

Grundlagen der Optimierung Übung 13

1. Wir betrachten folgende lineare Optimierungsaufgabe:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- Löse die Aufgabe anhand einer Skizze.
- Forme die Aufgabe in ein lineares Programm in Standardform um und berechne alle zulässigen Basisvektoren. Identifiziere diese anhand der Skizze aus (a).
- Löse das Programm "von Hand" mit dem Simplex-Algorithmus. Starte mit dem zu $(x_1, x_2) = (4, 1)$ gehörenden Basisvektor aus (b).
- Löse das Programm

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

mit dem Simplex-Algorithmus.

2. Löse das Programm

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - 4x_2 + x_4 = 8 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_5 = 12 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \end{array}$$

mit dem Simplex-Algorithmus.

- Gib ein lineares Programm an, dessen zulässige Menge (bei geeigneter Projektion auf einen Teil der Variablen) die konvexe Hülle endlich vieler Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ beschreibt.
- Entwickle das duale semidefinite Programm zu

$$\begin{array}{ll} \min & x_{12} \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & 0 \\ x_{12} & x_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + x_{12} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{array}$$

und zeige, dass primale und duale Optimalwerte nicht gleich sind.

Wie lässt sich das geometrisch erklären (und beheben)?