Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 20. Januar 2012

Grundlagen der Optimierung
Übung 12

1. Bestimme das Lagrange-Duale zu folgendem linearen Programm:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, l, u \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Gilt starke Dualität?

2. Löse folgendes lineare Programm mit Hilfe von Sattelpunkten:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i \geq i \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

3. **Matrixspiel**
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine (Gewinn-)matrix. Die Spieler P_1 und P_2 spielen folgendes Spiel:

P_1 wählt eine Spalte von A aus, d.h. eine Zahl $j \in \{1, \ldots, n\}$, und P_2 wählt eine Zeile $i \in \{1, \ldots, m\}$. Dann zahlt P_2 an P_1 den Wert a_{ij}. (Falls $a_{ij} < 0$, so zahlt P_1 an P_2 den Wert $-a_{ij}$.) Die Auswahl der beiden Spieler findet unabhängig (z.B. geheim) voneinander statt. Beide Spieler versuchen ihren Gewinn zu maximieren.

P_1 wähle einen Spaltenindex j^* und P_2 einen Zeilenindex i^*. Das Paar (i^*, j^*) heißt Nash-Gleichgewicht, wenn keiner der beiden Spieler durch eine Änderung seiner Auswahl seinen Gewinn vergrößern kann, wenn der Gegner seine Wahl beibehält. D. h. $a_{ij^*} \geq a_{i^*j^*} \geq a_{i^*j}$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

   (a) Zeige die Rechteckeigenschaft: Seien sowohl (i^*, j^*) als auch $(i^\#, j^\#)$ Nash-Gleichgewichte. Dann sind auch $(i^*, j^\#)$ und $(i^\#, j^*)$ Nash-Gleichgewichte, und es gilt $a_{i^*j^*} = a_{i^*j^\#} = a_{i^\#j^*} = a_{i^\#j^\#}$.

   (b) Konstruiere eine Matrix, für die kein Nash-Gleichgewicht existiert.

   (c) Angenommen, P_1 hat einen Spion zur Verfügung, der ihm vorher verrät, welche Zeile P_2 spielen wird. Wie muss sich P_2 nun verhalten?
   Zeige: Falls ein Nash-Gleichgewicht existiert, so wählt P_2 eine Zeile, die eines enthält.

   (d) Es existiere ein Nash-Gleichgewicht. Der Spion wechsele die Seiten und stehe nun P_2 zur Verfügung. Hat dieser einen Vorteil davon? Was ändert sich, wenn kein Nash-Gleichgewicht existiert?