Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 09. Januar 2012
Abgabe: 13. Januar 2012

Grundlagen der Optimierung
Hausaufgabe

1. Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = ||x||$. Zeige, dass das Subdifferential

$$\partial g(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{||x||}\}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{s \in \mathbb{R}^n : ||s|| \leq 1\}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

   ist.

2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, die in x_0 differenzierbar ist. Zeige:

   (a) $f'(x_0; d) = \nabla f(x_0)^T d, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$,

   (b) $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

3. Beschreibe für die gegebenen $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ die Menge der aktiven Indizes $\mathscr{A}(\bar{x})$, den linearisierten Tangentialkegel $\mathscr{T}_P(\bar{x})$ und den Normalenkegel $N_{\mathscr{X}}(\bar{x})$ an die zulässige Menge $\mathscr{X} = \{x : g_i(x) \leq 0\}$.

   (a)

$$\mathbb{R}^3 : \bar{x} = (2, 0, -1)^T, \quad \begin{array}{ll} g_1(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1, & g_3(x) = x_3 + 1, \\ g_2(x) = (x_1 - 3)^2 + x_2^2 - 1, & g_4(x) = -x_3 - 2 \end{array}$$

   (b)

$$\mathbb{R}^3 : \ \bar{x} = (2, 0, -1)^T, \quad \begin{array}{ll} g_1(x) = x_1 + x_2 - 2, & g_3(x) = -x_2, \\ g_2(x) = -x_1 + x_2 + 2, & g_4(x) = 2x_2 + x_3 + 1 \end{array}$$

   (vergleiche $\mathscr{X}$ zur vorherigen Aufgabe)