Skript zur Vorlesung

Orthogonale Polynome

SS 2002

Peter Junghanns

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon & Breach, New York, 1978.

[2] G. Freud, Orthogonale Polynome, Berlin, 1969.

[3] I. P. Natanson, Konstruktive Funktionentheorie, Berlin, 1955.

[4] P. G. Nevai, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1979.

[5] P. Nevai, Orthogonal Polynomials, Theory and Practice, NATO ASI Series C, Vol. 294, 1990.

[6] N. Obreschkoff, Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome, Berlin, 1963.

[7] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1939.

Kapitel 0

Einleitung

0.1 Orthogonalität

Aus der trigonometrischen Beziehung

$$2 \cos m\theta \, \cos n\theta = \cos(m+n)\theta + \cos(m-n)\theta \tag{0.1}$$

folgt bekanntlich

$$\int_0^\pi \cos m\theta \, \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \, , \\ \pi & , \quad m = n = 0 \, , \\ \dfrac{\pi}{2} & , \quad m = n = 1, 2, \ldots \, . \end{cases} \tag{0.2}$$

Mit $x = \cos\theta$ und $T_n(x) = \cos n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, folgt ebenfalls aus (0.1) für $m = 1$

$$2\, x \, T_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) \tag{0.3}$$

bzw.

$$T_{n+1}(x) = 2\, x \, T_n(x) - T_{n-1}(x) \, , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{0.4}$$

Wegen $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$ zeigt die rekursive Beziehung (0.4), dass $T_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem **Leitkoeffizienten** 2^{n-1} für $n = 1, 2, \ldots$ ist. Aus (0.2) folgt

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n \, , \\ \pi & , \quad m = n = 0 \, , \\ \frac{\pi}{2} & , \quad m = n = 1, 2, \ldots \, . \end{cases} \tag{0.5}$$

$T_n(x)$ nennt man TSCHEBYSCHEFF**-Polynom erster Art und n-ten Grades**, die Funktion $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ TSCHEBYSCHEFF**-Gewicht erster Art**.
Allgemeiner kann man nun wie folgt vorgehen. Es sei $\omega \in \mathbf{L}^1(a,b)$ eine nichtnegative Funktion mit folgenden zwei Eigenschaften ($a = -\infty$ und/oder $b = \infty$ sind zugelassen):

1. Es gilt $\displaystyle\int_a^b \omega(x) \, dx > 0$.

2. Die **Momente** $\mu_n := \int_a^b x^n \omega(x)\, dx$, $n = 1, 2, \dots$, zum Gewicht $\omega(x)$ sind alle endlich.

Eine Folge $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ von Polynomen n-ten Grades nennt man dann eine Folge **orthogonaler Polynome** bzgl. des Gewichtes $\omega(x)$ (ω-orthogonal), wenn die Bedingung

$$\int_a^b P_m(x) P_n(x) \omega(x)\, dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n \tag{0.6}$$

erfüllt ist. Definieren wir $\Omega(x) = \int_a^x \omega(t)\, dt$, so können wir (0.6) auch in der Form

$$\int_a^b P_m(x) P_n(x)\, d\Omega(x) = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n \tag{0.7}$$

schreiben. Mit $\mathbf{L}^1(a, b; \Omega)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller bezüglich des Maßes $\Omega(x)$ auf (a, b) summierbaren (komplexwertigen) Funktionen. Wir setzen

$$\mathcal{L}[f] := \int_a^b f(x) \omega(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, d\Omega(x)$$

für $f \in \mathbf{L}^1(a, b; \Omega)$. Dann ist

$$\mathcal{L}[M_n] = \mu_n\,, \quad M_n(x) = x^n\,, \tag{0.8}$$

und (0.6) lässt sich in der Form

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n \tag{0.9}$$

schreiben. $\mathcal{L}$ ist ein lineares Funktional auf $\mathbf{L}^1(a, b; \Omega)$.
Wir gehen nun umgekehrt vor: Gegeben sei eine Momentenfolge $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Auf dem linearen Raum $\mathbb{C}[x]$ aller Polynome (mit komplexen Koeffizienten) definieren wir das lineare Funktional $\mathcal{L}$ mittels (0.8). Genügt eine Folge $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ von Polynomen $P_n(x)$ n-ten Grades den Beziehungen (0.9) und zusätzlich den Bedingungen

$$\mathcal{L}[P_n^2] \neq 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

so nennen wir diese Folge eine **Folge orthogonaler Polynome bezüglich des Funktionals** $\mathcal{L}$. Es ergibt sich die folgende Frage:

Wann existiert eine solche Folge?

Eine Antwort auf diese Frage geben wir im folgenden Kapitel.

0.2 Erzeugende Funktion

Wir betrachten die Funktion zweier Veränderlicher ($a \neq 0$)

$$G(x, w) = e^{-aw}(1 + w)^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m w^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} w^n\,. \tag{0.10}$$

Bilden wir das Cauchy-Produkt der beiden Reihen in (0.10), so erhalten wir

$$G(x,w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n \tag{0.11}$$

mit

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!}\,. \tag{0.12}$$

Wegen $\binom{x}{k} = \frac{1}{k!}\, x(x-1)\cdots(x-k+1)$ ist $P_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades. $G(x,w)$ heißt **erzeugende Funktion** der Polynome $P_n(x)$, die auch CHARLIER-**Polynome** genannt werden. Aus (0.10) folgt

$$a^x G(x,v)G(x,w) = e^{-a(v+w)}[a(1+v)(1+w)]^x$$

und somit

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= e^{-a(v+w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a(1+v)(1+w)]^k}{k!} \\ &= e^{-a(v+w)} e^{a(1+v)(1+w)} = e^a e^{avw} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a a^n (vw)^n}{n!}\,. \end{aligned} \tag{0.13}$$

Unter Verwendung von (0.11) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m,n=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k) v^m w^n \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k) \frac{a^k}{k!} \right) v^m w^n\,. \end{aligned} \tag{0.14}$$

Koeffizientenvergleich in (0.13) und (0.14) liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k) \frac{a^k}{k!} = \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n\,, \\ \dfrac{e^a a^n}{n!} & , \quad m = n\,. \end{cases} \tag{0.15}$$

Definieren wir also

$$\mathcal{L}[M_n] = \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!} \quad \text{(diskrete Masseverteilung)}\,,$$

so folgt aus (0.15)

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = \frac{e^a a^n}{n!}\, \delta_{mn}\,, \quad \delta_{mn} := \begin{cases} 0 & , \quad m \neq n\,, \\ 1 & , \quad m = n\,. \end{cases}$$

Definieren wir ferner $\Omega : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass

1. $\Omega(x)$ auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(k, k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, konstant ist,
2. $\Omega(k+0) - \Omega(k-0) = \dfrac{a^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, gilt,

so können wir (0.15) auch in der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x) P_n(x) \, d\Omega(x) = \frac{e^a a^n}{n!} \delta_{mn}$$

schreiben.

0.3 Übungsaufgaben

1. Wir definieren

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \mathbf{D}^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, \dots, \ \mathbf{D} = \frac{d}{dx}.$$

   (a) Beweisen Sie, dass für die TSCHEBYSCHEFF-Polynome $T_n(x)$ erster Art die Gleichheit

$$T_n(x) = \tilde{T}_n(x), \ n = 1, 2, \dots,$$

   gilt.

   (b) Verwenden Sie diese Darstellung von $T_n(x)$ zum Beweis der Orthogonalitätsrelationen (0.5).

2. Die TSCHEBYSCHEFF-Polynome $U_n(x)$ zweiter Art können durch die Formel

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\vartheta]}{\sin \vartheta}, \ x = \cos \vartheta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

   definiert werden.

   (a) Zeigen Sie, dass $U_n(x)$ ein Polynom (in x) n-ten Grades ist und dass die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{-1}^{1} U_m(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn} \tag{0.16}$$

   erfüllt sind.

   (b) Beweisen Sie die Formel

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)}{(2n+1)!! \sqrt{1-x^2}} \mathbf{D}^n (1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

   und verwenden Sie diese zum Beweis der Orthogonalitätsrelationen (0.16).

3. Unter Verwendung der Formel von MOIVRE leite man explizite Ausdrücke für $T_n(x)$ und $U_n(x)$ in Potenzen von x und $1 - x^2$ her.

4. Für $x = \cos\vartheta$ definieren wir
$$R_n(x) = \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\vartheta]}{2\cos\frac{\vartheta}{2}}\,, \quad n = 0,1,2,\dots$$
Beweisen Sie
   (a) $R_n(x) = \dfrac{1}{2(1+x)}[T_n(x) + T_{n+1}(x)],\ n = 0,1,2,\dots\,,$
   (b) $R_0(x) = \dfrac{1}{2}\,,\ R_1(x) = x - \dfrac{1}{2}\,,\ R_{n+1}(x) = 2xR_n(x) - R_{n-1}(x)\,,\ n = 1,2,\dots\,,$
   (c) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} R_m(x)R_n(x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}\,.$

5. Es sei $F(x,w) = e^{-(x-w)^2}$. Beweisen Sie
   (a) $H_n(x) = e^{x^2}\dfrac{\partial^n}{\partial w^n}F(x,0) = e^{x^2}(-1)^n\mathbf{D}^n e^{-x^2}$ ist ein Polynom n-ten Grades,
   (b) $G(x,w) := e^{2xw-w^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{w^n}{n!}\,,$
   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,v)G(x,w)e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{2vw}$ $\Big($Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\Big)$,
   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!\,\delta_{mn}\,.$

   $H_n(x)$ ist das sogenannte HERMITE-Polynom n-ten Grades.

6. Beweisen Sie
   (a) $H_{n+1}(x) = 2x\,H_n(x) - 2n\,H_{n-1}(x)$
   (Hinweis: $\mathbf{D}^{n+1}e^{-x^2} = -2x\,\mathbf{D}^n e^{-x^2} - 2n\,\mathbf{D}^{n-1}e^{-x^2}$),
   (b) $\mathbf{D}H_n(x) = 2x\,H_n(x) - H_{n+1}(x) = 2n\,H_{n-1}(x)\,,$
   (c) $\mathbf{D}^2 H_n(x) - 2x\,\mathbf{D}H_n(x) + 2n\,H_n(x) = 0\,.$

7. Es sei $H(x,w) = (1-2xw+w^2)^{-\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)w^n$. Zeigen Sie, dass
   (a) $(1-2xw+w^2)\dfrac{\partial}{\partial w}H - (x-w)H = 0\,,$
   (b) $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)\,,\ n = 1,2,\dots\,,$
   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn}$ und $P_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!}\,\mathbf{D}^n(1-x^2)^n\,,\ n = 0,1,2,\dots$

   Wegen $P_0(x) = 1\,,\ P_1(x) = x$ und (b) ist $P_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades, das sogenannte n-te LEGENDRE-Polynom.

Kapitel 1

Elementare Theorie der orthogonalen Polynome

1.1 Momentenfunktionale. Existenz orthogonaler Polynomsysteme

Definition 1.1 *Für eine gegebene Zahlenfolge* $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *definieren wir das dieser Folge entsprechende* **Momentenfunktional** $\mathcal{L}$ *auf dem linearen Raum* $\mathbb{C}[x]$ *durch*

$$\mathcal{L}[M_n] = \mu_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,,\; M_n(x) = x^n\,,$$

und

$$\mathcal{L}[\alpha_1\pi_1 + \alpha_2\pi_2] = \alpha_1\mathcal{L}[\pi_1] + \alpha_2\mathcal{L}[\pi_2]\,, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}\,,\; \pi_j \in \mathbb{C}[x]\,.$$

Die Zahl μ_n *heißt* **Moment** n**-ter Ordnung**.

Die Koeffizienten der Polynome sind i.a. komplexe Zahlen, während die unabhängige Variable x stets als reell betrachtet wird.

Definition 1.2 *Eine Folge* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}[x]$ *heißt* **orthogonales Polynomsystem** *(OPS) bzgl. des Momentenfunktionals* $\mathcal{L}$, *wenn* $\forall\, m, n = 0, 1, 2, \dots$ *folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\deg P_n = n\,,$
2. $\mathcal{L}[P_mP_n] = k_n\delta_{mn}\,, \quad k_n \neq 0\,.$

Im Fall $k_n = 1\,,\; n = 0, 1, 2, \dots\,,$ *nennt man* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ein* **orthonormales** *Polynomsystem (ONPS).*

Man sieht sofort, dass nicht für alle Folgen $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ ein OPS existiert, z.B. falls $\mu_0 = 0$. Es existiert z.B. aber auch kein OPS, wenn $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ ist, denn sonst wäre für $P_0(x) = a$ und $P_1(x) = bx + c$

$$0 = \mathcal{L}[P_0P_1] = a(b + c)\,,\; \text{d.h. } c = -b$$

und somit

$$\mathcal{L}[P_1^2] = \mathcal{L}[b^2(x-1)^2] = b^2(\mu_2 - 2\mu_1 + \mu_0) = 0\,.$$

Mit $\mathbb{C}_n[x]$ bezeichnen wir im weiteren den n-dimensionalen Teilraum von $\mathbb{C}[x]$ aller Polynome, deren Grad kleiner als n ist.

Satz 1.3 *Es seien $\mathcal{L}$ ein Momentenfunktional und $\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}[x]$ eine Folge von Polynomen mit* $\deg P_n = n$. *Dann sind folgende Aussagen zueinander äquivalent:*

(a) $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ist OPS bzgl.* $\mathcal{L}$.

(b) $\forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt*

$$\mathcal{L}[\pi P_n] = 0 \quad \forall\, \pi \in \mathbb{C}_n[x]$$

und

$$\mathcal{L}[\pi P_n] \neq 0 \quad \forall \pi \in \mathbb{C}[x] \text{ mit } \deg \pi = n\,.$$

(c) $\forall\, n = 0, 1, 2, \ldots$ *gilt*

$$\mathcal{L}[M_m P_n] = \widetilde{k}_n \delta_{mn}\,, \quad m = 0, 1, \ldots, n\,,\ \widetilde{k}_n \neq 0\,.$$

Bemerkung 1.4 *Es sei $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS.*

(a) Aus $\pi = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k P_k \in \mathbb{C}[x]$ *folgt* $\gamma_k = \dfrac{\mathcal{L}[\pi P_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

(b) Ist $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein weiteres OPS bzgl. $\mathcal{L}$, so folgt aus (a) und Satz 1.3,(b)

$$Q_n = \delta_n P_n\,,\ \delta_n \neq 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(c) Sind alle $P_n(x)$ monisch, d.h. $P_n(x) = x^n + \cdots$, so heißt $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ **monisches** *OPS.*

(d) Das Polynomsystem $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit

$$p_n(x) = \left(\mathcal{L}[P_n^2]\right)^{-\frac{1}{2}} P_n(x)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,,$$

ist ein ONPS bzgl. $\mathcal{L}$.

Für eine gegebene Momentenfolge $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieren wir

$$\Delta_n = \det(\mu_{j+k})_{j,k=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}\,.$$

Satz 1.5 *Es sei $\mathcal{L}$ ein Momentenfunktional mit der Folge $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$. Für die Existenz eines OPS bzgl. $\mathcal{L}$ ist notwendig und hinreichend, dass*

$$\Delta_n \neq 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,,$$

gilt.

Beweis. Es sei $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS bzgl. $\mathcal{L}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} x^k$. Aus Satz 1.3,(c) folgt dann

$$\mathcal{L}[M_m P_n] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} \mu_{k+m} = \widetilde{k}_n \delta_{mn}\,,\ m \leq n\,,\ \widetilde{k}_n \neq 0\,,$$

d.h.

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{n0} \\ \gamma_{n1} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \widetilde{k}_n \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Aus Bemerkung 1.4,(a),(b) folgt, dass $P_n(x)$ für gewähltes $\widetilde{k}_n$ eindeutig bestimmt ist, was die eindeutige Lösbarkeit von (1.1) bedeutet. Ist umgekehrt $\Delta_n \neq 0$, so ist (1.1) eindeutig lösbar, d.h. $P_n(x)$ existiert, und es gilt

$$\gamma_{nn} = \frac{\widetilde{k}_n \Delta_{n-1}}{\Delta_n} \neq 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{1.2}$$

wobei wir $\Delta_{-1} = 1$ gesetzt haben. □

Es seien $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS bzgl. $\mathcal{L}$ und $\pi_n \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom n-ten Grades mit dem Leitkoeffizienten α_n, d.h. $\pi_n(x) = \alpha_n x^n + \cdots$. Dann gilt wegen (1.2)

$$\mathcal{L}[\pi_n P_n] = \alpha_n \widetilde{k}_n = \frac{\alpha_n \gamma_n \Delta_n}{\Delta_{n-1}}\,, \tag{1.3}$$

wobei γ_n den Leitkoeffizienten von $P_n(x)$ bezeichnet.

Definition 1.6 *Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ heißt* **positiv definit**, *wenn $\mathcal{L}[\pi] > 0$ für jedes Polynom $\pi \in \mathbb{C}[x]$ mit $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, und $\pi(x) \not\equiv 0$ gilt.*

Ist $\mathcal{L}$ positiv definit, so folgt

1. $\mu_{2n} = \mathcal{L}[M_{2n}] > 0$, $n = 0, 1, \dots$,

und wegen $0 < \mathcal{L}[(x+1)^{2n}] = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \mu_k$

2. $\mu_{2n-1} \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$

Ferner kann man mittels

3. $\langle p, q\rangle := \mathcal{L}[p\overline{q}]$

auf $\mathbb{C}[x]$ ein (positiv definites) Skalarprodukt definieren. Der Schmidtsche Orthogonalisierungsprozess mit $\{M_0, M_1, M_2, \ldots\}$ liefert dann ein ONPS $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $P_n \in \mathbb{R}[x]$.

Lemma 1.7 *Für $\pi \in \mathbb{C}[x]$ gilt $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, genau dann, wenn Polynome $p, q \in \mathbb{R}[x]$ existieren, so dass $\pi(x) = [p(x)]^2 + [q(x)]^2$ gilt.*

Beweis. Ist $\pi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, so ist offenbar π ein Element von $\mathbb{R}[x]$. Ferner haben alle reellen Nullstellen gerade Vielfachheit. Es existieren also $r \in \mathbb{R}[x]$ und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\pi(x) = [r(x)]^2 \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k - \mathbf{i}\beta_k)(x - \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k)$$

gilt. Mit der Bezeichnung $A(x) + \mathbf{i}B(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k)$, wobei $A, B \in \mathbb{R}[x]$, folgt

$$\pi(x) = [r(x)]^2 \left([A(x)]^2 + [B(x)]^2\right) .$$

□

Satz 1.8 *Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Momente reell sind und $\Delta_n > 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.*

Beweis. Hinlänglichkeit. Nach Satz 1.5 existiert ein monisches OPS $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ bzgl. $\mathcal{L}$. Aus (1.3) folgt

$$\widetilde{k}_n = \mathcal{L}[P_n^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} ,$$

und wegen (1.1) sind alle Polynome P_n aus $\mathbb{R}[x]$. Für eine beliebiges Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, $p(x) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k P_k(x)$, $\alpha_m \neq 0$, gilt somit

$$\mathcal{L}[p^2] = \sum_{j,k=0}^{m} \alpha_j \alpha_k \mathcal{L}[P_j P_k] = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k^2 \mathcal{L}[P_k^2] > 0 .$$

Infolge von Lemma 1.7 ist $\mathcal{L}$ also positiv definit.

Notwendigkeit. Es existiert ein monisches OPS bzgl. $\mathcal{L}$. Nach Definition 1.6 und (1.3) gilt somit

$$0 < \mathcal{L}[P_n^2] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Aus $\Delta_{-1} = 1$ folgt somit $\Delta_n > 0$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ □

Folgerung 1.9 *Aus dem Beweis von Satz 1.8 erkennt man, dass ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ positiv definit ist, falls ein OPS $\{P_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}[x]$ mit der Eigenschaft $\mathcal{L}[P_n^2] > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, existiert.*

Definition 1.10 *Ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ nennt man* **quasi-definit**, *falls $\Delta_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, gilt.*

1.2 Übungsaufgaben

1. Es sei $\mathcal{L}[M_n] = a^n$, $n \geq 0$. Man zeige, dass für $\mathcal{L}$ kein OPS existiert.

2. Man zeige, dass es **kein** Momentenfunktional gibt, für das $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS ist.

3. Es seien $\mathcal{L}$ ein Momentenfunktional, für welches ein OPS existiert, und $\{c_n\}$ eine Folge von Null verschiedener Zahlen. Man zeige, dass jede der folgenden Bedingungen das OPS $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ zu $\mathcal{L}$ eindeutig bestimmt.

   (a) $P_n(x_0) = c_n$, $n \geq 0$

   (b) $\mathcal{L}[M_n P_n] = c_n$, $n \geq 0$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} x^n P_n(1/x) = c_n$, $n \geq 0$

4. Für ein Momentenfunktional $\mathcal{L}$ definieren wir $\mathcal{M}[M_n] = \mathcal{L}[(a\,M_1 + b)^n]$, $n \geq 0$, wobei $a \neq 0$ und b beliebige, aber fest gewählte Zahlen sind. Man finde für gegebenes monisches OPS $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ zu $\mathcal{L}$ das entsprechende monische OPS zu $\mathcal{M}$.

5. Ausgehend von bekannten Polynomsystemen bestimme man Polynomsysteme $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, welche den folgenden Bedingungen genügen:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 P_m(x)\,P_n(x)\,(1-x)^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}dx = k_n\delta_{mn}\,,\ k_0 = \pi\,,\ k_n = \frac{\pi}{2}\,,\ n > 0$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x)\,P_n(x)\,e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi}\,n!\,\delta_{mn}$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 P_m(x)\,P_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\delta_{mn}$

6. Es sei $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS für $\mathcal{L}$, und k_n bezeichne den Leitkoeffizienten von $P_n(x)$. Man beweise, dass
$$\mathcal{L}[P_m\overline{P_n}] = \ell_n\delta_{mn}$$
gilt, wobei $\ell_n = k_n^{-1}\overline{k_n}\mathcal{L}[P_n^2]$, $n \geq 0$.

7. Es seien $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS für $\mathcal{L}$ und $\pi(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$, $c_k \in \mathbb{C}$. Man beweise die Beziehung
$$\mathcal{L}[|\pi|^2] = \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \mathcal{L}[|P_k|^2]\,.$$

8. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasi–definites Momentenfunktional mit der Momentenfolge $\{\mu_n\}$. Man zeige,

dass $\{(\Delta_{n-1})^{-1}D_n(x)\}$ mit

$$D_n(x) = \det \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \dots & \mu_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{bmatrix}$$

das monische OPS zu $\mathcal{L}$ ist, und bestimme ein ONPS für $\mathcal{L}$.

9. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasi–definites Momentenfunktional. Man zeige, dass das durch $\mathcal{M}[M_n] = \mathcal{L}[(aM_1 + b)^n]$ $(a \neq 0,\ n \geq 0)$ definierte Momentenfunktional ebenfalls quasi–definit ist. Man beweise, falls $a,\, b \in \mathbf{R}$, so ist $\mathcal{M}$ genau dann positiv definit, wenn dies auch für $\mathcal{L}$ gilt.

10. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasi–definites Momentenfunktional. Man beweise: Ist $\deg \pi_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, und $\mathcal{L}[\pi_m \pi_n] = 0$ für $m \neq n$, so ist $\{\pi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS für $\mathcal{L}$.

11. Es sei $\mathcal{L}$ ein quasi–definites Momentenfunktional. Man zeige, dass aus $\pi \in \mathbb{C}[x]$ und $\mathcal{L}[\pi\, M_n] = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, stets $\pi(x) \equiv 0$ folgt.

12. Es seien $\mathcal{L}$ positiv definit und $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ das monische OPS für $\mathcal{L}$. Man beweise, dass dann $\mathcal{L}[P_n^2] < \mathcal{L}[|\pi|^2]$ für jedes monische Polynom $\pi(x) \not\equiv P_n(x)$ mit $\deg \pi(x) = n$ gilt.

13. Es sei $\{\mu_n\} \subset \mathbf{R}$. Man beweise: Es gilt
$$\sum_{i,j=0}^{n} \mu_{i+j} x_i x_j > 0 \quad \forall\, (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$$
dann und nur dann, wenn die Bedingung $\Delta_n > 0\ \forall\, n = 0, 1, 2, \dots$ erfüllt ist.

14. Es sei $w \in \mathbf{L}^1(-1, 1)$. Ferner sei $\Omega(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} w(t)dt$ eine monoton nicht fallende Funktion auf $[-1, 1]$ mit $\Omega(1) > 0$. Für $f \in \mathbf{L}^1(-1, 1; \Omega)$ definieren wir $\mathcal{L}[f] = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, d\Omega(x)$ und für $|f|^2 \in \mathbf{L}^1(-1, 1; \Omega)$, d.h. $\mathcal{L}[|f|^2] < \infty$, setzen wir $s_n(x) = s_n(f; x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k p_k(x)$, wobei $c_k = \mathcal{L}[f\, p_k]$ gelte und $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ein ONPS für $\mathcal{L}$ bezeichnet.

    (a) Man beweise: Es gilt $\mathcal{L}[|f - s_n|^2] < \mathcal{L}[|f - t_n|^2]$ für jedes Polynom $t_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$ mit $b_k \neq c_k$ für mindestens einen Index $k \in \{1, \dots, n\}$.

    (b) Man beweise die Besselsche Ungleichung $\mathcal{L}[|f(x)|^2] \geq \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2$ für $|f|^2 \in \mathbf{L}^1(-1, 1; \omega)$.

1.3 Rekursionsformeln und die Formel von Christoffel/Darboux

Satz 1.11 *Sind das Momentenfunktional $\mathcal{L}$ quasi-definit und $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein zugehöriges monisches OPS, so existieren Zahlen $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C}$ mit $\beta_n \neq 0$ und*

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x)\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{1.4}$$

wobei $P_{-1}(x) \equiv 0$, $P_0(x) \equiv 1$ und β_0 beliebig ist. Im Fall eines positiv definiten Momentenfunktionals $\mathcal{L}$ gilt $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$.

Beweis. Für $xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{nk} P_k(x)$ gilt

$$\alpha_{nk} = \frac{\mathcal{L}[xP_nP_k]}{\mathcal{L}[P_k^2]} = 0\,, \quad k = 0, 1, \dots, n-2\,, \quad \text{und} \quad \alpha_{n,n+1} = 1\,.$$

Es folgt

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_{nn}P_n(x) + \alpha_{n,n-1}P_{n-1}(x)\,,$$

womit (1.4) bewiesen ist. Aus dieser Beziehung und aus (1.3) folgt weiterhin für $n \geq 1$

$$0 = \mathcal{L}[M_{n-1}P_{n+1}] = \mathcal{L}[M_nP_n] - \beta_n\mathcal{L}[M_{n-1}P_{n-1}] = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} - \beta_n\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}$$

und somit

$$\beta_n = \frac{\Delta_n\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2}\,.$$

Aus Satz 1.8 ergibt sich damit $\beta_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, falls $\mathcal{L}$ positiv definit ist. □

Folgerung 1.12 *Aus* (1.4) *und dem Beweis von Satz 1.11 ergeben sich folgende Beziehungen:*

1. *Es gilt*
$$\beta_n = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2} = \frac{\mathcal{L}[P_n^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2]}\,, \quad n = 1, 2, \dots$$

2. *Wir vereinbaren $\beta_0 = \mu_0 = \Delta_0$. Dann ist*
$$\mathcal{L}[P_n^2] = \beta_0\beta_1\cdots\beta_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3. *Es gilt*
$$\alpha_n = \frac{\mathcal{L}[M_1P_n^2]}{\mathcal{L}[P_n^2]}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4. *Das n-te monische orthogonale Polynom gestattet die Darstellung*
$$P_n(x) = x^n - (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1})x^{n-1} + \cdots\,,$$
denn für $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + d_nx^n + \cdots$ erhalten wir aus (1.4) *$d_n = d_{n-1} - \alpha_n$.*

Beispiel 1.13 *Das monische OPS* $\left\{\widehat{T}_n(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ *zum Tschebysheff-Gewicht erster Art ist gegeben durch*

$$\widehat{T}_0(x) = T_0(x) \quad \text{und} \quad \widehat{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)\,,\ n = 1,2,\ldots$$

Aus (0.4) *folgt*

$$\widehat{T}_1(x) = x\,\widehat{T}_0(x)\,,\ \widehat{T}_2(x) = x\,\widehat{T}_1(x) - \frac{1}{2}\,\widehat{T}_0(x)$$

und

$$\widehat{T}_{n+1}(x) = x\,\widehat{T}_n(x) - \frac{1}{4}\,\widehat{T}_{n-1}(x)\,, \quad n = 2,3,\ldots\,,$$

so dass in diesem Fall $\alpha_n = 0$ *für* $n \ge 0$ *und* $\beta_1 = \frac{1}{2}$ *sowie* $\beta_n = \frac{1}{4}$ *für* $n \ge 2$ *gilt.*

Theorem 1.14 (Favard/Shohat/Natanson, ≈1935) *Zu beliebigen Zahlenfolgen* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und einem Polynomsystem* $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *mit* $P_{-1}(x) \equiv 0$ *und* $P_0(x) \equiv 1$, *welches* (1.4) *genügt, existiert genau ein Momentenfunktional* $\mathcal{L}$ *mit den Eigenschaften*

$$\mathcal{L}[P_0] = \beta_0 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[P_mP_n] = 0\,,\ m \ne n\,.$$

$\mathcal{L}$ *ist genau dann quasi-definit, wenn* $\beta_n \ne 0$ *für alle* $n = 0,1,2,\ldots$ *gilt, und genau dann positiv definit, wenn* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *und* $\beta_n > 0$ *für alle* $n = 0,1,2,\ldots$ *erfüllt ist.*

Beweis. Wir setzen $\mu_0 := \mathcal{L}[P_0] = \beta_0$. Die Momentenfolge $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist dann rekursiv durch die Bedingungen $\mathcal{L}[P_n] = 0$, $n = 1,2,\ldots$, eindeutig bestimmt. Aus

$$x\,P_n(x) = P_{n+1}(x) + \alpha_nP_n(x) + \beta_nP_{n-1}(x)$$

folgt dann

$$\mathcal{L}[M_1P_n] = 0\,,\ \forall\, n \ge 2\,, \quad \mathcal{L}[M_2P_n] = 0\,,\ \forall\, n \ge 3\,, \quad \ldots\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}[M_kP_n] = 0\,,\ k = 0,1,2,\ldots,n-1\,,\ n = 1,2,\ldots\,,$$

und

$$\mathcal{L}[M_nP_n] = \beta_n\mathcal{L}[M_{n-1}P_{n-1}] = \beta_n\beta_{n-1}\cdots\beta_0\,,$$

woraus auch alle weiteren Aussagen des Theorems folgen. □

Theorem 1.15 (Christoffel/Darboux) *Das Polynomsystem* $\{P_n\}_{n=-1}^{\infty}$ *genüge der Rekursionsformel* (1.4) *mit* $\beta_n \ne 0$, $n = 0,1,2,\ldots$ *Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x)P_k(t)}{\beta_0\cdots\beta_k} = \frac{1}{\beta_0\cdots\beta_n}\,\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}\,. \tag{1.5}$$

Beweis. Aus (1.4) ergibt sich

$$x\,P_n(x)P_n(t) = P_{n+1}(x)P_n(t) + \alpha_nP_n(x)P_n(t) + \beta_nP_{n-1}(x)P_n(t)$$

und

$$t\,P_n(x)P_n(t) = P_n(x)P_{n+1}(t) + \alpha_nP_n(x)P_n(t) + \beta_nP_n(x)P_{n-1}(t)\,.$$

Mit

$$F_n(x,t) := \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{\beta_0 \cdots \beta_n (x-t)}$$

folgt daraus

$$\frac{P_n(x)P_n(t)}{\beta_0 \cdots \beta_n} = F_n(x,t) - F_{n-1}(x,t)$$

und somit die Behauptung. □

Aus dem monischen OPS $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ zu einem positiv definiten Momentenfunktional berechnet sich das ONPS $\{\widetilde{p}_n(x)\}_{n=0}^\infty$ nach den Formeln

$$\widetilde{p}_n(x) = k_n P_n(x)\,, \quad k_n = (\beta_0 \cdots \beta_n)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Aus (1.4) folgt dann

$$\sqrt{\beta_{n+1}}\widetilde{p}_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)\widetilde{p}_n(x) - \sqrt{\beta_n}\widetilde{p}_{n-1}(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.6}$$

und aus (1.5)

$$\sum_{k=0}^n \widetilde{p}_k(x)\widetilde{p}_k(t) = \frac{k_n}{k_{n+1}}\,\frac{\widetilde{p}_{n+1}(x)\widetilde{p}_n(t) - \widetilde{p}_n(x)\widetilde{p}_{n+1}(t)}{x-t}\,. \tag{1.7}$$

Aus (1.5) folgt außerdem für $t \longrightarrow x$

$$\sum_{k=0}^n \frac{[P_k(x)]^2}{\beta_0 \cdots \beta_k} = \frac{P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)}{\beta_0 \cdots \beta_n}\,. \tag{1.8}$$

Im Fall eines positiv definiten Momentenfunktionals gilt also

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0\,. \tag{1.9}$$

1.4 Über die Nullstellen orthogonaler Polynome. Die Gaußsche Quadraturformel

Definition 1.16 *Eine Menge $E \subset \mathbb{R}$ heißt eine* **Trägermenge** *von $\mathcal{L}$, wenn aus $P(x) \geq 0$ auf E und $P(x) \not\equiv 0$ auf E folgt, dass $\mathcal{L}[P] > 0$ gilt. Man nennt in diesem Fall $\mathcal{L}$ auch* **positiv definit auf** E.

Im weiteren seien $\mathcal{L}$ positiv definit und $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ das zugehörige monische OPS.

Satz 1.17 *Es sei (a,b) eine Trägermenge von $\mathcal{L}$. Dann sind alle Nullstellen von $P_n(x)$ reell, einfach und in (a,b) gelegen ($n \geq 1$).*

Beweis. Aus $\mathcal{L}[P_n] = 0$ folgt die Existenz wenigstens einer Nullstelle $x_1 \in (a,b)$ ungerader Vielfachheit von $P_n(x)$. Mit $x_1,\ldots,x_k$ seien alle Nullstellen ungerader Vielfachheit von $P_n(x)$ in (a,b) bezeichnet. Wir setzen $p(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$. Dann folgt $p(x)P_n(x) \geq 0$ auf (a,b), also $\mathcal{L}[pP_n] > 0$. Das bedeutet aber $k \geq n$. □

Unter den Voraussetzungen des Satzes 1.17 bezeichnen wir die Nullstellen von $P_n(x)$ mit x_{nk} und vereinbaren $x_{nn} < x_{n,n-1} < \cdots < x_{n1}$. Es folgt $\operatorname{sgn} P_n(x) = 1$ für $x > x_{n1}$ und $\operatorname{sgn} P_n(x) = (-1)^n$ für $x < x_{nn}$. $P_n'(x)$ hat genau eine Nullstelle im Intervall $(x_{nk}, x_{n,k-1})$, $k = 2, \ldots, n$, woraus

$$\operatorname{sgn} P_n'(x_{nk}) = (-1)^{k-1} \tag{1.10}$$

folgt.

Theorem 1.18 *Es gilt* $x_{n+1,k+1} < x_{nk} < x_{n+1,k}$, $k = 1, \ldots, n$.

Beweis. Aus (1.9) folgt

$$P_{n+1}'(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0\,, \quad k = 1, \ldots, n+1\,,$$

und somit aus (1.10) $\operatorname{sgn} P_n(x_{n+1,k}) = (-1)^{k-1}$. □

Folgerung 1.19 *Für alle* $k \geq 1$ *sind die Folge* $\{x_{nk}\}_{n=k}^{\infty}$ *monoton wachsend und die Folge* $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ *monoton fallend. Somit existieren*

$$\xi_k := \lim_{n\to\infty} x_{nk} \quad \textit{und} \quad \eta_k := \lim_{n\to\infty} x_{n,n-k+1}$$

(*evtl.* $\xi_k = +\infty$ *oder/und* $\eta_k = -\infty$).

Definition 1.20 *Das Intervall* (η_1, ξ_1) *heißt* **Träger** *von* $\mathcal{L}$.

Mit $\ell_{nk}(x)$ bezeichnen wir die sog. **Lagrangeschen Grundpolynome**

$$\ell_{nk}(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{x - x_{nj}}{x_{nk} - x_{nj}} = \frac{P_n(x)}{(x - x_{nk})P_n'(x_{nk})}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Offenbar gilt $\ell_{nk}(x_{nj}) = \delta_{jk}$. Für eine auf (η_1, ξ_1) stetige Funktion $f(x)$, d.h. $f \in \mathbf{C}(\eta_1, \xi_1)$, definieren wir das Lagrangesche **Interpolationspolynom**

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{nk})\ell_{nk}(x)$$

und das Funktional

$$\mathcal{L}_n[f] = \mathcal{L}[L_n f] = \sum_{k=1}^{n} A_{nk} f(x_{nk}) \quad \text{mit} \quad A_{nk} = \mathcal{L}[\ell_{nk}]\,.$$

Satz 1.21 *Es gilt*

$$\mathcal{L}_n[P] = \mathcal{L}[P] \quad \forall\, P \in \mathbb{C}_{2n}[x]\,.$$

Beweis. Wir schreiben $P \in \mathbb{C}_{2n}[x]$ in der Form

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x) \quad \text{mit} \quad Q, R \in \mathbb{C}_n[x]\,.$$

Es folgt $(L_n P)(x) = (L_n R)(x)$ und somit

$$\mathcal{L}_n[P] = \mathcal{L}[L_n R] = \mathcal{L}[R] = \mathcal{L}[P]\,.$$

□

Folgerung 1.22 *Es gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk} = \mu_0 \quad \textit{und} \quad A_{nk} > 0\,,\; k = 1, \ldots, n\,.$$

Beweis. $0 < \mathcal{L}[\ell_{nk}^2] \overset{S.\ 1.21}{=} \mathcal{L}_n[\ell_{nk}^2] = A_{nk}\,.$ □

Folgerung 1.23 *Aus Folgerung 1.22 ergibt sich wegen $L_n p = p$ für $p \in \mathbb{C}[x]$ und für alle $n \ge n_0(p)$, dass (η_1, ξ_1) eine Trägermenge von $\mathcal{L}$ ist.*

Im Fall $\mathcal{L}[f] = \displaystyle\int_a^b f(x)\,d\omega(x)$ erhalten wir mit $\mathcal{L}_n[f]$ eine Quadraturformel, und es gelten folgende zwei Sätze.

Satz 1.24 *Ist $-\infty < a < b < +\infty$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}_n[f] = \mathcal{L}[f] \quad \forall\, f \in \mathbf{C}[a,b]$.*

Beweis. Offenbar gilt $\mathcal{L}_n[p] \longrightarrow \mathcal{L}[p]$ für alle $p \in \mathbb{C}[x]$ und $|\mathcal{L}_n[f]| \le \mu_0 \,\|f\|_\infty$. Also sind die Funktionale $\mathcal{L}_n : \mathbf{C}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig beschränkt, und die Behauptung folgt aus der Dichtheit von $\mathbb{C}[x]$ in $\mathbf{C}[a,b]$ und aus dem Satz von Banach-Steinhaus. □

Satz 1.25 *Für $-\infty < a < b < \infty$ und $f \in \mathbf{C}[a,b]$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}[|f - L_n f|^2] = 0$.*

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein Polynom $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[x]$ mit der Eigenschaft

$$\|f - P_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\mu_0}}\,.$$

Es folgt für alle hinreichend großen n

$$\begin{aligned}
\left\{\mathcal{L}[|f - L_n f|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} &\le \left\{\mathcal{L}[|f - P_\varepsilon|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\mathcal{L}[|L_n(P_\varepsilon - f)|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\mathcal{L}[|f - P_\varepsilon|^2]\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\sum_{k=1}^{n} A_{nk}\,|P_\varepsilon(x_{nk}) - f(x_{nk})|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
&< \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

□

Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}_z^*[M_n] = \mathcal{L}[(x - z)x^n] = \mu_{n+1} - z\,\mu_n$$

und

$$P_n^z(x) = \frac{1}{x - z}\left[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}\,P_n(x)\right],$$

wobei $P_n(z) \ne 0$ für alle $n \ge 1$ erfüllt sei. Aus (1.5) zusammen mit Folgerung 1.12, 2. folgt

$$P_n^z(x) = \frac{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}{P_n(z)} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{p}_k(x)\widetilde{p}_k(z)\,. \tag{1.11}$$

Satz 1.26 *Das Momentenfunktional $\mathcal{L}_z^*$ ist quasi-definit und $\{P_n^z\}_{n=0}^{\infty}$ ist das zugehörige monische OPS. $\mathcal{L}_z^*$ ist genau dann positiv definit, wenn $z \le \eta_1$ gilt.*

Beweis. Die Richtigeit der ersten Behauptung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_z^*[M_k P_n^z] &= \mathcal{L}[M_k P_{n+1}] - \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}\,\mathcal{L}[M_k P_n] \\ &= -\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}\,\mathcal{L}[M_n P_n]\delta_{nk}\,, \quad k = 0,1,\dots,n\,.\end{aligned}$$

Sind $z \le \eta_1$ und $\pi(x) \ge 0$, $\pi(x) \not\equiv 0$, so ist wegen Folgerung 1.23 $\mathcal{L}_z^*[\pi] = \mathcal{L}[(x-z)\pi] > 0$. Ist umgekehrt $\mathcal{L}_z^*$ positiv definit, so gilt

$$0 < \mathcal{L}_z^*\left[\frac{P_n^2}{(x-x_{nn})^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{(x-z)P_n^2}{(x-x_{nn})^2}\right] \overset{S.\ 1.21}{=} A_{nn}(x_{nn}-z)\left[P_n'(x_{nn})\right]^2\,,$$

woraus $z < x_{nn}$, $n = 1,2,\dots$, also $z \le \eta_1$ folgt. □

Wegen (1.11) gilt

$$K_n(z,x) := \frac{1}{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}\,P_n(z)P_n^z(x) = \sum_{k=0}^{n}\widetilde{p}_k(x)\widetilde{p}_k(z)\,, \quad x,z \in \mathbb{R}\,.$$

Für $w, z \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$K_n(z,w) = \sum_{k=0}^{n}\widetilde{p}_k(w)\overline{\widetilde{p}_k(z)}\,.$$

Satz 1.27 *Für beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$ und $n = 0,1,2,\dots$ gilt*

$$\frac{1}{K_n(z_0,z_0)} = \min\left\{\mathcal{L}[|\pi|^2] : \pi \in \mathbb{C}_{n+1}[x],\ \pi(z_0) = 1\right\}$$

und

$$A_{nk} = \frac{1}{K_{n-1}(x_{nk},x_{nk})} = \frac{1}{K_n(x_{nk},x_{nk})}\,.$$

Beweis. Es seien $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k\widetilde{p}_k(x)$, $c_k = \mathcal{L}[\pi\widetilde{p}_k]$ und $\pi(z_0) = \sum_{k=0}^{n} c_k\widetilde{p}_k(z_0) = 1$. Dann gilt

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] = \mathcal{L}[\overline{\pi}\pi] = \sum_{k=0}^{n}|c_k|^2$$

und

$$1 \le \sum_{k=0}^{n}|c_k|^2\sum_{k=0}^{n}|\widetilde{p}_k(z_0)|^2 = \mathcal{L}[|\pi|^2]\,K_n(z_0,z_0)\,.$$

Dabei steht anstelle des Ungleichheitszeichens genau dann das Gleichheitszeichen, wenn ein $A \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $c_k = A\overline{\widetilde{p}_k(z_0)}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, existiert, woraus $A \sum_{k=0}^{n} \overline{\widetilde{p}_k(z_0)} \widetilde{p}_k(z_0) = 1$, d.h. $A = \frac{1}{K_n(z_0, z_0)}$, folgt. Damit ist

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] \geq \frac{1}{K_n(z_0, z_0)} \quad \forall \pi \in \mathbb{C}[n+1; x] \quad \text{mit} \quad \pi(z_0) = 1$$

und

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] = \frac{1}{K_n(z_0, z_0)} \quad \text{für} \quad \pi(x) = A\, K_n(z_0, x)\,.$$

Aus Satz 1.21 folgt

$$A_{nk} = \mathcal{L}_n[\ell_{nk}^2] = \mathcal{L}[\ell_{nk}^2] \geq \frac{1}{K_{n-1}(x_{nk}, x_{nk})}$$

und für $\pi(x) = A\, K_n(x_{nk}, x)$

$$\mathcal{L}[|\pi|^2] = \sum_{j=1}^{n} A_{nj} |\pi(x_{nj})|^2 \geq A_{nk}\,, \quad \text{falls} \quad \pi(x_{nk}) = 1\,.$$

□

1.5 Übungsaufgaben

Im weiteren bezeichnen wir mit $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ das monische OPS zum quasi-definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$ mit der Momentenfolge $\{\mu_n\}$ und der zugehörigen Rekursionsformel (1.4).

1. Man beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (a) $\mathcal{L}$ ist symmetrisch, d.h. es gilt $\mu_{2n+1} = 0 \; \forall\, n \geq 0$.

   (b) $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \; \forall\, n \geq 0$.

   (c) In der Rekursionsformel (1.4) gilt $\alpha_n = 0 \; \forall\, n \geq 0$.

2. Wir definieren $Q_n(x) = a^{-n} P_n(ax + b)$ $(a \neq 0)$. Man beweise:

   (a) $Q_{n+1}(x) = \left(x - \frac{\alpha_n - b}{a}\right) Q_n(x) - \frac{\beta_n}{a^2} Q_{n-1}(x)\,,$

   (b) $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist OPS bzgl. der Momentenfolge $\{\eta_n\}$ mit

   $$\eta_n = a^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-b)^{n-k} \mu_k\,.$$

3. Man beweise für die Polynome $P_n(x)$ aus Formel (0.12) die Gültigkeit der Rekursionsformel

   $$Q_{n+1}(x) = (x - n - a)\, Q_n(x) - a\, n\, Q_{n-1}(x), \;\; n = 0, 1, \ldots, \;\; Q_n(x) := n!\, P_n(x)\,.$$

4. Es seien $\alpha_n = 0$ und $\beta_n < 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Dann ist $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS bezüglich eines quasi-definiten Momentenfunktionals $\mathcal{L}$. Wir definieren $\mathcal{L}^*[M_n] := \mathbf{i}^{-n}\mathcal{L}[M_n]$. Man zeige, dass $\mathcal{L}^*$ positiv definit ist, und bestimme das entsprechende monische OPS.

5. Es seien $\alpha_n = 0$ und $\beta_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$, sowie $\alpha_0 \neq 0$. Wir definieren $R_n(x) = \mathsf{Re}\,[\mathbf{i}^{-n} P_n(\mathbf{i}x)]$ und $I_n(x) = \mathsf{Im}\,[\mathbf{i}^{-n} P_n(ix)]$. Man beweise, dass sowohl $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ als auch $\left\{\alpha_0^{-1} I_{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ monische OPS bezüglich gewisser positiv definiter Momentenfunktionale sind.

6. Man beweise:

   (a) $\dfrac{1 - x\,w}{1 - 2\,x\,w + w^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\,w^n$

   (b) $\dfrac{1}{1 - 2\,x\,w + w^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\,w^n$

7. Man zeige, dass ein OPS $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ genau dann einer Beziehung der Gestalt

$$P_{n-1}(x)\,P_n(-x) + P_{n-1}(-x)\,P_n(x) = a_n \neq 0\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

   genügt, wenn in der Rekursionsformel (1.4) $\beta_n \neq 0$, $n \geq 0$, und $\alpha_n = 0$, $n \geq 1$, $\alpha_0 \neq 0$ gilt. Man zeige ferner, dass das entsprechende Momentenfunktional genau dann positiv definit ist, wenn die Bedingung $(-1)^n a_1 a_n < 0$, $n \geq 2$, erfüllt ist.

8. Es seien $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS und $\mathcal{M}$ ein Momentenfunktional, welches den Beziehungen $\mathcal{M}[P_0] \neq 0$ und $\mathcal{M}[P_n] = 0$, $n = 1, 2, \dots$ genügt. Man zeige, dass $\{P_n(x)\}$ ein OPS bezüglich $\mathcal{M}$ ist.

9. Es sei $\mathcal{L}$ positiv definit auf dem kompakten Intervall $[a, b]$. Beweise, dass für jedes Polynom π gilt $|\mathcal{L}[\pi]| \leq \mu_0 \|\pi\|_\infty$.

10. Man zeige, dass für ein symmetrisches Momentenfunktional die Gewichte in der Gaußschen Quadraturformel der Beziehung $A_{n,n-k+1} = A_{nk}$ genügen.

11. Es seien $\mathcal{L}$ positiv definit und $K_n(z, x)$ wie im Abschnitt 1.4 definiert. Man zeige, dass für jedes Polynom $\pi \in \mathbb{C}[x]$ die Formel $\pi(t) = \mathcal{L}[\pi\, K_n(.,t)]$ gilt.

1.6 Die Jacobi-Polynome

Es sei $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Für $n = 0, 1, 2, \dots$ definiert man die Jacobi-Polynome über die Rodriguessche Formel (vgl. auch Abschnitt 0.3, Übungsaufgabe 1)

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}}{(-2)^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right]. \tag{1.12}$$

Lemma 1.28 *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = \binom{2n+\alpha+\beta}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Beweis. Aus

$$(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} z^j$$

folgt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{2n+\alpha+\beta}{j} z^j = (1+z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \binom{n+\alpha}{j-k} \binom{n+\beta}{k} z^j .$$

Vergleich der Koeffizienten bei z^n liefert die Behauptung. □

Aus (1.12) und

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] \\
= \;& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(1-x)^{n+\alpha}\right] \left[\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{n+\beta}\right] \\
= \;& (1-x)^\alpha (1+x)^\beta \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}(n+\alpha)\cdots(k+\alpha+1)(1-x)^k \cdot \\
& \qquad \cdot (n+\beta)\cdots(n+\beta-k+1)(1+x)^{n-k} \\
= \;& (-1)^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}
\end{aligned}$$

folgt

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k} . \tag{1.13}$$

Nach Lemma 1.28 hat $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ also den Leitkoeffizienten

$$k_n^{\alpha,\beta} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} . \tag{1.14}$$

Die monischen Jacobi-Polynome bezeichnen wir mit $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$, d.h.

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{k_n^{\alpha,\beta}} P_n^{\alpha,\beta}(x) .$$

Mittels partieller Integration beweist man folgendes Lemma (vgl. auch die Lösung der Übungsaufgabe 1b, Abschnitt 0.3).

Lemma 1.29 *Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt*

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n^{\alpha,\beta}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \, dx \begin{cases} = 0 & , \quad k = 0, \ldots, n-1\,, \\ > 0 & , \quad k = n\,. \end{cases}$$

$\left\{P_n^{\alpha,\beta}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ist also ein OPS und wir leiten nun Formeln für die Koeffizienten α_n und β_n in der Rekursionsformel

$$\widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (x - \alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) - \beta_n \widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(x)\,, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.15}$$

der monischen Jacobi-Polynome her. Wir definieren

$$(\alpha)_n := \begin{cases} 1 & , \quad n = 0\,, \\ \prod_{k=1}^{n}(k+\alpha) & , \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Aus (1.13) folgt

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{n} \quad \text{und} \quad P_n^{\alpha,\beta}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}\,,$$

so dass

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(1) = \frac{2^n \binom{n+\alpha}{n}}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} = \frac{2^n(\alpha)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}}$$

und

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(-1) = \frac{(-2)^n \binom{n+\beta}{n}}{\binom{2n+\alpha+\beta}{n}} = \frac{(-2)^n(\beta)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}}\,.$$

Es folgt

$$1 - \alpha_0 = \widehat{P}_1(1) = \frac{2(1+\alpha)}{2+\alpha+\beta}\,, \quad \text{d.h.} \quad \alpha_0 = \frac{\beta-\alpha}{2+\alpha+\beta}\,.$$

Für $n = 1, 2, \ldots$ löst man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(1) &= (1-\alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(1) - \beta_n \widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(1)\,, \\ \widehat{P}_{n+1}^{\alpha,\beta}(-1) &= -(1+\alpha_n)\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(-1) - \beta_n \widehat{P}_{n-1}^{\alpha,\beta}(-1)\,, \end{aligned}$$

das sich aus (1.15) für $x = \pm 1$ ergibt und das sich auch in der Form

$$\frac{4(\alpha)_{n+1}(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+2}} = (1-\alpha_n)\frac{2(\alpha)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}} - \beta_n \frac{(\alpha)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}}{(\alpha+\beta)_{2n-2}} \tag{1.16}$$

$$\frac{4(\beta)_{n+1}(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+2}} = (1+\alpha_n)\frac{2(\beta)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}} - \beta_n \frac{(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}}{(\alpha+\beta)_{2n-2}} \tag{1.17}$$

schreiben lässt. Wir multiplizieren die Gleichung (1.16) mit $(\beta)_{n-1}$, die Gleichung (1.17) mit $(\alpha)_{n-1}$, subtrahieren (1.16) von (1.17) und erhalten wegen

$$(n+\beta)(n+1+\beta)-(n+\alpha)(n+1+\alpha)=(2n+\alpha+\beta+1)(\beta-\alpha)$$

die Gleichung

$$\begin{aligned}&\frac{2(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n+1}(2n+\alpha+\beta+1)(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta)_{2n+2}}\\&\qquad=\frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n}[\beta-\alpha+\alpha_n(2n+\alpha+\beta)]}{(\alpha+\beta)_{2n}},\end{aligned}$$

so dass

$$\alpha_n=\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)},\quad n=1,2,\ldots$$

Multiplizieren wir (1.16) mit $(\beta)_n$, (1.17) mit $(\alpha)_n$ und addieren beide Gleichungen, so folgt

$$\frac{4(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha+\beta)_{n+1}}{(\alpha+\beta)_{2n+1}}=\frac{4(\alpha)_n(\beta)_n(\alpha+\beta)_n}{(\alpha+\beta)_{2n}}-\beta_n\,\frac{(\alpha)_{n-1}(\beta)_{n-1}(\alpha+\beta)_{n-1}(2n+\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)_{2n-2}},$$

so dass

$$\beta_n=\begin{cases}\dfrac{4(1+\alpha)(1+\beta)}{(2+\alpha+\beta)^2(3+\alpha+\beta)}, & n=1\\[2ex]\dfrac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)}, & n=2,3,\ldots\end{cases}$$

Kapitel 2

Numerische Kondition und orthogonale Polynome

2.1 Polynombasen

Es sei $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}_n[x]$ eine Basis in $\mathbb{R}_n[x]$, $q := \{q_1, \ldots, q_n\}$. Für ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{R}_n[x]$ schreiben wir

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k^{(q)}(p) q_k(x) , \quad u_k^{(q)} \in \mathbb{R} .$$

Wir betrachten die Abbildung $M_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ mit

$$(M_n u)(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k q_k(x) , \quad u = [u_1, \ldots, u_n]^T \in \mathbb{R}^n ,$$

als eine lineare Abbildung zwischen den normierten Räumen $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ und $(\mathbb{R}_n[x], \|.\|_\infty) \subset (\mathbf{C}[a,b], \|.\|_\infty)$, $-\infty < a < b < \infty$, wobei für $u \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \mathbf{C}[a,b]$ (Raum der stetigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$)

$$\|u\|_\infty = \max\{|u_k| : k = 1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad \|p\|_\infty = \max\{|f(x)| : a \le x \le b\} .$$

Bekanntlich definiert man als Kondition einer solchen linearen Abbildung die Zahl

$$\operatorname{cond} M_n = \left\|M_n^{-1}\right\| \|M_n\| .$$

- Für $q_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, gilt folgendes:
  - $[a,b] = [-\omega, \omega]$:

$$(\operatorname{cond} M_n)^{\frac{1}{n}} \sim \begin{cases} 1 + \sqrt{1+\omega^2} & , \quad \omega \ge 1 , \\ \dfrac{1 + \sqrt{1+\omega^2}}{\omega} & , \quad 0 < \omega < 1 . \end{cases}$$

– $[a,b]=[0,\omega]$:

$$(\operatorname{cond} M_n)^{\frac{1}{n}} \sim \begin{cases} 2+\omega+2\sqrt{1+\omega} & , \quad \omega \geq 1 , \\ \dfrac{2+\omega+2\sqrt{1+\omega}}{\omega} & , \quad 0<\omega<1 . \end{cases}$$

In beiden Fällen wird das Minimum bei $\omega = 1$ angenommen, nämlich $1+\sqrt{2}$ im ersten Fall und $3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2$ im zweiten Fall. Die Konditionszahl wächst also exponentiell mit n.

- Es sei $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ein OPS zum positiv definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}[f] = \int_a^b f(x)\, d\Omega(x) , \quad -\infty < a < b < \infty ,$$

und $q_k(x) = P_{k-1}(x)$. Mit $h_k := \mathcal{L}[P_k^2]$ gilt

$$\|M_n u\|_\infty \leq \|u\|_\infty \max \left\{ \sum_{k=1}^{n} |P_{k-1}(x)| : a \leq x \leq b \right\}$$

und wegen

$$M_n^{-1} p = \left[\; u_k^{(q)} \; \right]_{k=1}^{n} , \quad u_k^{(q)} = \frac{\mathcal{L}[p\, P_{k-1}]}{h_{k-1}} ,$$

ist

$$\left\| M_n^{-1} p \right\|_\infty \leq \max \left\{ \sqrt{\frac{\mathcal{L}[p^2]}{h_{k-1}}} : k=1,\dots,n \right\} \leq \|p\|_\infty \max \left\{ \sqrt{\frac{\mu_0}{h_{k-1}}} : k=1,\dots,n \right\} .$$

Es folgt

$$\operatorname{cond} M_n \leq \left(\max_{1\leq k \leq n} \sqrt{\frac{\mu_0}{h_{k-1}}} \right) \left(\max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=1}^{n} |P_{k-1}(x)| \right) . \tag{2.1}$$

– $[a,b]=[-1,1]$, $P_k(x)=T_k(x)$:
In diesem Fall gilt $\mu_0 = \pi$, $h_0 = \pi$, $h_{k-1} = \pi/2$, $k=2,\dots,n$, und $|T_k(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$. Aus (2.1) folgt

$$\operatorname{cond} M_n \leq \sqrt{2}\, n .$$

– $[a,b]=[-1,1]$, $P_k(x)=U_k(x)$:
Wir haben $\mu_0 = h_{k-1} = \pi/2$, $k=1,\dots,n$, und $|U_k(x)| \leq \pi\, k/2$, $-1 \leq x \leq 1$. Aus (2.1) folgt

$$\operatorname{cond} M_n \leq \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{\pi\, n(n+1)}{4} .$$

– $[a,b]=[-1,1]$, $P_k(x)=p_k^{\alpha,\beta}(x)$ (normierte Jacobi-Polynome), $\sigma:=\max\{\alpha,\beta\}\geq\frac{1}{2}$: In diesem Fall gilt[1]

$$\left\|p_{k-1}^{\alpha,\beta}\right\|_\infty \leq c_0\, k^{\sigma+\frac{1}{2}}$$

mit einer von $k=1,2,\ldots$ unabhängigen Konstanten c_0. Aus (2.1) folgt

$$\operatorname{cond} M_n \leq \sqrt{\mu_0}\, c_0 \sum_{k=1}^n k^{\sigma+\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\mu_0}\, c_0\, n^{\sigma+\frac{3}{2}}\,.$$

- Lagrange-Basen:

$$q_k(x)=\ell_k(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^n \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\,,\quad k=1,\ldots,n\,,$$

$$a\leq x_n<\cdots<x_2<x_1\leq b\,,\quad x_k=x_k^{(n)}$$

Es ist dann

$$u_k^{(q)}(p)=p(x_k)\,,\quad M_n^{-1}p=\left[\; p(x_k)\;\right]_{k=1}^n\,,$$

d.h.

$$\left\|M_n^{-1}\right\|=1\,.$$

Andererseits gilt

$$\|M_n u\|_\infty \leq \lambda_n\,\|u\|_\infty$$

mit

$$\lambda_n:=\|L_n\|_\infty\,,\quad L_n(x)=\sum_{k=1}^n|\ell_k(x)|\quad - \quad \text{Lebesgue} - \text{Funktion}\,,$$

also

$$\operatorname{cond} M_n \leq \lambda_n\,.$$

Bemerkung 2.1 *λ_n ist gleich der Norm des entsprechenden Interpolationsoperators im Raum $\mathbf{C}[a,b]$.*

G. Faber (1914) und S. N. Bernstein (1916) haben bewiesen, dass[2]

$$\lambda_n>\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$$

unabhängig von der Wahl der Stützstellen $x_k^{(n)}$.

– Im Fall $[a,b]=[-1,1]$, $x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$ kann man zeigen, dass

$$\lambda_n\leq\frac{8\ln n}{\pi}$$

gilt.

[1] I. P. Natanson, Konstruktive Funktionentheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1955, 2. Teil, Kap. VI, § 3, Satz 2
[2] I. P. Natanson, Konstruktive Funktionentheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1955, 3. Teil, Kap. II, § 1, Satz 1

– $[a,b]=[-1,1]$, $P_n^{\alpha,\beta}(x_k)=0$: G. Szegö (1939) bewies, dass

$$\lambda_n \le c_1 \begin{cases} n^{\sigma+\frac{1}{2}} & , \quad \sigma > -\frac{1}{2}\,, \\ \ln n & , \quad \sigma \le -\frac{1}{2}\,, \end{cases}$$

gilt mit einer von n unabhängigen Konstanten c_1 .

– $[a,b]=[-1,1]$, $d\Omega(x)=\prod_{j=0}^{N+1}|x-t_j|^{\alpha_j}w(x)\,dx$, $w(x)>0$ stetig, $\alpha_j>-1$,
$-1=t_{N+1}<t_N<\cdots<t_0=1$, $P_n(x_k)=0$, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - entsprechendes OPS:

D. Berthold bewies 1988, dass in dieser Situation

$$\lambda_n \le c_2\, n^{\rho} \ln n$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten c_2 und

$$\rho = \frac{1}{2}\Big[\max\{0, 2\alpha_0+1, \alpha_1,\ldots,\alpha_N, 2\alpha_{N+1}+1\} - \min\{0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N\}\Big]$$

gilt.

2.2 Die Methode der modifizierten Momente

Hier betrachten wir das Problem der Berechnung der Koeffizienten in der Rekursionsformel (1.4) in dem Fall, dass explizite Formeln nicht vorhanden sind. Wir gehen dabei davon aus, dass uns ein Polynomsystem $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ gegeben ist, welches der Rekursionsformel

$$Q_{n+1}(x) = (x-A_n)Q_n(x) - B_nQ_{n-1}(x)\,, \quad n=0,1,\ldots\,, \tag{2.2}$$

genügt, und dass die sog. **modifizierten Momente**

$$M_k = \mathcal{L}[Q_k]\,, \quad k=0,1,\ldots\,, \tag{2.3}$$

bekannt sind. Wir definieren die **gemischten Momente**

$$m_{j,k} = \mathcal{L}[P_jQ_k]\,, \quad j,k=-1,0,1,2,\ldots\,,$$

und erhalten aus (1.4) und (2.2)

$$m_{j+1,k} = \mathcal{L}[M_1P_jQ_k] - \alpha_j m_{j,k} - \beta_j m_{j-1,k}$$

und

$$\mathcal{L}[M_1P_jQ_k] = m_{j,k+1} + A_k m_{j,k} + B_k m_{j,k-1}\,.$$

Folglich gilt

$$m_{0,k} = M_k$$

und

$$m_{j+1,k} = m_{j,k+1} + (A_k - \alpha_j)m_{j,k} + B_k m_{j,k-1} - \beta_j m_{j-1,k}\,.$$

Speziell für $k = j - 1$ und $k = j$ erhalten wir

$$0 = m_{j,j} - \beta_j m_{j-1,j-1}$$

und

$$0 = m_{j,j+1} + (A_j - \alpha_j)m_{j,j} - \beta_j m_{j-1,j}\,,$$

d.h.

$$\beta_j = \frac{m_{j,j}}{m_{j-1,j-1}}$$

und

$$\alpha_j = A_j + \frac{m_{j,j+1}}{m_{j,j}} - \frac{m_{j-1,j}}{m_{j-1,j-1}}\,.$$

Zur Berechnung von α_j und β_j, $j = 0, 1, \ldots, n - 1$, ergibt sich also folgender Algorithmus (**Methode der modifizierten Momente**):

1. $m_{-1,k} := 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n - 1$
2. $m_{0,k} := M_k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n - 1$
3. $\beta_0 := \dfrac{M_0}{Q_0}$, $\alpha_0 := A_0 + \dfrac{M_1}{M_0}$
4. $j = 1, \ldots, n - 1$:
   (a) $m_{j,k} = m_{j-1,k+1} + (A_k - \alpha_{j-1})m_{j-1,k} + B_k m_{j-1,k-1} - \beta_{j-1} m_{j-2,k}$,
   $k = j, j + 1, \ldots 2n - j - 1$
   (b) $\alpha_j := A_j + \dfrac{m_{j,j+1}}{m_{j,j}} - \dfrac{m_{j-1,j}}{m_{j-1,j-1}}$
   (c) $\beta_j := \dfrac{m_{j,j}}{m_{j-1,j-1}}$

2.3 Zur numerischen Kondition des Problems der Erzeugung Gaußscher Quadraturformeln

Wir betrachen die Abbildung, die den modifizierten Momenten die Parameter der Gaußschen Quadraturformel zuordnet,

$$\Phi_n : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}\,, \quad (M_0, M_1, \ldots, M_{2n-1}) \mapsto (A_{n1}, \ldots, A_{nn}, x_{n1}, \ldots, x_{nn})\,.$$

Die Realisierung der Abbildung Φ_n ist äquivalent zur Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems

$$\sum_{k=1}^{n} A_{nk} Q_j(x_{nk}) = M_j\,, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n - 1\,, \tag{2.4}$$

wobei die Polynome $Q_j(x)$ durch die Rekursionsformel (2.2) gegeben sind. Das Definitionsgebiet der Abbildung Φ_n ist nicht der gesamte $\mathbb{R}^{2n}$, offenbar aber ein Kegel.

Es seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ normierte Räume, $\mathcal{D} \subset \mathbf{X}$ eine offene Menge. Unter der Kondition der Abbildung $\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Y}$ im Punkt $x \in \mathcal{D}$ verstehen wir die Zahl

$$\operatorname{cond}(\Phi; x) := \lim_{\delta \to +0} \sup_{\|h\|=\delta} \left\{ \frac{\|\Phi(x+h) - \Phi(x)\|}{\|\Phi(x)\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|h\|} \right\},$$

die das Verhältnis des relativen Fehlers des Ergebnisses zum relativen Fehler der Eingangsdaten misst. Existiert die Frechet-Ableitung $\Phi'(x)$, so gilt

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \Phi'(x)h + \Psi(h)$$

mit

$$\frac{\|\Psi(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|h\| \to 0\,,$$

d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \frac{\|\Psi(h)\|}{\|h\|} < \varepsilon \text{ für } \|h\| < \delta\,.$$

Es gilt dann also

$$\operatorname{cond}(\Phi; x) = \left\|\Phi'(x)\right\| \cdot \frac{\|x\|}{\|\Phi(x)\|}\,.$$

Ist Φ ein linearer beschränkter Operator, so folgt wegen $\Phi'(x) = \Phi$

$$\operatorname{cond}\Phi := \sup_{x \in X,\, x \neq \Theta} \operatorname{cond}(\Phi; x) = \|\Phi\| \left\|\Phi^{-1}\right\|\,.$$

Wir betrachten den Fall $Q_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$, d.h. $M_n = \mu_n$, mit dem Trägerintervall $[0,1]$. $\mathcal{D}(\Phi_n)$ ist offen, da bei kleinen Änderungen der μ_n das Funktional $\mathcal{L}$ positiv definit bleibt. Mit

$$F_n(A_1, \ldots, A_n, x_1, \ldots, x_n) = \left[\sum_{k=1}^{n} A_k x_k^j \right]_{j=0}^{2n-1} = \left[\ \mu_j\ \right]_{j=0}^{2n-1} =: \mu$$

erhalten wir

$$\kappa_n := \operatorname{cond}(\Phi_n, \mu) = \left\| \left[F_n' \begin{pmatrix} A \\ x \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\| \cdot \frac{\|\mu\|}{\left\| \begin{pmatrix} A \\ x \end{pmatrix} \right\|}\,.$$

Wir wählen $\|\mu\| = \max_j |\mu_j|$ und $\left\| \left[\ a_{jk}\ \right]_{j,k=1}^{2n} \right\| = \max_j \sum_{k=1}^{2n} |a_{jk}|$. Nun ist $F_n' \begin{pmatrix} A \\ x \end{pmatrix} = \Sigma\,\Lambda$ mit

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \cdots & x_n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{2n-1} & \cdots & x_n^{2n-1} & (2n-1)x_1^{2n-2} & \cdots & (2n-1)x_n^{2n-2} \end{bmatrix}$$

und

$$\Lambda = \operatorname{diag}\left[1, \ldots, 1, A_1, \ldots, A_n\right],$$

so dass wegen $\|\mu\| = \mu_0\,,\ \left\|\begin{pmatrix} A \\ x \end{pmatrix}\right\| \leq \max\left\{1, \mu_0\right\} = \dfrac{1}{\min\left\{1, \mu_0^{-1}\right\}}$ und

$$\left\|\Lambda^{-1}\Sigma^{-1}\right\| \geq \min\left\{1, \mu_0^{-1}\right\}\left\|\Sigma^{-1}\right\|$$

die Abschätzung

$$\kappa_n \geq \min\left\{\mu_0, \frac{1}{\mu_0}\right\}\left\|\Sigma^{-1}\right\|$$

folgt. W. Gautschi (1963) zeigte, dass

$$\left\|\Sigma^{-1}\right\| = \max_{1\leq k\leq n} b_k \prod_{i=1,\, i\neq k}^{n}\left(\frac{1+x_i}{x_k - x_i}\right)^2$$

gilt, wobei $b_k = \max\left\{b_k^{(1)}, b_k^{(2)}\right\}$ mit $b_k^{(1)} = 1 + x_k$ und

$$b_k^{(2)} = \left|1 + 2\,x_k \sum_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_i}\right| + 2\left|\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\frac{1}{x_k - x_i}\right|.$$

Im Fall $x_k = \dfrac{1}{2}(1 + x_{nk})\ \ x_{nk} = \cos\dfrac{2k-1}{2n}\pi$ erhalten wir wegen

$$\prod_{i=1,\, i\neq k}^{n}\frac{x_{ni} - (-3)}{x_{ni} - x_{nk}} = \frac{T_n(-3)}{[(-3) - x_{nk}]T_n'(x_{nk})}$$

und

$$T_n(-3) = T_n(3)(-1)^n$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
(1 + x_k)\prod_{i=1,\, i\neq k}^{n}\left(\frac{1+x_i}{x_k - x_i}\right)^2 &= \frac{1}{2}(3 + x_{nk})\prod_{i=1,\, i\neq k}^{n}\left(\frac{3 + x_{ni}}{x_{nk} - x_{ni}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2(3 + x_{nk})}\left[\frac{T_n(3)}{T_n'(x_{nk})}\right]^2 \\
&> \frac{1}{8}\left[\frac{T_n(3)}{T_n'(x_{nk})}\right]^2.
\end{aligned}$$

Aus

$$T_n'(x) = \frac{d}{ds}\left[\cos ns\right]\frac{ds}{dx} = \frac{n\sin ns}{\sin s}$$

folgt

$$T_n'(x_{nk}) = \frac{(-1)^k n}{\sin \dfrac{2k-1}{2n}\pi} .$$

Für gerades n folgt

$$\left|T_n'(x_{n,\frac{n}{2}})\right| = \frac{n}{\cos \dfrac{\pi}{2n}} \le \sqrt{2}\, n \quad (n \ge 2)$$

und für ungerades n

$$\left|T_n'(x_{n,\frac{n+1}{2}})\right| = n ,$$

so dass

$$\kappa_n \ge \frac{1}{16\, n^2} \min\left\{\mu_0, \frac{1}{\mu_0}\right\} [T_n(3)]^2 .$$

Aus $T_{n+1}(x) = 2\,x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n \ge 1$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ folgt mit $z_n := T_n(3)$

$$z_{n+1} - 6\, z_n + z_{n-1} = 0 , \quad z_0 = 1 ,\; z_1 = 3 .$$

Das charakteristische Polynom zu dieser Differenzengleichung lautet $\lambda^2 - 6\,\lambda + 1$, hat also die Nullstellen $\lambda_{1/2} = 3 \pm \sqrt{8}$, so dass $z_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung ist. Die Anfangsbedingungen liefern $c_1 + c_2 = 1$ und $c_1(3+\sqrt{8}) + c_2(3-\sqrt{8}) = 3$, also $c_1 = c_2 = \dfrac{1}{2}$. Es folgt

$$[T_n(3)]^2 \ge \frac{1}{4}\left[\lambda_1^2\right]^n = \frac{1}{4}[17 + 6\sqrt{8}]^n$$

und für $\mu_0 = 1$

$$\kappa_n \ge \frac{[17 + 6\sqrt{8}]^n}{64\, n^2} .$$

Wir betrachten nun die Situation

$$F_n(A_1, \ldots, A_n, x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{1}{s_j}\sum_{k=1}^n A_k Q_j(x_k)\right]_{j=0}^{2n-1} , \quad s_j = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} [Q_j(x)]^2\, d\Gamma(x)} ,$$

wobei die $Q_j(x)$ orthogonale Polynome bzgl. $d\Gamma(x)$ und die Parameter der Gaußschen Quadraturformel bzgl. $d\Omega(x)$ gesucht sind. Wir definieren die sog. **Hermiteschen Grundpolynome** $H_j,\, K_j \in \mathbb{C}_{2n}[x]$ über die Bedingungen

$$H_j(x_k) = \delta_{jk} , \quad H_j'(x_k) = 0 , \quad K_j(x_k) = 0 , \quad K_j'(x_k) = \delta_{jk} ,$$

$j, k = 1, \ldots, n$. Es gilt

$$H_j(x) = [\ell_j(x)]^2[1 - 2\,\ell_j'(x_j)(x - x_j)] \quad \text{und} \quad K_j(x) = [\ell_j(x)]^2(x - x_j) .$$

Wir schreiben

$$H_j(x) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} Q_{k-1}(x) , \quad K_j(x) = \sum_{k=1}^{2n} \beta_{jk} Q_{k-1}(x)$$

und definieren

$$\Sigma = [\mathrm{row}_j \Sigma]_{j=0}^{2n-1} = [Q_j(x_1) \ \cdots \ Q_j(x_n) \ Q_j'(x_1) \ \cdots \ Q_j'(x_n)]_{j=0}^{2n-1} .$$

Dann ist

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} [\alpha_{jk}]_{j=1,k=1}^{n,\ 2n} \\ [\beta_{jk}]_{j=1,k=1}^{n,\ 2n} , \end{bmatrix}$$

und mit den Bezeichnungen

$$D_A = \mathrm{diag}\,[1, \ldots, 1, A_1, \ldots, A_n] , \ D_S = \mathrm{diag}\,[s_0, \ldots, s_{2n-1}]$$

folgt

$$\left\| D_A^{-1} \Sigma^{-1} D_S \right\|_F^2 = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{2n} \left[\alpha_{jk}^2 + \frac{\beta_{jk}^2}{A_j^2} \right] s_k^2 .$$

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}} [H_j(x)]^2 \, d\Gamma(x) = \sum_{k=1}^{2n} s_{k-1}^2 \alpha_{jk}^2 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} [K_j(x)]^2 \, d\Gamma(x) = \sum_{k=1}^{2n} s_{k-1}^2 \beta_{jk}^2$$

gilt also

$$\left\| (F_n')^{-1} \right\|_F = \sqrt{\int_{\mathbb{T}} g_n(x) \, d\Gamma(x)} ,$$

wobei

$$g_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \left\{ [H_j(x)]^2 + \frac{1}{A_j^2} [K_j(x)]^2 \right\} .$$

Beispiel 2.2 *W. Gautschi (1978) zeigte, dass für* $d\Omega(x) = (1-x^2)^\alpha$, $-\frac{1}{2} \le \alpha \le 0$, $-1 < x < 1$, *und* $Q_j(x) = P_j^{\beta,\beta}(x)$, $-\frac{1}{2} \le \beta \le 0$

$$\kappa_n \sim \begin{cases} n^{2(\alpha+\beta)+5} & , \quad \alpha \ne 0, \alpha \ne \beta , \\ n^{2\beta+7} & , \quad \alpha = 0, \beta \ne 0 , \\ n^{3\alpha+\frac{7}{2}} & , \quad \alpha = \beta , \end{cases}$$

gilt.

2.4 Die Kondition algebraischer Gleichungen

Wir betrachten ein System von Polynomen $P_k \in \mathbb{R}[x]$ mit $\deg P_k(x) = k$, $k = 0, 1, \ldots$ Für $u = [u_1, \ldots, u_n]^T \in \mathbb{R}^n$ sei

$$p(u; x) = P_n(x) + \sum_{k=1}^{n} u_k P_{k-1}(x) .$$

Wir interessieren uns für die Gleichung

$$p(u;x) = 0 \tag{2.5}$$

und betrachten q einfache Nullstellen (d.h. Lösungen dieser Gleichung) $[\xi_1^o, \dots, \xi_q^o]^T =: \xi^o$, die dem Vektor $u^o = [u_1^o, \dots, u_n^o]^T$ entsprechen mögen.

Der Multiindex $\underline{k} = \{k_1, \dots, k_p\}$, $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_p \le n$, enthalte die Indizes, für die in $u_{k_j}^o$ Störungen auftreten können. Mit $\underline{k}^c$ werde der komplementäre Multiindex zu $\underline{k}$ bezeichnet. Sei $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u_k = u_k^o \ \forall k \in \underline{k}^c$. Es exstiert eine Umgebung $U = U(u_{k_1}^o, \dots, u_{k_p}^o) \subset \mathbb{R}^p$, so dass für alle $u \in \mathbb{R}^n$ mit $u_{\underline{k}} = [u_{k_1}, \dots, u_{k_p}]^T \in U$ die Gleichung (2.5) q einfache Nullstellen $[\xi_1, \dots, \xi_q]^T =: \xi$ hat, wobei $\xi \longrightarrow \xi^o$ für $u \longrightarrow u^o$. Es seien $\xi^o \ne \Theta$ und $[u_{k_1}^o, \dots, u_{k_p}^o]^T \ne \Theta$. Wir betrachten die Abbildung

$$M_{\underline{k},q} : U \longrightarrow \mathbb{C}^q, \quad u_{\underline{k}} \mapsto \xi = f(u_{\underline{k}}) = \begin{bmatrix} f_1(u_{\underline{k}}) \\ \vdots \\ f_q(u_{\underline{k}}) \end{bmatrix},$$

wobei

$$p(u; f_j(u_{\underline{k}})) = 0 \quad \text{und} \quad f(u_{\underline{k}}) \longrightarrow \xi^o \text{ für } u_{\underline{k}} \longrightarrow u_{\underline{k}}^o,$$

und interessieren uns für die Kondition dieser Abbildung

$$\operatorname{cond}(M_{\underline{k},q}; u_{\underline{k}}^o) = \frac{\left\| u_{\underline{k}}^o \right\|}{\|\xi^o\|} \left\| f'(u_{\underline{k}}^o) \right\|.$$

Aus

$$p(u; f_j(u_{\underline{k}})) = P_n(f_j(u_{\underline{k}})) + \sum_{k=1}^{n} u_k P_{k-1}(f_j(u_{\underline{k}})) = 0$$

folgt

$$0 = \frac{\partial p(u;\xi_j)}{\partial u_{k_i}} + p'(u;\xi_j) \frac{\partial f_j(u_{\underline{k}})}{\partial u_{k_i}} = P_{k-1}(\xi_j) + p'(u;\xi_j) \frac{\partial f_j(u_{\underline{k}})}{\partial u_{k_i}}$$

und somit

$$\frac{\partial f_j(u_{\underline{k}})}{\partial u_{k_i}} = -\frac{1}{p'(u;\xi_j)} P_{k-1}(\xi_j).$$

Es folgt

$$f'(u_{\underline{k}}) = \left[\frac{\partial f_j(u_{\underline{k}})}{\partial u_{k_i}} \right]_{j=1,i=1}^{q\ ,\ p} = -D^{-1} V_{\underline{k},q}^T(\xi),$$

wobei

$$V_{\underline{k},q} = \left[P_{k_i-1}(\xi_j) \right]_{j=1,i=1}^{q\ ,\ p} \in \mathbb{C}^{q\times p} \quad \text{und} \quad D = \operatorname{diag}[p'(u;\xi_j)]_{j=1}^q \in \mathbb{C}^{q\times q}.$$

Wir wählen in $\mathbb{C}^p$ die ℓ^1-Norm. Die entsprechende Matrixnorm ist die Spaltensummennorm

$$\|[\alpha_{jk}]\| = \max_k \sum_j |\alpha_{jk}|.$$

Für $\underline{k} = \{1, \ldots, n\}$ und $q = n$ ehalten wir

$$\operatorname{cond}_{\ell^1}(M_{\underline{k},n}; u^o) = \frac{\sum_{k=1}^{n} |u_k^o|}{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j^o|} \max_{1 \le k \le n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|P_{k-1}(\xi_j^o)|}{|p'(u^o; \xi_j^o)|},$$

für $p = q = 1$, $k_1 = k$, $\xi_1^o = \xi^o$

$$\operatorname{cond}_{\ell^1}(M_{k,1}; u^o) = \frac{|u_k^o P_{k-1}(\xi^o)|}{|\xi^o p'(u^o; \xi^o)|}$$

und für $\underline{k} = 1, \ldots, n$, $q = 1$, $\xi_1^o = \xi^o$

$$\operatorname{cond}_{\ell^1}(M_{\underline{k},1}; u^o) = \frac{\sum_{k=1}^{n} |u_k^o| \max_{1 \le k \le n} |P_{k-1}(\xi^o)|}{|\xi^o p'(u^o; \xi^o)|}.$$

Ausgehend von den letzten beiden Fällen definiert man (als Kompromiss)

$$\operatorname{cond} \xi^o = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{cond}_{\ell^1}(M_{k,1}; u^o) = \frac{\sum_{k=1}^{n} |u_k^o P_{k-1}(\xi^o)|}{\xi^o p'(u^o; \xi^o)|}.$$

1. $P_{k-1}(x) = x^{k-1}$, $p(u^o; \xi_\nu) = 0$, $v = 1, \ldots, n$: W.Gautschi (1973) zeigte, dass

$$\operatorname{cond} \xi_\mu \le \frac{2 \prod_{\nu=1,\nu\neq\mu}^{n} \left(1 + \left|\frac{\xi_\nu}{\xi_\mu}\right|\right) - 1}{\prod_{\nu=1,\nu\neq\mu}^{n} \left|1 - \frac{\xi_\nu}{\xi_\mu}\right|}$$

gilt.

   (a) $\xi_\nu = \nu$, $\nu = 1, \ldots, n$:

$$\operatorname{cond} \xi_\mu = \frac{(\mu + n)! - \mu^n (\mu!)}{(\mu!)^2 (n - \mu)!}, \quad \mu = 1, \ldots, n.$$

   Es ist die Nullstelle ξ_μ am schlechtesten konditioniert, die $\frac{n}{\sqrt{2}}$ am nächsten liegt. Es gilt

$$\max_{1 \le \mu \le n} \operatorname{cond} \xi_\mu \sim \frac{1}{\pi(2 - \sqrt{2})n} \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^n$$

   und

$$\operatorname{cond} \xi_1 \sim n^2.$$

(b) $\xi_\nu = 2^{-\nu}\,,\ \nu = 1,\ldots,n\ :$

$$\operatorname{cond}\xi_\mu < 2\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^{-j}}{1-2^{j}}\right)^2 = 136.32\ldots$$

Für $\xi_\nu = 2^{\nu}\,,\ \nu = 1,\ldots,n\,,$ erhält man das gleiche Resultat.

(c) $\xi_\nu = e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}\,,\ \nu = 1,\ldots,n\,,$ d.h. $p(x) = x^n - 1\ :$

$$\operatorname{cond}\xi_\mu = \frac{1}{|\xi_\mu p'(\xi_\mu)|} = \frac{1}{n}$$

2. $P_{k-1}(x)$ - orhogonales Polynom

(a) $\xi_\nu = \dfrac{\nu}{n}\,,\ \nu = 1,\ldots,n\ :$ Die Zahl $\max\limits_{\mu}\operatorname{cond}\xi_\mu$ wird minimal für

$$P_{k-1}(x) = U_{k-1}(2x-1)\,,$$

wächst aber trotzdem exponentiell. Für gerades n gilt z.B.

$$\max_{\mu}\operatorname{cond}\xi_\mu \geq \frac{\left(\frac{n}{4}\right)^n}{\left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} \sim \frac{1}{\pi n}\left(\frac{e}{2}\right)^n .$$

(b) $\xi_\nu = 2^{1-\nu}\,,\ \nu = 1,\ldots,n\ :$ Die Zahl $\max\limits_{\mu}\operatorname{cond}\xi_\mu$ wird minimal für $P_{k-1}(x) = T_{k-1}(2x-1)\,.$

	$\max\limits_{\mu}\operatorname{cond}\xi_\mu$	
n	1.(b)	2.(b)
5	$4.91\cdot 10^1$	$5.0\cdot 10^1$
10	$1.13\cdot 10^2$	$1.44\cdot 10^{12}$
15	$1.32\cdot 10^2$	$1.19\cdot 10^{30}$
20	$1.36\cdot 10^2$	$3.58\cdot 10^{55}$

Kapitel 3

Kettenbrüche und orthogonale Polynome

3.1 Grundlagen

Unter einem (unendlichen) Kettenbruch versteht man ein Tripel $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}, \{c_n\}_{n=0}^{\infty})$ von Zahlenfolgen, wobei

$$\begin{aligned}
c_0 &= b_0\,, \\
c_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1}\,, \\
c_2 &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}}\,, \\
&\vdots \\
c_n &= b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}}\,.
\end{aligned}$$

Die Zahl c_n nennt man den n-ten Näherungsbruch des unendlichen Kettenbruches

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}\,. \tag{3.1}$$

Für c_n schreiben wir im weiteren kurz

$$c_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}$$

und für (3.1)

Ist $a_k = -d_k$, so schreiben wir $-\frac{d_k|}{|b_k}$ anstelle von $+\frac{-d_k|}{|b_k}$.

Definition 3.1 *Wir sagen, dass der Kettenbruch (3.1) gegen K konvergiert, wenn höchstens endlich viele Näherungsbrüche c_n nicht definiert sind und wenn*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = K$$

gilt. Wir schreiben dann auch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \cdots = K .$$

Wir können c_n in der Form

$$c_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

schreiben, wobei z.B.

$$A_0 = b_0 , \quad B_0 = 1 ,$$

$$A_1 = b_0 b_1 + a_1 \quad B_1 = b_1 ,$$

$$A_2 = b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2 , \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2 .$$

Allgemein kann man die Folgen $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ so definieren, dass

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} , \ n = 1, 2, \dots , \quad A_{-1} = 1 , \ A_0 = b_0 , \tag{3.2}$$

und

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} , \ n = 1, 2, \dots , \quad B_{-1} = 0 , \ B_0 = 1 . \tag{3.3}$$

A_n und B_n nennt man den n-ten **partiellen Zähler** bzw. **Nenner** des Kettenbruches (3.1). Es gelten die Formeln

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n , \quad n = 1, 2, \dots , \tag{3.4}$$

und unter der Voraussetzung, dass $B_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$,

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k} . \tag{3.5}$$

Lemma 3.2 *Ist $m_0 = 0$, so ist der n-te partielle Nenner des Kettenbruches*

$$1 - \frac{1|}{|1} - \frac{(1-m_0)m_1|}{|1} - \frac{(1-m_1)m_2|}{|1} - \cdots$$

gleich

$$B_n = (1-m_0)(1-m_1)\cdots(1-m_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

Lemma 3.3 *Es seien $a_n = (1-m_{n-1})m_n$, $m_0 = 0$ und $0 < m_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Dann ist*

$$1 - \frac{a_1|}{|1} - \frac{a_2|}{|1} - \frac{a_3|}{|1} - \cdots = \frac{1}{1+L},$$

wobei

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{(1-m_1)(1-m_2)\cdots(1-m_n)}.$$

Theorem 3.4 *Es seien $b_n = (1-g_{n-1})g_n$, $0 \le g_0 < 1$ und $0 < g_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Dann gilt*

$$1 - \frac{b_1|}{|1} - \frac{b_2|}{|1} - \frac{b_3|}{|1} = g_0 + \frac{1-g_0}{1+G}, \tag{3.7}$$

wobei

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)}.$$

3.2 Übungsaufgaben

1. Man zeige, dass aus

   $$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots = K \neq 0$$

   die Beziehung

   $$b_{-1} + \frac{a_0|}{|b_0} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots = b_{-1} + \frac{a_0}{K}$$

   folgt.

2. Man beweise: Ist der Kettenbruch

   $$1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$$

   konvergent, so ist sein Wert gleich $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3.3 Jacobi-Brüche und orthogonale Polynome

Es seien α_n und β_n gegebene Zahlen mit $\beta_n \neq 0$. Für den n-ten partiellen Nenner des sogenannten Jacobi-Bruches

$$\frac{\beta_0|}{|x-\alpha_0} - \frac{\beta_1|}{|x-\alpha_1} - \frac{\beta_2|}{|x-\alpha_2} - \cdots \tag{3.8}$$

schreiben wir $P_n(x)$. Nach Formel (3.3) gilt dann

$$P_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,, \quad P_0(x) = 1\,,\ P_{-1}(x) = 0\,. \tag{3.9}$$

Der n-te partielle Zähler $A_n(x)$ genügt der Rekurisonsformel

$$A_{n+1}(x) = (x-\alpha_n)A_n(x) - \beta_n A_{n-1}(x) \quad n = 1,2,\ldots\,, \quad A_1(x) = \beta_0\,,\ A_0(x) = 0\,,\ A_{-1}(x) = 1\,.$$

Dabei ist $\beta_0^{-1}A_n(x)$ ein monisches Polynom vom Grade $n-1$, welches unabhängig von β_0 ist. Wir schreiben deshalb $Q_n(x) = \beta_0^{-1}A_{n+1}(x)$, $n = -1,0,1,\ldots$ Es gilt dann

$$Q_{n+1}(x) = (x-\alpha_{n+1})Q_n(x) - \beta_{n+1}Q_{n-1}\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,, \tag{3.10}$$

$Q_0(x) = 1$, $Q_{-1}(x) = 0$. Die Polynome $Q_n(x)$ nennt man die **monischen Zählerpolynome** bezüglich des Polynomsystems $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Aus (3.4) folgt

$$P_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) - P_n(x)Q_n(x) = -\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\,, \quad n = 1,2,\ldots \tag{3.11}$$

Theorem 3.5 *Gilt $\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_n > 0$, so genügen die Nullstellen x_{nk} und y_{nk} der Polynome $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ den Beziehungen*

$$x_{n+1,k+1} < y_{nk} < x_{n+1,k}\,.$$

Folgerung 3.6 *Sind (η_1,ξ_1) und (η_1^1,ξ_1^1) die Trägerintervalle der OPS*

$$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty} \quad \textit{und} \quad \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}\,,$$

so gilt $(\eta_1^1,\xi_1^1) \subset (\eta_1,\xi_1)$. Ferner folgt z.B. aus $\xi_1^1 < \xi_1$, dass $P_n(x)$ für alle hinreichend grossen n im Intervall (ξ_1^1,ξ_1) genau eine Nullstelle hat.

Theorem 3.7 *Sind die α_n reell und die β_n positiv, so gilt*

$$\frac{\beta_0 Q_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{nk}}{x-x_{nk}}\,.$$

3.4 Übungsaufgaben

1. Zeigen Sie, dass die monischen Tschebyscheff-Polynome $2^{-n}U_n(x)$ die Zählerpolynome sowohl für $2^{1-n}T_n(x)$ als auch für $2^{-n}U_n(x)$ sind.

2. Die Polynome $P_n(\gamma;x)$ seien definiert durch

$$P_{n+1}(\gamma;x) = (x-\alpha_n)P_n(\gamma;x) - \beta_n P_{n-1}(\gamma;x)\,, \quad n = 1,2,\ldots\,,$$
$$P_0(\gamma;x) = 1\,, \quad P_1(\gamma;x) = P_1(x) - \gamma = x - (\alpha_0+\gamma)\,.$$

   Zeigen Sie, dass $P_n(\gamma;x) = P_n(x) - \gamma Q_{n-1}(x)$ gilt, wobei mit $Q_n(x)$ die Zählerpolynome zum System $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ $(P_n(x) = P_n(0;x))$ bezeichnet sind.

3.5 Beweise

Beweis der Formeln (3.2) und (3.3): Wir führen den beweis mittels vollständiger Induktion.

1. Induktionsanfang:

$$A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1} = b_1 b_+ a_1 \qquad B_1 = b_1 B_0 + a_1 B_{-1} = b_1$$

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0 = b_2(b_1 b_0 + a_1) + a_2 b_0\,, \quad B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0 = b_2 b_1 + a_2\,.$$

2. Schluss von n auf $n+1$: es ist

$$c_{n+1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{\left|b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right.}\,,$$

also

$$c_{n+1} = \frac{\widetilde{A}_n}{\widetilde{B}_n}$$

mit

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_n &= \left(b_n + \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ &= \frac{(b_n b_{n+1} + a_{n+1}) A_{n-1} + b_{n+1} a_n A_{n-2}}{b_{n+1}} \\ &= \frac{b_{n+1}(b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}) + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1}} \\ &= \frac{b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}}{b_{n+1}} \end{aligned}$$

und analog

$$\widetilde{B} = \frac{b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}}{b_{n+1}}\,.$$

Beweis von Lemma 3.2: Es ist $B_1 = b_1 = 1$. Aus (3.3) folgt

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= B_n - (1-m_{n-1}) m_n B_{n-1} \\ &= (1-m_0)(1-m_1)\cdots(1-m_{n-1}) - (1-m_{n-1}) m_n (1-m_0)\cdots(1-m_{n-2}) \\ &= (1-m0)\cdots(1-_{n-1})(1-m_n)\,. \end{aligned}$$

Beweis von Lemma 3.3: Mit $c_n = \dfrac{A_n}{B_n}$ und

$$\frac{\overline{A}_{n+1}}{\overline{B}_{n+1}} := 1 - \frac{1}{\frac{A_n}{B_n}} = 1 - \frac{1|}{|1} - \frac{a_1|}{|1} - \cdots - \frac{a_n|}{|1}$$

folgt aus Lemma 3.2
$$\overline{B}_{n+1} = (1-m_0)\cdots(1-m_n) > 0$$
und aus (3.5) mit $a_0 = 1$
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{A}_{n+1}}{\overline{B}_{n+1}} &= 1 + \sum_{k=}^{n} \frac{(-1)^(-1)(-a_1)\cdots(-a_k)}{\overline{B}_k \overline{B}_{k+1}} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_0 a_1 a_2 \cdots a_k}{(1-m_0)^2 \cdots (1-m_{k-1})^2 (1-m_k)} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{m_1 \cdots m_k}{(1-m_1)\cdots(1-m_k)}\,.
\end{aligned}$$
Es folgt
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{A}_{n+1}}{\overline{B}_{n+1}}} = \frac{1}{1+L}\,.$$

Beweis von Theorem 3.4:
Fall $g_0 = 0$: Behauptung ist äquivalent zu Lemma 3.3.
Fall $0 < g_0 < 1$: Aus Lemma 3.2 folgt
$$1 - \frac{g_0|}{|1} - \frac{b_1|}{|1} - \frac{b_2|}{|1} - \cdots = \frac{1}{1+K} = 1 - \cfrac{g_0}{1 - \cfrac{b_1|}{|1} - \cdots}$$
mit
$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0 g_1 \cdots g_{n-1}}{(1-g_0)(1-g_1)\cdots(1-g_{n-1})} = \frac{g_0}{1-g_0}(1+G)\,.$$
Hieraus ergibt sich
$$\begin{aligned}
1 - \frac{b_1|}{|1} - \cdots &= \cfrac{g_0}{1 - \cfrac{1}{1+K}} = g_0 \frac{1+K}{K} = g_0(1+K^{-1}) \\
&= g_0\left(1 + \frac{1-g_0}{g_0}\frac{1}{1+G}\right) = g_0 + \frac{1-g_0}{1+G}\,.
\end{aligned}$$

3.6 Kettenfolgen

Definition 3.8 *Eine Folge* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *der Gestalt* $a_n = (1-g_{n-1})g_n$ *mit* $0 \le g_0 < 1$ *und* $0 < g_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, *heisst* **Kettenfolge**. *Dabei nennt man* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *eine* **Parameterfolge** *und* g_0 *einen* **Anfangsparameter** *der Kettenfolge* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Beispiel 3.9 *Die konstante Folge* $\left\{\frac{1}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *ist Kettenfolge, wobei sowohl* $\left\{\frac{n}{2(n+1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *als auch die konstante Folge* $\left\{\frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *Parameterfolgen sind. Die Gleichungen*

$$a = \left(1 - \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right)\frac{1-\sqrt{1-4a}}{2} = \left(1 - \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$$

zeigen, dass jede konstante Folge $\{a\}_{n=1}^{\infty}$ *mit* $0 < a \leq \frac{1}{4}$ *eine Kettenfolge ist.*

Lemma 3.10 *Sind* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *Parameterfolgen der Kettenfolge* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *, so gilt* $g_k < h_k$ *,* $k = 1, 2, \dots$ *, genau dann, wenn* $g_0 < h_0$ *ist.*

Lemma 3.11 *Hat eine Kettenfolge* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *die Parameterfolge* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *mit* $g_0 > 0$*, so hat* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zu jedem* $h_0 \in [0, g_0]$ *eine Parameterfolge* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *.*

Folgerung 3.12 *Jede Kettenfolge besitzt eine Parameterfolge* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ *mit* $m_0 = 0$*. Dabei gilt* $m_n < g_n$ *,* $n = 0, 1, 2, \dots$ *, für jede andere Parameterfolge* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *dieser Kettenfolge. Die Folge* $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nennt man die* **minimale Parameterfolge** *der entsprechenden Kettenfolge. Eine Parameterfolge* $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *, für die* $M_n \geq g_n$ *,* $n = 0, 1, 2, \dots$ *, für jede Parameterfolge* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *gilt, nennt man* **maximale Parameterfolge** *der entsprechenden Kettenfolge.*

Lemma 3.13 *Jede Kettenfolge besitzt eine maximale Parameterfolge.*

Im weiteren seien mit $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ die minimale und mit $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ die maximale Parameterfolge der Kettenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bezeichnet.

Theorem 3.14 *Ist* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Kettenfolge mit der Parameterfolge* $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ *und mit der Eigenschaft* $a_n \leq b_n$ *,* $n = 1, 2, \dots$ *, so gilt*

$$m_n \leq h_n \leq M_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Lemma 3.15 *Ist die Kettenfolge* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monoton nicht fallend, so sind die minimale Parameterfolge* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ *streng monoton wachsend und die maximale Parameterfolge* $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *monoton nicht fallend.*

Folgerung 3.16 *Für* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *ist* $\{M_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *.*

Folgerung 3.17 *Gilt für einen gewissen Index* N $a_n \geq \frac{1}{4}$ *,* $n = N, N+1, \dots$ *, so folgt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$*. Ist also* $b_n \geq b > \frac{1}{4}$ *,* $n = N, N+1, \dots$ *, so ist* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ **keine** *Kettenfolge.*

Theorem 3.18 (Vergleichstest) *Gilt* $0 < c_n \leq a_n$ *,* $n = 1, 2, \dots$ *, so ist* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ebenfalls eine Kettenfolge.*

Lemma 3.19 *Es gilt*

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{a_k}-\frac{1}{2}\right) < \frac{m_n}{2}$$

und, falls $a_n \geq \dfrac{1}{4}$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n}\left(a_k-\frac{1}{4}\right) < \frac{3}{8}\,.$$

Folgerung 3.20 *Gilt* $b_n \geq \dfrac{1}{4}$, $n = N, N+1, \ldots$, *und* $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}\left(b_n-\frac{1}{4}\right) = \infty$, *so ist* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *keine Kettenfolge.*

Beweis von Folgerung 3.16: Aus Lemma 3.15 folgt $M_{k+1} \leq M_k$ und somit

$$\frac{1}{4} = (1-M_k)M_{k+1} \leq (1-M_k)M_k \leq \frac{1}{4}\,.$$

□

Beweis von Folgerung 3.17: Wir können $N = 1$ annehmen. Die minimale Parameterfolge zu $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ist $\left\{\dfrac{n}{2(n+1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, so dass sich aus Theorem 3.14 und Folgerung 3.16 die Ungleichungen

$$\frac{n}{2(n+1)} \leq g_n \leq \frac{1}{2}$$

ergeben. □

Beweis von Theorem 3.18: Wir definieren $h_0 = 0$, $h_1 = c_1$, so dass $h_1 \leq a_1 = m_1$. Es folgt $c_1 = (1-h_0)h_1$, $0 < h_1 \leq m_1$. Aus $c_k = (1-h_{k-1})h_k$, $0 < h_k \leq m_k$, $k = 1, \ldots, n$, folgt

$$c_{n+1} \leq a_{n+1} = (1-m_n)m_{n+1} \leq (1-h_n)m_{n+1}\,.$$

Somit existiert ein h_{n+1} mit $0 < h_{n+1} \leq m_{n+1}$ und $c_{n+1} = (1-h_n)h_{n+1}$. □

Beweis von Lemma 3.19:

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{(1-m_{n-1})m_n} \leq \frac{1-m_{n-1}+m_n}{2}$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k} \leq n + m_n - m_0 = n + m_n$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{a_k}-\frac{1}{2}\right) \leq \frac{m_n}{2}$$

Falls $a_n \geq \frac{1}{4}$, $n = 1, 2, \dots$, so folgt aus Theorem 3.14

$$\frac{n}{2(n+1)} \leq m_n \leq \frac{1}{2},$$

so dass

$$0 \leq a_k - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{a_k} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{a_k} - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{3}{2}\left(\sqrt{a_k} - \frac{1}{2}\right).$$

□

Im weiteren verwenden wir die Bezeichnungen $a_n^{(k)}$ für a_{n+k} und $\{m_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$ für die minimale Parameterfolge der Kettenfolge $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Nach Lemma 3.3 ist

$$1 - \frac{a_1^{(k)}|}{|1} - \frac{a_2^{(k)}|}{|1} - \frac{a_3^{(k)}|}{|1} - \cdots = \frac{1}{L_k} =: P_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{3.12}$$

wobei

$$L_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{k1} m_{k2} \cdots m_{kn}}{(1 - m_{k1})(1 - m_{k2}) \cdots (1 - m_{kn})}.$$

Offenbar gilt $0 \leq P_k < 1$ und

$$P_k = 1 - \frac{a_{k+1}}{P_{k+1}},$$

so dass $P_{k+1} \neq 0$ und

$$a_{k+1} = (1 - P_k) P_{k+1}\,, \quad 0 \leq P_0 < 1\,, \quad 0 < P_{k+1} < 1\,,\ k = 0, 1, 2, \dots$$

Theorem 3.21 *Die in (3.12) definierte Folge* $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ist die maximale Parameterfolge zu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Theorem 3.22 *Die Parameterfolge* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *zur Kettenfolge* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ist genau dann deren maximale Parameterfolge, wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)} = \infty$$

gilt.

Theorem 3.23 *Ist* $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ *irgendeine, nicht maximale Parameterfolge zu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{g_n} = 1.$$

Folgerung 3.24 *Falls* $a_n = a$, $n = 1, 2, \dots$, *und* $0 < a \leq \frac{1}{4}$, *so*

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4a}\right) \quad \textit{und} \quad M_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4a}\right).$$

Theorem 3.25 *Gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *so folgt* $0 \le a \le \frac{1}{4}$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4a}\right) .$$

Ist ausserdem $M_0 \neq 0$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4a}\right) .$$

3.7 Kettenfolgen und orthogonale Polynome

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ sei das monische OPS zu dem positiv definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$ und genüge der Rekursionsformel (3.9). Mit (η_1, ξ_1) sei das Trägerintervall von $\mathcal{L}$ bezeichnet. Für ein fest gewähltes $s \in \mathbb{R}$ definieren wir $R_n(x) = P_n(x+s)$. Dann folgt

$$R_{n+1}(x) = (x - \alpha_n')R_n(x) - \beta_n R_{n-1}(x) , \quad n = 0, 1, 2, \dots ,$$

mit $\alpha_n' = \alpha_n - s$, d.h. $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ist das monische OPS zum Momentenfunktional $\mathcal{M}$, definiert durch $\mathcal{M}[x^n] = \mathcal{L}[(x-s)^n]$. Das entsprechende Trägerintervall ist gleich $(\eta_1 - s, \xi_1 - s)$. Wir definieren

$$\gamma_n(x) = \frac{\beta_n}{(\alpha_{n-1} - x)(\alpha_n - x)} , \quad n = 1, 2, \dots$$

Theorem 3.26 *Es gilt* $\eta_1 \ge s$ *genau dann, wenn* $\alpha_n > s$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *gilt und wenn* $\{\gamma_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Kettenfolge ist.*

Folgerung 3.27 *Es ist* $\xi_1 \le t$ *genau dann, wenn* $\alpha_n < t$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *gilt und wenn* $\{\gamma_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Kettenfolge ist.*

Folgerung 3.28 *Es gilt* $\eta_1 < \alpha_n < \xi_1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Theorem 3.29 *Das Trägerintervall* (η_1, ξ_1) *ist genau dann beschränkt, wenn sowohl* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ *als auch* $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ *beschränkte Folgen sind.*

Theorem 3.30 *Es gilt* $(\eta_1, \xi_1) = (-\infty, \infty)$ *genau dann, wenn* $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *für kein* $x \in \mathbb{R}$ *eine Kettenfolge ist.*

Somit ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend dafür, dass $(\eta_1, \xi_1) = (-\infty, \infty)$ gilt:

(a) $\inf\{\alpha_n : n = 0, 1, 2, \dots\} = -\infty$ und $\sup\{\alpha_n : n = 0, 1, 2, \dots\} = +\infty$.

(b) $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt und $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist unbeschränkt.

(c) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_{n-1}\alpha_n} > \frac{1}{4}$.

Theorem 3.31 *Es sei $x \notin (\eta_1, \xi_1)$, so dass $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^\infty$ eine Kettenfolge ist. Dann ist die entsprechende minimale Parameterfolge $\{m_n(x)\}_{n=0}^\infty$ gegeben durch*

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x-\alpha_n)P_n(x)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mit $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ bezeichnen wir das ONPS zu $\mathcal{L}$, d.h.

$$p_n(x) = \sqrt{\beta_0 \cdots \beta_n} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Theorem 3.32 *Ist (η_1, ξ_1) beschränkt, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x)| = \infty \quad \forall\, x \notin [\eta_1, \xi_1].$$

3.8 Beweise

3.8.1 Beweis von Theorem 3.26

Es sei $\mathcal{M}$ ein quasi-definites und symmetrisches Momentenfunktional, d.h. $\mathcal{M}[M_{2n+1}] = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wir setzen $\mathcal{L}[M_n] := \mathcal{M}[M_{2n}]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Mit $\{S_n(x)\}_{n=0}^\infty$ bezeichnen wir das monische OPS zu $\mathcal{M}$. Dann gilt (vgl. Abschnitt 1.5, Aufgabe 1) $S_n(x) = (-1)^n S_n(x)$, d.h. $S_{2m}(x) = P_m(x^2)$ und $S_{2m+1}(x) = xQ_m(x^2)$ mit monischen Polynomen $P_m(x)$ und $Q_m(x)$ m-ten Grades. Aus $\mathcal{L}[\pi(x)] = \mathcal{M}[\pi(x^2)]$ folgt

$$\mathcal{L}[P_m P_n] = \mathcal{M}[S_{2m} S_{2n}] \tag{3.13}$$

und

$$\mathcal{L}_0^*[Q_m Q_n] = \mathcal{L}[xQ_m(x)Q_n(x)] = \mathcal{M}[S_{2m+1}S_{2n+1}], \tag{3.14}$$

wobei das Funktional $\mathcal{L}_z^*$ (vgl. Abschnitt 1.4) über die Beziehung $\mathcal{L}_z^*[M_n] := \mathcal{L}[(x-z)x^n]$ definiert ist. $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ ist also das monische OPS zu $\mathcal{L}$, und es ist $Q_n(x) = P_n^0(x)$, wobei (vgl. Satz 1.26)

$$P_n^z(x) = \frac{1}{x-z}\left[P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)}\, P_n(x)\right]$$

das monische OPS zu $\mathcal{L}_z^*$ beschreibt. Ist $\mathcal{M}$ positiv definit, so sind nach Folgerung 1.9 auch $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}_0^*$ positiv definit. Offenbar ist $(\eta_1^{\mathcal{M}}, \xi_1^{\mathcal{M}})$ symmetrisch bzgl. 0. Wir schreiben $(\eta_1^{\mathcal{M}}, \xi_1^{\mathcal{M}}) = (-\zeta, \zeta)$. Dann folgt $(\eta_1^{\mathcal{L}}, \xi_1^{\mathcal{L}}) = (\eta_1^{\mathcal{L}}, \zeta^2)$ mit $\eta_1^{\mathcal{L}} \ge 0$.

Wir gehen nun umgekehrt von einem quasi-definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$ aus und definieren $\mathcal{M}[M_{2m}] = \mathcal{L}[M_m]$, $\mathcal{M}[M_{2m+1}] = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Sind $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ das monische OPS zu $\mathcal{L}$ und $Q_n(x) = P_n^0(x)$, so definieren

$$S_{2m}(x) = P_m(x^2) \quad \text{und} \quad S_{2m+1}(x) = xQ_m(x) \tag{3.15}$$

das monische OPS zu $\mathcal{M}$, denn es gilt (3.13), (3.14) und

$$\mathcal{M}[S_{2m}S_{2n+1}] = 0, \quad \text{da} \quad \mathcal{M}[M_{2k+1}] = 0.$$

Ist $\mathcal{L}$ positiv definit mit $\eta_1 \ge 0$, so ist $\mathcal{L}_0^*$ positiv definit auf (η_1, ξ_1) (vgl. Satz 1.26). Aus Folgerung 1.9 erhalten wir dann die positive Definitheit von $\mathcal{M}$ mit $(\eta_1^{\mathcal{M}}, \xi_1^{\mathcal{M}}) = (-\sqrt{\xi_1}, \sqrt{\xi_1})$.

Satz 3.33 *Es seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{L}$ Momentenfunktionale mit*

$$\mathcal{M}[M_{2m}] = \mathcal{L}[M_m] \quad \textit{und} \quad \mathcal{M}[M_{2m+1}] = 0\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Dann ist das durch (3.15) definierte System $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ genau dann das monische OPS zu $\mathcal{M}$, wenn $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ das monische OPS zu $\mathcal{L}$ und $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ das monische OPS zu $\mathcal{L}_0^*$ sind. $\mathcal{M}$ ist genau dann positiv definit, wenn $\mathcal{L}$ auf $(0,\infty)$ positiv definit ist, wobei in diesem Fall

$$(\eta_1^{\mathcal{M}}, \xi_1^{\mathcal{M}}) = (-\zeta, \zeta) \quad \textit{und} \quad \eta_1^{\mathcal{L}} \geq 0\,,\ \xi_1^{\mathcal{L}} = \zeta^2$$

gilt.

Neben (3.9) sei nun noch

$$Q_{n+1}(x) = (x - \gamma_n) Q_n(x) - \delta_n Q_{n-1}(x)\,, \quad Q_{-1} \equiv 0\,,\ Q_0 \equiv 1 \tag{3.16}$$

und

$$S_{n+1}(x) = x S_n(x) - \varepsilon_n S_{n-1}(x)\,, \qquad S_{-1} \equiv 0\,,\ S_0 \equiv 1 \tag{3.17}$$

mit $\delta_0 = \mathcal{L}_0^*[M_0]$ und $\varepsilon_0 = \mathcal{M}[M_0]$ erfüllt. Aus (3.17) und (3.15) folgt dann mit $n = 2m+1$

$$P_{m+1}(x^2) = x^2 Q_m(x^2) - \varepsilon_{2m+1} P_m(x^2)\,,$$

d.h.

$$P_{m+1}(x) = x Q_m(x) - \varepsilon_{2m+1} P_m(x)\,.$$

Für $n = 2m$ ergibt sich dagegen

$$x Q_m(x^2) = x P_m(x^2) - \varepsilon_{2m} x Q_{m-1}(x^2)\,,$$

d.h.

$$Q_m(x) = P_m(x) - \varepsilon_{2m} Q_{m-1}(x)\,.$$

Wir erhalten

$$Q_{m+1}(x) + \varepsilon_{2m+2} Q_m(x) = x Q_m(x) - \varepsilon_{2m+1}[Q_m(x) + \varepsilon_{2m} Q_{m-1}(x)]\,,$$

also

$$Q_{m+1}(x) = (x - \varepsilon_{2m+2} - \varepsilon_{2m+1}) Q_m(x) - \varepsilon_{2m+1}\varepsilon_{2m} Q_{m-1}(x)\,,$$

sowie

$$P_{m+1}(x) + \varepsilon_{2m+1} P_m(x) = x P_m(x) - \varepsilon_{2m}[P_m(x) + \varepsilon_{2m-1} P_{m-1}(x)]\,,$$

d.h.

$$P_{m+1}(x) = (x - \varepsilon_{2m+1} - \varepsilon_{2m}) P_m(x) - \varepsilon_{2m}\varepsilon_{2m-1} P_{m-1}(x)\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,,$$

und

$$P_1(x) = (x - \varepsilon_1) P_0(x)\,.$$

Somit gelten die Beziehungen

$$\alpha_0 = \varepsilon_1\,, \quad \beta_0 = \mathcal{L}[M_0] = \mathcal{M}[M_0] = \varepsilon_0$$

und

$$\alpha_n = \varepsilon_{2n+1} + \varepsilon_{2n}\,, \quad \beta_n = \varepsilon_{2n}\varepsilon_{2n-1}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

sowie

$$\gamma_n = \varepsilon_{2n+2} + \varepsilon_{2n+1}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,,$$
$$\delta_n = \varepsilon_{2n+1}\varepsilon_{2n}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

und

$$\delta_0 = \mathcal{L}_0^*[M_0] = \mathcal{L}[M_1] = \mathcal{L}[xP_0(x)] = \mathcal{L}[P_1(x) + \varepsilon_1 P_0(x)] = \varepsilon_1\beta_0 = \varepsilon_1\varepsilon_0\,.$$

Satz 3.34 *Es seien $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ OPS, die (3.9), (3.16) und (3.17) genügen. Dann gilt*

$$Q_n(x) = P_n^0(x)\,, \quad S_{2m}(x) = P_m(x^2)\,, \quad S_{2m+1}(x) = xQ_m(x^2)$$

genau dann, wenn die Beziehungen

$$\beta_0 = \varepsilon_0\,, \quad \alpha_0 = \varepsilon_1\,, \quad \alpha_n = \varepsilon_{2n+1} + \varepsilon_{2n}\,, \quad \beta_n = \varepsilon_{2n}\varepsilon_{2n-1}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,,$$

und

$$\gamma_n = \varepsilon_{2n+2} + \varepsilon_{2n+1}\,, \quad \delta_n = \varepsilon_{2n+1}\varepsilon_{2n}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

erfüllt sind. Alle drei Momentenfunktionale sind genau dann positiv definit, wenn $\varepsilon_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gilt.

Satz 3.35 *Es seien $R_{-1}(x) \equiv 0$, $R_0(x) \equiv 1$,*

$$R_{n+1} = (x - \alpha'_n)R_n(x) - \beta'_n R_{n-1}(x)\,,$$

$\beta'_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\beta'_0 > 0$, und $\mathcal{N}$ das entsprechende Momentenfunktional. Dann gilt:

(a) $\mathcal{N}$ ist genau dann positiv definit auf $(0, \infty)$, wenn eine Zahlenfolge $\{\delta'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{gathered} \delta'_0 \geq 0\,, \ \delta'_n > 0\,, \quad n = 1, 2, \dots\,, \\ \alpha'_n = \delta'_{2n} + \delta'_{2n+1}\,, \ n = 0, 1, 2, \dots\,, \quad \beta'_n = \delta'_{2n}\delta'_{2n-1}\,, \ n = 1, 2, \dots\,, \end{gathered} \tag{3.18}$$

existiert.

(b) Es gilt $\mathcal{N} = \mathcal{L}_0^*$ mit einem auf $(0, \infty)$ positiv definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$ genau dann, wenn neben (3.18) zusätzlich $\delta_0 > 0$ gilt.

Beweis.

(a) Ist $\mathcal{N}$ positiv definit auf $(0, \infty)$, so folgt aus Satz 3.33, dass $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ in Satz 3.34 die Rolle von $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ spielt, wobei alle drei Momentenfunktionale positiv definit sind und

$$\alpha'_0 = \varepsilon_1,\ \alpha'_n = \varepsilon_{2n+1} + \varepsilon_{2n},\ \beta'_n = \varepsilon_{2n}\varepsilon_{2n-1},\ \varepsilon_n > 0,\ n = 1, 2, \dots\,,$$

gilt. Wir haben nur noch $\delta'_0 = 0$ und $\delta'_n = \varepsilon_n$ zu setzen.

Es sei nun umgekehrt $\{\delta'_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Zahlenfolge mit den Eigenschaften (3.18). Ist $\delta'_0 = 0$, so ist Satz 3.34 mit $\varepsilon_0 = \beta'_0$ und $\varepsilon_n = \delta'_n$, $n = 1, 2, \dots$, anwendbar, wobei $P_n(x) = R_n(x)$ zu setzen ist. Gilt $\delta'_0 > 0$, so wenden wir Satz 3.34 mit $\varepsilon_0 = \beta'_0/\delta'_0$ und $\varepsilon_n = \delta'_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, an, wobei wir $Q_n(x) = R_n(x)$ setzen.

(b) Ist $\{\delta'_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge, die (3.18) und $\delta'_0 > 0$ genügt, so setzen wir $\varepsilon_0 = \beta'_0/\delta'_0$, $\varepsilon_n = \delta'_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, und wenden Satz 3.34 mit $Q_n(x) = R_n(x)$ an.

Sind umgekehrt $\mathcal{N} = \mathcal{L}_0^*$ und $\mathcal{L}$ auf $(0, \infty)$ positiv definit, so wenden wir wiederum Satz 3.34 mit $Q_n(x) = R_n(x)$ an und erhalten

$$\alpha'_n = \varepsilon_{2n+2} + \varepsilon_{2n+1}\,,\ \beta'_n = \varepsilon_{2n+1}\varepsilon_{2n}\,,\ \varepsilon_n > 0\,,\quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir brauchen nur noch $\delta'_n = \varepsilon_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, zu setzen.

□

Satz 3.36 *Wir verwenden die Bezeichnungen aus Satz 3.35.*

(a) Das Momentenfunktional $\mathcal{N}$ ist genau dann auf $(0, \infty)$ positiv definit, wenn $\alpha'_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, gilt und wenn eine Folge $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ existiert, so dass die Beziehungen

$$0 \le g_0 < 1\,,\ 0 < g_n < 1 \quad \textit{und} \quad \frac{\beta'_n}{\alpha'_{n-1}\alpha'_n} = (1 - g_{n-1})g_n\,,\quad n = 1, 2, \dots\,, \tag{3.19}$$

erfüllt sind.

(b) Es gilt $\mathcal{N} = \mathcal{L}_0^*$ mit einem auf $(0, \infty)$ positiv definiten Momentenfunktional $\mathcal{L}$ genau dann, wenn neben (3.19) zusätzlich $g_0 > 0$ gilt.

Beweis.

(a) Es sei $\mathcal{N}$ positiv definit auf $(0, \infty)$. Dann existiert nach Satz 3.35 eine Folge $\{\delta'_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit den Eigenschaften (3.18). Daraus folgt schrittweise

$$\begin{aligned}
& \alpha'_n \ge \delta'_{2n+1} > 0\,,\ \alpha'_n > \delta'_{2n}\,,\quad n = 0, 1, 2, \dots\,,\\
\Rightarrow\quad & \exists\, g_n : \delta'_{2n} = g_n\alpha'_n\,,\ 0 \le g_0 < 1\,,\ 0 < g_n < 1\,,\ n = 1, 2, \dots\,,\\
\Rightarrow\quad & \delta'_{2n+1} = \alpha'_n - \delta'_{2n} = (1 - g_n)\alpha'_n\,,\ n = 0, 1, 2, \dots\,,\\
\Rightarrow\quad & \beta'_n = \delta'_{2n}\delta'_{2n-1} = g_n\alpha'_n(1 - g_{n-1})\alpha'_{n-1}\,,\ n = 1, 2, \dots\,,\\
\Rightarrow\quad & \frac{\beta'_n}{\alpha'_{n-1}\alpha'_n} = (1 - g_{n-1})g_n\,,\ n = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Es sei nun umgekehrt (3.19) mit $\alpha'_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, erfüllt. Wir setzen $\delta'_{2n} = g_n \alpha'_n$ und $\delta'_{2n+1} = (1 - g_n)\alpha'_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Dann folgt

$$\delta'_0 \geq 0\,,\ \delta'_n > 0\,,\ n = 1, 2, \dots\,, \quad \text{und} \quad \alpha'_n = \delta'_{2n} + \delta'_{2n+1}\,,\ \beta'_n = \delta'_{2n-1}\delta'_{2n}\,,\ n = 1, 2, \dots$$

Aus Satz 3.35 folgt die positive Definitheit von $\mathcal{N}$ auf $(0, \infty)$.

(b) Offenbar ist $\delta_0 > 0$ genau dann, wenn $g_0 > 0$ gilt. Somit bleibt nur noch Satz 3.35,(b) anzuwenden.

□

Die Aussage von Theorem 3.26 folgt nun direkt aus Satz 3.13,(a).

3.8.2 Beweis von Theorem 3.32

Aus Theorem 3.31 folgt

$$\begin{aligned} P_n(x) &= [1 - m_{n-1}(x)](x - \alpha_{n-1})P_{n-1}(x) \\ &= [1 - m_{n-1}(x)][1 - m_{n-2}(x)](x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_{n-2})P_{n-2}(x) \\ &= [1 - m_{n-1}(x)] \cdots [1 - m_0(x)](x - \alpha_{n-1}) \cdots (x - \alpha_0)\,. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$[1 - m_{n-1}(x)](x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) = \frac{\beta_n}{m_n(x)}$$

ergibt sich daraus

$$[P_n(x)]^2 = \frac{[1 - m_0(x)] \cdots [1 - m_{n-1}(x)](x - \alpha_0)\beta_1 \cdots \beta_n}{m_1(x) \cdots m_{n-1}(x) m_n(x)(x - \alpha_n)}\,,$$

also

$$[p_n(x)]^2 = \frac{x - \alpha_0}{\beta_0[1 - m_n(x)](x - \alpha_n)\pi_n(x)}$$

mit

$$\pi_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \frac{m_k(x)}{1 - m_k(x)}\,.$$

Ist nun $x < \eta_1$, so folgt $0 < \gamma_n(x) < \gamma_n(\eta_1)$. Nach Theorem 3.14 bestimmt die Kettenfolge $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ihre Parameterfolge nicht eindeutig, so dass wegen Theorem 3.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n(x) < \infty$ gilt. Das bedeutet $\lim_{n\to\infty} \pi_n(x) = 0$ und zusammen mit Folgerung 3.28 $\lim_{n\to\infty} [p_n(x)]^2 = \infty$. □

Kapitel 4

Geburts- und Sterbeprozesse

4.1 Einführung

Geburts- und Sterbeprozesse sind spezielle stationäre Markov-Prozesse, deren Zustandsraum die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_+$ ist. Mit $p_{mn}(t)$, $m, n \in \mathbb{Z}_+$, $t \geq 0$, bezeichnen wir die sog. **Übergangswahrscheinlichkeiten**, d.h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System (z.B. die Größe einer Population) während der Zeitspanne t vom Zustand m zum Zustand n übergeht. Mit $P(t)$, $t \geq 0$, bezeichnen wir die **Übergangsmatrix**

$$P(t) = \left[\; p_{mn}(t) \;\right]_{m,n=0}^{\infty} .$$

Da der Prozess als **stationär** angenommen wird, hängt $p_{mn}(t)$ wiklich nur von m, n, t und nicht davon ab, zu welchem Zeitpunkt das System den Zustand m erreicht hat. Das ist äquivalent zu der Bedingung

$$P(s+t) = P(s)P(t) . \tag{4.1}$$

Für $t \longrightarrow +0$ mögen die Übergangswahrscheinlichkeiten folgenden Bedingungen genügen:

$$p_{mn}(t) = \begin{cases} \lambda_m t + o(t) & : \quad n = m+1 , \\ 1 - \lambda_m t - \mu_m t + o(t) & : \quad n = m , \\ \mu_m t + o(t) & : \quad n = m-1 , \\ o(t) & : \quad |m-n| > 1 . \end{cases} \tag{4.2}$$

Die Koeffizienten λ_m und μ_m nennt man die **Geburts-** bzw. **Sterberate** im Zustand m. Sie sollen den Bedingungen

$$\lambda_m > 0 , \; \mu_{m+1} > 0 , \; m = 0, 1, 2, \ldots , \; \mu_0 \geq 0 \tag{4.3}$$

genügen.

4.2 Die Chapman-Kolmororov-Gleichungen

Theorem 4.1 *Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{mn}(t)$ genügen sowohl den* **rückwärtigen**

$$p'_{mn}(t) = \lambda_{n-1}p_{m,n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{m,n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_{mn}(t) \tag{4.4}$$

als auch den **vorwärtigen Chapman-Kolmogorov-Gleichungen**

$$p'_{mn}(t) = \lambda_m p_{m+1,n}(t) + \mu_m p_{m+1,n}(t) - (\lambda_m + \mu_m)p_{mn}(t)\,. \tag{4.5}$$

Beweis. Es sei $\delta t > 0$. Aus (4.1) folgt $P(t+\Delta t) = P(t)P(\Delta t)$, d.h. wegen (4.2)

$$p_{mn}(t+\Delta t) = p_{m,n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t + p_{m,n+1}(t)\mu_{n+1}\Delta t + p_{mn}(t)[1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta t] + o(\Delta t)\,.$$

Es folgt

$$\frac{p_{mn}(t+\Delta t) - p_{mn}(t)}{\Delta t} = \lambda_{n-1}p_{m,n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{m,n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_{mn}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\,,$$

woraus sich für $\Delta t \longrightarrow +0$ die Gleichung (4.4) ergibt. (4.5) beweist man analog mittels der Beziehung $P(t+\Delta t) = P(\Delta t)P(t)$. □

Wir machen nun den Separationsansatz

$$p_{mn}(t) = f(t)Q_m F_n \tag{4.6}$$

und erhalten aus (4.4) (da $Q_m \neq 0$)

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\lambda_{n-1}F_{n-1} + \mu_{n+1}F_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)F_n}{F_n} =: -x\,. \tag{4.7}$$

Bis auf eine multiplikative Konstante ist also

$$f(t) = e^{-x\,t}\,. \tag{4.8}$$

Die F_n hängen offenbar von der Konstanten x ab, weshalb wir auch $F_n(x)$ schreiben. Wir erhalten

$$F_{-1}(x) := 0\,,\ -x\,F_n(x) = \mu_{n+1}F_{n+1}(x) + \lambda_{n-1}F_{n-1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)F_n(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.9}$$

$F_0(x)$ kann offenbar beliebig gewählt werden. Damit sind die $F_n(x)$ durch (4.9) bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt durch die Anfangsbedingungen

$$F_{-1}(x) = 0\,,\ F_0(x) = 1\,. \tag{4.10}$$

Setzen wir (4.6) in die rückwärtigen C-K-Gleichungen (4.5) ein, so sehen wir, dass die $Q_n(x)$ bis auf eine multiplikative Konstante durch die Anfangsbedingungen

$$Q_{-1}(x) = 0\,,\ Q_0(x) = 1 \tag{4.11}$$

und die rekursive Beziehung

$$-x\,Q_n(x) = \lambda_n Q_{n+1}(x) + \mu_n Q_{n-1}(x) - (\lambda_n + \mu_n)Q_n(x)\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,, \tag{4.12}$$

bestimmt sind. Aus (4.10)-(4.12) folgt, dass das Polynomsystem $\{\pi_n Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ mit

$$\pi_0 = 1\,,\ \pi_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n}\,, \quad n = 1, 2, \dots\,, \tag{4.13}$$

die gleichen Anfangsbedingungen und dieselbe Rekursionsgleichung erfüllt wie das Polynomsystem $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Der Separationsansatz (4.6) führt also auf

$$\frac{1}{\pi_m} e^{-x\,t} F_m(x) F_n(x)\,, \tag{4.14}$$

wobei $x \geq 0$ gelten muss, damit $P_{mn}(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Damit können wir den Lösungsansatz

$$p_{mn}(t) = \frac{1}{\pi_m} \int_0^{\infty} e^{-x\,t} F_m(x) F_n(x)\, d\Omega(x) \tag{4.15}$$

mit einem gewissen Maß $d\Omega$ machen. Wegen (4.2) gilt $p_{mn}(t) \longrightarrow \delta_{mn}$ für $t \longrightarrow +0$, so dass

$$\pi_m \delta_{mn} = \int_0^{\infty} F_m(x) F_n(x)\, d\Omega(x)\,. \tag{4.16}$$

Also müssen die Polynome $F_n(x)$ orthogonal bzgl. $d\Omega(x)$ sein.

Der Leitkoeefizient von $F_n(x)$ ist gleich

$$\frac{(-1)^n}{\mu_1 \cdots \mu_n}\,,$$

so dass für die monischen Polynome $\widehat{F}_n(x) = \mu_1 \cdots \mu_n (-1)^n F_n(x)$ aus (vgl. (4.9)

$$\mu_{n+1} F_{n+1}(x) = (-x + \lambda_n + \mu_n) F_n(x) - \lambda_{n-1} F_{n-1}(x)$$

die Rekursionsgleichungen

$$\widehat{F}_{n+1}(x) = (x - \lambda_n - \mu_n) \widehat{F}_n(x) - \lambda_{n-1} \mu_n \widehat{F}_{n-1}(x)$$

folgen.