Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 23. Januar 2012
Abgabe: 27. Januar 2012

Grundlagen der Optimierung
Hausaufgaben zur Übung 12

1. Ein (konvexes) quadratisches Programm hat die Form

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \text{ frei} \end{array}$$

mit $Q \in S^n_+$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Zeige, dass das Lagrange-Duale durch

$$\begin{array}{ll} \max & \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx - \lambda^T(Ax-b) \\ \text{s.t.} & Qx + c - A^T\lambda = 0 \\ & \lambda \geq 0, x \text{ frei} \end{array}$$

gegeben ist und starke Dualität erfüllt.

(Hinweise: Zur Berechnung der Dualen löse das (innere) Minimierungsproblem.)

Für Q positiv definit kann man x eliminieren und erhält so ein besonders einfaches duales Programm. Wie sieht dieses aus, und lässt sich aus dessen Optimallösung die primale Optimallösung ermitteln?

2. **Gemischte Erweiterung eines Matrixspiels**
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine (Gewinn-)matrix. Die Spieler P_1 und P_2 spielen folgendes Spiel: P_1 **würfelt** eine Spalte von A aus, d.h. eine Zahl $j \in \{1,\dots,n\}$, und P_2 **würfelt** eine Zeile $i \in \{1,\dots,m\}$. Dann zahlt P_2 an P_1 den Wert a_{ij}. (Falls $a_{ij} < 0$, so zahlt P_1 an P_2 den Wert $-a_{ij}$.) Beide Spieler können vorher (geheim, d.h. unabhängig voneinander) die Wahrscheinlichkeitsverteilung festlegen, mit der gewürfelt wird. P_1 wählt ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$, $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ und würfelt im Spiel die Spalte j mit Wahrscheinlichkeit x_j. Analog wählt P_2 ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y \geq 0$, $\sum_{i=1}^m y_i = 1$.

   (a) Angenommen, P_1 kennt durch einen Spion die Wahrscheinlichkeitsverteilung

   $$\bar{y} \in \mathbb{R}^m, \bar{y} \geq 0, \sum_{i=1}^m \bar{y}_i = 1$$

   mit der P_2 die Zeilen auswählen wird. Zeige, dass P_1 den Erwartungswert seines Gewinns maximiert, wenn er eine optimale Lösung des linearen Programms

   $$\begin{array}{ll} \max & \bar{y}^TAx \\ \text{s.t.} & e^Tx = 1 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

   als Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Spaltenwahl nutzt. Dabei sei $e := (1,\dots,1)^T$.
   Wie sieht die Menge der Optimallösungen dieser Aufgabe aus?

(b) Der Spion hat die Seiten gewechselt und steht nun P_2 zur Verfügung. Zeige, dass unter diesen Umständen P_1 den Erwartungswert seines Gewinns maximiert, wenn er den x-Anteil einer optimalen Lösung des linearen Programms

$$\begin{array}{ll} \max & v \\ \text{s.t.} & v \leq e_i^T A x, \quad i = 1, \ldots, m \\ & e^T x = 1 \\ & x \geq 0, v \text{ frei} \end{array}$$

als Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Spaltenwahl nutzt. Dabei sei e_i der i-te Einheitsvektor.

(c) Kann P_1 den erwarteten Gewinn aus b) verbessern, wenn er P_2 den Spion wieder abwirbt? Zeige, dass dies nicht der Fall ist, wenn P_2 für seine Wahrscheinlichkeitsverteilung ein zu b) analoges lineares Programm löst. (Tipp: starke Dualität)

3. Zeige den folgenden Satz über das sogenannte Schur-Komplement:

Sei $A \in S_+^m$ positiv definit, $C \in S^n$, und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succ 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C - B^T A^{-1} B \succ 0$$

und

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \succeq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C - B^T A^{-1} B \succeq 0.$$

Hinweis:

Ist H regulär, dann ist X positiv (semi-)definit genau dann wenn $H^T X H$ positiv (semi-)definit ist. Wähle H geeignet um eine passende Blockdiagonalform zu erzielen.