

Grundlagen der Optimierung Übung 2

1. Bestimme für folgende Funktionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R} , für welche Parameter ($a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $S \subseteq \mathbb{R}^n$) sie auf ihrem Definitionsbereich konvex, konkav (f konkav $:\Leftrightarrow -f$ konvex) oder weder noch sind:

(a) $f(x) = a^\top x + b$ (1 Punkt)

(b) $f(x) = x^\top Qx + a^\top x + b$ (2 Punkte)

(c) $f(x) = \|x - a\|^2$ (2 Punkte)

(d) $I_S(x) = \begin{cases} 0 & x \in S \\ \infty & x \notin S \end{cases}$ Indikatorfunktion einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ (2 Punkte)

2. Für $i = 1, \dots, k$ seien $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und $\alpha_i \geq 0$. Zeige, dass $f := \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i$ konvex auf \mathbb{R}^n ist. (1 Punkt)

3. Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet und f eine Funktion $f : C \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Ist f auf C stetig differenzierbar, dann gilt:

f ist konvex auf $C \Leftrightarrow f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^\top (x - y) \quad \forall x, y \in C.$ (2 Punkte)

(b) Ist f auf C zweimal stetig differenzierbar, dann gilt:

f ist konvex auf $C \Leftrightarrow \nabla^2 f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in C.$ (2 Punkte)

4. Bringe folgendes lineare Programm in die kanonische Form und in die Normalform.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1 + 2x_2 = 1 \\ & x_1 \text{ frei, } -1 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

(2 Punkte)

5. (a) Zeige, dass sich das duale vom dualen eines LP in Normalform wieder als das primale Problem auffassen lässt. (2 Punkte)

(b) Zeige, dass die rechten linearen Programme jeweils die dualen der linken linearen Programme sind.

i.

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \text{ frei} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^\top y \\ \text{s.t.} & A^\top y = c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

(2 Punkte)

ii.

$$\begin{array}{ll} \max & c^\top x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & l \leq x \leq u \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min & (Al - b)^\top y_1 + (u - l)^\top y_2 + c^\top l \\ \text{s.t.} & A^\top y_1 - y_2 \leq -c \\ & y_1 \text{ frei, } y_2 \geq 0 \end{array}$$

(2 Punkte)