Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 04.11.2011
Abgabe: 11.11.2011

Grundlagen der Optimierung
Übung 5

1. (a) Zeige: Wird $\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) := \frac{cx_1^2+x_2^2}{2}$ für gegebenes $0 < c < 1$ mit steepest descent und exaktem line search (d.h. gehe auf dem Strahl zum Minimum) beginnend mit dem Startpunkt $x^{(0)} = (1,c)$ berechnet, dann erhält man die Punktfolge

$$x^{(k)} = (q^k, (-1)^k cq^k)^T \qquad k = 1,2,3,\dots$$

   mit $q = \frac{1-c}{1+c}$. Wieviele Iterationen benötigt man, um für $c = 10^{-3}$ das Minimum auf 6 Stellen genau zu bestimmen? (3 Punkte)

   (b) Gib eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass obiges Verfahren mit Startpunkt $y^{(0)} := A^{-1}x^{(0)}$ das Minimum von $g(y) := f(Ay)$ in nur einem Schritt erreicht. (1 Punkt)

2. Zeige, dass das Newtonverfahren invariant gegenüber affin-linearen Transformationen ist. Damit ist gemeint: Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $c \in \mathbb{R}^n$. Das Newtonverfahren für eine Funktion f mit Start im Punkt x^0 erzeuge die Folge $\{x^k\}$. Das Newtonverfahren für die Funktion $g(y) := f(Ay+c)$ mit Start in y^0 erzeuge die Folge $\{y^k\}$. Aus $x^0 = Ay^0 + c$ folgt $x^k = Ay^k + c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (3 Punkte)

3. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Newtonverfahren gegen ein lokales Minimum konvergiert, wenn man nur nah genug daran startet. Was kann alles passieren, wenn man das nicht tut? Wir betrachten das Newtonverfahren für die Funktion $f(x) = \cos x$.

   (a) Bestimme einen Startpunkt x_0, so dass (bei exakter Rechnung) die Folge der Iterationspunkte x_k bestimmt gegen ∞ divergiert. (2 Punkte)

   (b) Bestimme einen Startpunkt x_0, so dass die Folge der Iterationspunkte zwischen zwei verschiedenen (nichtoptimalen) Punkten alterniert. (2 Punkte)

   (c) Das Verfahren starte bei $x_0 = 0.1415926535898$. Zu welchem Punkt konvergiert das Verfahren und warum? (2 Punkte)

4. (a) Zeige: Sind C_i konvexe Mengen in $\mathbb{R}^{n_i}$ für $i = 1,\dots,k$, dann ist auch das direkte Produkt $C_1 \times \cdots \times C_k$ eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k}$. (1 Punkt)

   Seien $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexe Mengen und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax + b$ eine affin lineare Abbildung. Zeige:

   (b) Das Bild $f(C)$ ist eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^m$. (2 Punkte)

   (c) Das Urbild $f^{-1}(D)$ ist eine konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$. (2 Punkte)

   Folgere daraus:

   (d) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\alpha C := \{\alpha x : x \in C\}$ konvex, insbesondere auch $-C := (-1)C$. (1 Punkt)

   (e) Für $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ konvex ist die Minkowski Summe $C_1 + C_2$ konvex.

   (1 Punkt)