Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 18. November 2011
Abgabe: 25. November 2011

Grundlagen der Optimierung
Übung 7

1. Bestimme affine Hülle und Dimension von

   (a) $C = \operatorname{conv}\{e_i : i = 1\dots,n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (e_i ist i-ter Einheitsvektor)

   (2 Punkte)

   (b) $\mathscr{C} = \{x \geq 0 : Ax = b\}$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, wobei bekannt sein soll, dass $e \in \mathscr{C}$ (mit $e = (1,1,\dots,1)^T$). (2 Punkte)

   (c) $\mathscr{C} = \{x \geq 0 : Ax = b\} \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ und } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

   . (2 Punkte)

   (Punkte)

2. (a) Zeige: Eine Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein *konvexer Kegel* (Kegel und konvex), falls mit $x,y \in C$ auch $\lambda(x+y) \in C$ für beliebige $\lambda > 0$.

   (4 Punkte)

   (b) Zeige, dass für einen konvexen Kegel $C \subseteq \mathbb{R}^n$ die Menge $\operatorname{lin}(C) := C \cap -C$ ein linearer Unterraum ist. (2 Punkte)

3. Die *konische Hülle* einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert als

   $$\operatorname{cone}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in S \text{ und } \alpha_i \geq 0 \text{ für } \ i = 1,\dots,k \right\}.$$

   Charakterisiere cone(S) als Schnitt konvexer Kegel. (mit Beweis)

   (4 Punkte)

4. Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeige: Für $x \in \operatorname{cl} C$ und $y \in \operatorname{ri} C$ ist die halboffene Strecke $(x,y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y : \alpha \in [0,1)\}$ in ri C enthalten. (4 Punkte)