Technische Universität Chemnitz
Dr. F. Göring

Chemnitz, 14. Dezember 2004

Lösen von Matrizengleichungen modulo n

1. Eine Matrix A ist genau dann modulo n invertierbar, wenn ihre Determinante $det(A)$ zu n teilerfremd ist. Ihr Inverses kann dann über die Adjunktenformel berechnet werden:

$$A^{-1} = det(A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,d} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{d,1} & A_{d,2} & \cdots & A_{d,d} \end{pmatrix}$$

   Dabei sind die Adjunkten $A_{i,j}$ die Determinanten der Matrizen, die man erhält, wenn man die j-te Spalte von A durch den i-ten Einheitsvektor ersetzt.

2. Die Matrizengleichung $MS = C$ lässt sich auch durch Anwendung des Gaussverfahrens lösen. Hierbei sind geeignete Linearkombinationen der Zeilen zu bilden, um die Hauptdiagonalelemente invertierbar zu halten.

3. Beispielaufgabe: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ mod 6

4. Tableau (alle Rechnungen modulo 6):

(1)	2	2	1	1	2	3	
(2)	3	1	2	4	5	0	
(3)	2	5	2	3	2	1	
(4)	5	3	3	5	1	3	$(1) + (2)$ da 2 und 3 nicht invertierbar.
(5)	0	2	1	5	4	3	$2(2) - 3(1)$
(6)	0	3	1	2	0	4	$(3) - (1)$
(7)	0	5	1	1	4	1	$(5) + (6)$ da 2 und 3 nicht invertierbar.
(8)	0	0	1	1	0	1	$3(5) - 2(6)$
(9)	0	5	0	0	4	0	$(7) - (8)$
(10)	0	1	0	0	2	0	$5(9)$ da $5^{-1} = 5^{\phi(6)-1} = 5^{(3-1)(2-1)-1} = 5^1 = 5$
(11)	5	0	0	2	1	0	$(4) - 3(8) - 3(10)$
(12)	1	0	0	4	5	0	$5(11)$ da $5^{-1} = 5^{\phi(6)-1} = 5^{(3-1)(2-1)-1} = 5^1 = 5$
(12)				4	5	0	
(10)				0	2	0	$= S$
(8)				1	0	1	