Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 19. Dezember 2011
Abgabe: 06. Januar 2012

Grundlagen der Optimierung
Hausaufgabe

Standortoptimierung Da der Weihnachtsmann nun schon in die Jahre gekommen ist, plant er einen neuen Standort für seine Wichtelwerkstatt. Diese soll sich in günstiger Entfernung zu den zu beschenkenden kleinen und großen Kindern befinden. Er überlegt sich folgendes: Die Kinder lassen sich in der Reihenfolge, in der die Wunschzettel eingegangen sind, mit $1,\dots,m$ durchnummerieren. Die Wohnorte der Kinder seinen paarweise verschiedene Punkte $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{R}^2$, den noch unbekannten Standort der Werkstatt bezeichnet er mit $x \in \mathbb{R}^2$. Mit $w_i > 0$ bezeichnet er das Gewicht des Geschenkes für Kind i. Leider kann der Weihnachtsmann nur noch ein Geschenk auf einmal mitnehmen. Deshalb wird er als erstes Geschenk 1 zu Kind 1 tragen. Dabei verrichtet er eine Arbeit von $w_1||x-a_1||_2$. Der Rückweg ohne Geschenk ist zu vernachlässigen. Dann bringt er Geschenk 2 zu Kind 2, was $w_2||x-a_2||_2$ an Arbeit kostet. So geht es weiter, den ganzen Abend lang ...

Um nun den Weg so wenig wie möglich anstrengend zu gestalten, löst er folgende Aufgabe:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i||x-a_i||_2.$$

1. Als erstes überlegt sich der Weihnachtsmann für $x \in \mathbb{R}^2$ die Menge aller zulässigen Schrittrichtungen des Subgradientenverfahrens. Sein Ergebnis war richtig, wie lautet es?

   Hinweis:
   Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Dann ist $\partial(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \partial f_1(x) + \lambda_2 \partial f_2(x)$.
   Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = ||x||$.

   $$\partial g(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{||x||}\}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{s \in \mathbb{R}^n : ||s|| \leq 1\}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

2. Als nächstes findet er eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür , dass $x \in \mathbb{R}^2$ Minimum von f ist. Was hat er herausbekommen? Zeige, dass das Minimum auch existiert.

3. Die Wichtelwerkstatt soll natürlich nicht entdeckt werden. Ganz sicher wird sie nicht gefunden, wenn sie sich im Kreissektor $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, ||x||_2 \leq 1\}$ befindet. Passe die Bedingung von 2. an.

4. Schließlich löst der Weihnachtsmann das Ausgangsproblem (ohne Kreissektor) mit Utensilien, die er in seiner Werkstatt findet. Dazu gehören eine große Holzplatte, Werkzeug, Fäden und Gewichte. Welche mechanische Konstruktion nutzte er?
   Hinweis: Interpretiere die Bedingung aus 2. als Kräftegleichgewicht und die Richtungen aus 1. als resultierende Kräfte.