

Grundlagen der Optimierung Übung 9

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass von den beiden Systemen (*) und (**) bzw. (o) und (oo) stets genau eines lösbar ist:

$$(*) \quad \{Ax = b \quad (**) \quad \begin{cases} y^T A = 0 \\ \langle y, b \rangle < 0 \end{cases}$$

$$(o) \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (oo) \quad \begin{cases} y^T A \geq 0 \\ \langle y, b \rangle < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(4 Punkte)

Hinweis: auf Farkas zurückführen

2. Stelle den Epigraphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

als Schnitt abgeschlossener Halbräume dar.

(3 Punkte)

3. Seien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Zeige: Der Polarkegel zu $K = \text{cone}\{x_1, \dots, x_m\}$ ist $K^\circ = \{s \in \mathbb{R}^n : \langle s, x_j \rangle \leq 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}$.
(2 Punkte)

4. Sei ein konvexes Polyeder $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle \leq b_i \text{ mit } i = 1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben und für $x \in C$ sei $I(x) := \{i : \langle a_i, x \rangle = b_i\}$ die Indexmenge der *aktiven Nebenbedingungen*.

Zeige: $T_C(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, d \rangle \leq 0 \text{ für } i \in I(x)\}$ und $N_C(x) = \text{cone}\{a_i : i \in I(x)\}$. (4 Punkte)

5. Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $C \neq \emptyset$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Die Indikator-Funktion $\iota_C \in \text{Conv}\mathbb{R}^n$ hat den Wert $\iota_C(x) = 0$ für $x \in C$ und ∞ sonst. Bestimme das Subdifferential $\partial \iota_C(x)$ für $x \in \text{dom} \iota_C$.
(3 Punkte)

6. Entwickle und implementiere in Matlab das modifizierte Newtonverfahren (mit linesearch). Die Routine soll folgende Form haben:

```
function x = newton(@fun, xstart).
```

Der Parameter @fun sei hierbei ein Handle auf eine Funktion der Form

```
[val, grad, hess]=function_name(point),
```

mit `xstart` werde der Startpunkt übergeben. Der Rückgabewert `x` sei eine Matrix, die die Folge der Iterationspunkte als Spaltenvektoren enthält, d.h. $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k]$. Benutze für `linsearch` die selbstentwickelte Routine (ergänzt, um eine Rückgabewariable, die angibt, ob ein Wolfepunkt gefunden wurde) oder die Musterlösung von der Lehrveranstaltungsseite. Wähle die Konstanten in den Wolfe-Bedingungen wie folgt: $c_1 = 10^{-4}$, $c_2 = 0.9$. (Vorschlag aus Nocedal/Wright aufgrund praktischer Erfahrungen) Wähle $\alpha_{\max} = 1$, sodass zuerst der volle Newtonschritt versucht wird. Ist die Hessematrix nicht positiv definit, so verwende anstelle der Hessematrix $\nabla^2 f(x_k) + \mu I \succ 0$. Wähle $\mu = \varepsilon - \lambda_{\min}(\nabla^2 f(x_k))$. Damit werden alle Eigenwerte ins Positive verschoben. (4 Punkte)