_n = -\frac{1}{n+1} \mathbf{D}_n^{-1} \mathbf{S}_n^1 \Gamma_n \mathbf{S}_n^1 \mathbf{D}_n^{-1}\,.$$

Da die diskrete Sinustransformation mit $O(n \log n)$ Komplexität realisiert werden kann, gilt dies auch für die Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathbf{A}_n \mathbf{x}$. Aus diesem Grunde scheint eine geeignete iterative Methode zur Lösung von (7.17), z.B. der GMRES-Algorithmus, von Interesse zu sein.

Die Idee des GMRES-Algorithmus zur iterativen Lösung des Gleichungungssystems (7.17) besteht in der Minimierung der Residuumnorm $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|$ für $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{z}$,

$$\mathbf{z} \in \mathbb{K}_k = \mathrm{span}\left\{ \mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \ldots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0 \right\},$$

wobei $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Dazu berechnet man eine orthogonale Basis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}\}$ in $\mathbb{K}_k$, d.h.

1. Wähle $\mathbf{x}_0$ und berechne $\mathbf{r}_0 := \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ sowie $\mathbf{v}_1 := \|\mathbf{r}_0\|^{-1}\,\mathbf{r}_0$.
2. $j = 1, 2, \ldots, k$:
   - $h_{ij} := \langle \mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, j$,
   - $\widehat{\mathbf{v}}_{j+1} := \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij}\mathbf{v}_i$,
   - $h_{j+1,j} := \|\widehat{\mathbf{v}}_{j+1}\|$,
   - $\mathbf{v}_{j+1} := h_{j+1,j}^{-1}\widehat{\mathbf{v}}_{j+1}$.

Wir definieren die Matrizen $\mathbf{H}_k \in \mathbb{C}^{(k+1)\times k}$ und $\mathbf{V}_k$ durch

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1k} \\ h_{21} & h_{22} & & h_{2k} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & h_{kk} \\ \mathbf{0} & & & h_{k+1,k} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $\mathbf{AV}_k = \mathbf{V}_{k+1}\mathbf{H}_k$ und das Minimierungsproblem

$$\min\{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{z})\| : \mathbf{z} \in \mathbb{K}_k\} = \min\{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{Az}\| : \mathbf{z} \in \mathbb{K}_k\}$$

ist äquivalent zu

$$\min\left\{\mathcal{J}(\mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \mathbb{C}^k\right\}, \tag{7.21}$$

wobei $\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \|\gamma\mathbf{v}_1 - \mathbf{AV}_k\mathbf{w}\|$, $\gamma = \|\mathbf{r}_0\|$. Durch Anwendung des QR-Algorithmus auf die Matrix $\mathbf{H}_k$ erhält man

$$\mathbf{Q}_k\mathbf{H}_k = \mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} & \widetilde{\mathbf{R}}_k & \\ & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

mit einer unitären Matrix $\mathbf{Q}_k$, so dass

$$\mathcal{J}(\mathbf{w}) = \|\gamma\mathbf{V}_{k+1}\mathbf{e}_1 - \mathbf{V}_{k+1}\mathbf{H}_k\mathbf{w}\| = \|\gamma\mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_k\mathbf{w}\| = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{R}_k\mathbf{w}\| ,$$

wobei $\mathbf{y}_k = \mathbf{Q}_k(\gamma\mathbf{e}_1)$. Folglich ist die Lösung des Problems (7.21) gegeben durch $\mathbf{w} = \mathbf{w}_k = \widetilde{\mathbf{R}}_k^{-1}\widetilde{\mathbf{y}}_k$, wobei

$$\widetilde{\mathbf{y}}_k = \begin{bmatrix} (\mathbf{y}_k)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{y}_k)_k \end{bmatrix}$$

und für $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{w}_k$ gilt $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}_k\mathbf{x}_k\| = \left|(\mathbf{y}_k)_{k+1}\right|$. SOmit kann man die Residuumnorm verfolgen, ohne $\mathbf{w}_k$ in jedem Schritt berechnen zu müssen.