Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 25. November 2011
Abgabe: 02. Dezember 2011

Grundlagen der Optimierung
Übung 8

1. Sind folgende Mengen trennbar? Sind sie stark trennbar?

   (a) $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \qquad A_2 = \{(1,2)\}$ (1 Punkt)

   (b) $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\}$,
   $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + 1 \leq x_n\}$ (1 Punkt)

   (c) $C_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$,
   $C_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2 \leq 0\}$ (1 Punkt)

   (d) $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$,
   $D_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2 \leq 0, x_3 = 0\}$ (1 Punkt)

   (e) $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq 1\}$,
   $E_2 = \{(0,1,2)^T\} + \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_1 \leq 1\}$. (1 Punkt)

2. Konstruiere alle Stützhyperebenen an $\mathrm{epi}(e^x)$ im Punkt $(0,1)$ und an $\mathrm{epi}(|x^2-1|)$ in $(1,0)$. (2 Punkte)

3. Zeige, dass folgende Mengen konvexe Kegel sind. Bestimme ihr Inneres, ihren Rand und den Polarkegel (in der aff. Hülle).

   (a) nichtnegativer Orthant $\mathbb{R}^n_+$ (kurz $x \geq 0$) (4 Punkte)

   (b) quadratischer Kegel $\mathcal{Q}^n = \{x = (x_0, \bar{x}^T)^T : \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, x_0 \geq \|\bar{x}\|\}$ (kurz $x \geq_{\mathcal{Q}} 0$) (4 Punkte)

   (c) symmetrische positiv semidefinite Matrizen $S^n_+ = \{X \in \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}} : v^T X v \geq 0 \ \forall v \in \mathbb{R}^n\}$ (kurz $X \succeq 0$) (5 Punkte)

   Hinweise zu 3.(c):

   - Man schreibt $\mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$ statt $\mathbb{R}^{n \times n}$, da das obere Dreieck die Matrix bereits eindeutig bestimmt.
   - Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist das kanonische Skalarprodukt $\langle A, B \rangle := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij}$. Verwende für den Polarkegel dieses Skalarprodukt.
   - Es gilt $\langle A, BC \rangle = \left\langle AC^T, B \right\rangle$ (für passende Dimensionen)
   - Spektralzerlegung einer symmetrischen Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$:
     Seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von X und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zugehörigen Eigenwerte. Dann ist $X = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T$.