Lösungen zu den Belegaufgaben in Spieltheorie

Dr. F. Göring*
RH 39 Z 718

6. Februar 2004

Zusammenfassung

1 Aufgabe 1 (10 Punkte)

Das Spiel „Stein - Schere - Papier“wird oftmals noch durch ein Symbol „Brunnen“erweitert. Dabei wird „Stein“durch die geballte Faust, „Schere“durch gespreizten Mittelfinger und Zeigefinger, „Papier“durch eine flache Hand und „Brunnen“durch einen Kreis aus Zeigefinger und Daumen angezeigt.

Die zwei Spieler zählen gemeinsam rhythmisch 3..2..1.. und zeigen dann jeder gleichzeitig eines der vier Symbole. Sind die gezeigten Symbole gleich, so endet das Spiel unentschieden, anderenfalls gewinnt der Spieler, dessen Symbol jenes des anderen „schlägt“.

Dabei gilt:

- Stein schlägt Schere (macht sie stumpf).
- Schere schlägt Papier (schneidet es).
- Papier schlägt Stein (wickelt ihn ein) sowie Brunnen (deckt ihn ab).
- Brunnen schlägt Schere sowie Stein (sie versinken in ihm).

a) Klassifizieren Sie dieses Spiel

b) Bestimmen Sie - wenn vorhanden seinen Spielwert (ansonsten oberen und unteren Spielwert).

c) Untersuchen Sie die Strategien hinsichtlich Dominanz

d) Bestimmen Sie alle optimalen Strategien der gemischten Erweiterung.

1.1 Lösung

a) Da die Strategiemengen endlich und die Spieler vertauschbar sind, und entweder unentschieden gespielt wird (Gewinne $= 0$) oder einer gewinnt und einer verliert (Gewinne $+1$ bzw. -1), handelt es sich um ein endliches symmetrisches 2-Personen-Nullsummenspiel, also ein Matrixspiel mit schiefsymmetrischer Matrix.

*frank.goering@mathematik.tu-chemnitz.de

b) Da jeder Spieler mit jeder gewählten Strategie verlieren kann, ist der untere Spielwert -1, der obere Spielwert +1. Das Spiel hat also keine Gleichgewichtssituation.

c) Stein wird offenbar durch Brunnen dominiert.

d) Streicht man die dominierte Strategie Stein, so ergibt sich ein zum Spiel Papier-Schere-Stein äquivalentes Spiel, weswegen eine Optimalstrategie jene ist, Stein nie zu spielen, die drei anderen Strategien allerdings gleichwahrscheinlich (Wkt. $\frac{1}{3}$). Dies ist die einzige optimale Strategie, wie wir im folgenden zeigen: Der Spielwert der gemischten Erweiterung ist Null, da es sich um ein Spiel mit schiefsymmetrischer Matrix handelt. Eine Spektrumsstrategie gegen eine Optimalstrategie gespielt, liefert immer den Gewinn 0 für Spieler 1. Da dies auf Stein nicht zutrifft (Gewinn nur $-\frac{1}{3}$), werden in einer optimalen Strategie höchstens Schere, Papier und Brunnen mit positven Wahrscheinlichkeiten p, s bzw. b gespielt. Da aber jede dieser Strategien (die ja sicher Spektrumsstrategien sind) gegen eine Optimalstrategie mit diesen Wahrscheinlichkeiten den Gewinn 0 (Spielwert) liefert, muß für jede Optimalstrategie $s-b=0$ (gegen Papier) und $b-p=0$ (gegen Schere) gelten. Also müssen alle drei Wahrscheinlichkeiten tatsächlich gleich groß sein!

2 Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten ein Spiel auf dem Einheitsquadrat mit $H(x,y) = x|x-y|$.

a) Hat dieses Spiel einen Sattelpunkt?

b) Bestimmen Sie alle optimalen Strategien von Spieler 1 in der gemischten Erweiterung!

c) Bestimmen Sie alle optimalen Strategien von Spieler 2 in der gemischten Erweiterung!

2.1 Lösung

a) Spieler 1 kann keinen positiven Gewinn erzwingen, da es zu jedem x ein y gibt, was H(x,y) zu Null macht. Der untere Spielwert ist - da H außerdem nichtnegativ ist - also Null. Spieler 2 kann seinen Verlust nur auf $\min\limits_{y\in<0,1>} \max\limits_{x\in<0,1>} x|x-y|$ minimieren Für x¿y ist die innere Funktion monoton wachsend, nimmt ihr Maximum also für nur x=1 an; für x¡y handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel, die ihr Maximum in der Mitte zwischen den Nullstellen annimmt, also nur für $x = \frac{y}{2}$. Also ist der untere Spielwert gleich $\min\limits_{y\in<0,1>} \max\{1-y, \frac{y^2}{4}\}$. Da die beiden Funktionen streng monoton sind - eine wachsend, die andere fallend - und Gleichheit nur für $y = 2(\sqrt{2}-1)$ angenommen wird, ist der obere Spielwert gleich $3-2\sqrt{2}$. Also hat das Spiel keinen Sattelpunkt.

c) Da H in y konvex ist, ist die optimale Strategie für Spieler 2 gemäß a) gerade $2(\sqrt{2}-1)$

b) Da folglich der Spielwert der gemischten Erweiterung gleich dem oberen Spielwert ist, und dieser bei optimaler Strategie y von Spieler 2 nur für $x = 1$ und $x = \frac{y}{2} = \sqrt{2}-1$ angenommen werden kann, wird bei jeder optimalen Strategie von Spieler 1 $x = \sqrt{2}-1$ mit gewisser Wahrscheinlichkeit α und ansonsten $x = 1$ gespielt. Bei optimalem Spiel von Spieler 1 gegen eine beliebige Strategie y von Spieler 2 ist der Gewinn von Spieler 1 also $(1-\alpha)(1-y) + \alpha(\sqrt{2}-1)|\sqrt{2}-1-y|$. Da dies minimal sein soll für optimales Spiel von Spieler 2, also für $y = 2(sqrt(2)-1)$, ist die Ableitung dieses Terms nach y an der Stelle $y = 2(sqrt(2)-1)$ gleich Null. Beachtet man, dass hier das Argument des Betrages echt negativ ist, erhält man $\alpha - 1 + (\sqrt{(2)}-1)\alpha = 0$, also nach Umstellen: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Damit ist die einzige optimale Strategie von Spieler 1 auch bestimmt.

3 Aufgabe 3 (10 Punkte)

Untersuchen Sie die in der Vorlesung gegebenen Spiele „Dilemma der Arrestanten “, „Kampf der Geschlechter “, „Chicken “und „Tarifverhandlung “:

a) Geben Sie jeweils die Lösungen nach Nash an!
b) Welche Lösungen sind stark und warum?
c) Finden Sie jeweils die Pareto-Lösungen!
d) Bestimmen sie jeweils v1 und v2 entsprechend dem klassischen Ansatz!

3.1 Lösung

a)-d)

- Dilemma der Arrestanten: Beide Denunzieren, ist nicht aber nicht stark, da Kooperation beider besseren Gesamtgewinn liefert. Nur wenn beide Denunzieren handelt es sich nicht um eine Pareto-Lösung, da die Situation, wenn beide kooperieren, besser ist. $v1 = v2 = -5$.

- Kampf der Geschlechter: Beide unternehmen das gleiche. Beide Lösungen sind stark, da hier der Gesamtgewinn stets 3, anderenfalls aber stets -2, als kleiner ist. Es sind auch die einzigen Pareto-Lösungen. $v1 = v2 = -1$.

- Chicken: Genau einer weicht aus. Hier ist keine Lösung stark, da der Gesamtgewinn maximal ist, wenn beide ausweichen. Nur wenn keiner ausweicht, handelt es sich nicht um eine Pareto Lösung, da jede andere Situation für beide besser ist. $v_1 = v_2 = 0$.

- Tarifverhandlungen: Beide wählen das gleiche Modell. Nur die Lösung, wo sich beide auf Modell 1 einigen, ist stark, da sie auch den Gesamtgewinn maximiert. Die Nash Lösungen sind genau die Pareto-Lösungen, sie sind für beide Spieler besser, als die verbleibenden Situationen. $v_1 = v_2 = 2$.