

Einführung in die Diskrete Mathematik Aufgabenserie 10

1. Der vollständige bipartite Graph $K_{1,n-1}$ heißt *Stern*. Beweise oder widerlege:
 - (a) Falls G auf n Knoten Durchmesser 2 hat, dann enthält G einen aufspannenden Stern (d.h. auf n Knoten). (2 Punkte)
 - (b) Falls G einen aufspannenden Stern enthält, dann hat G Durchmesser 2. (1 Punkt)
2. Für einen Graphen $G = (V, E)$ heißt $\overline{G} = (V, \overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E)$ der *Komplementgraph* ($uv \in E \Leftrightarrow uv \notin \overline{E}$). Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ein k -regulärer Graph. Zeige, dass die Gesamtzahl der Dreiecke in G und \overline{G} genau $\binom{n}{3} - \frac{n}{2}k(n-k-1)$ ist. (5 Punkte)
3. Beweise:
 - (a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $S \subseteq V$ eine unabhängige Menge in G , $k_s \in \mathbb{N}_0$ für $s \in S$. Für eine Kantenteilmenge $F \subseteq E$ bezeichne $\delta_F(s) = \{e \in F : s \in e\}$.
Dann ist $(E, \mathcal{F} = \{F \subseteq E : |\delta_F(s)| \leq k_s \forall s \in S\})$ ein Matroid. (2 Punkte)
 - (b) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $S \subseteq V$, $k_s \in \mathbb{N}_0$ für $s \in S$. Für eine Kantenteilmenge $F \subseteq A$ bezeichne $\delta_F^-(s) = \{a \in F : a = (u, s) \text{ für ein } u \in V\}$.
Dann ist $(A, \mathcal{F} = \{F \subseteq A : |\delta_F^-(s)| \leq k_s \forall s \in S\})$ ein Matroid. (2 Punkte)

Hinweis: Eine Knotenmenge U in einem Graphen G heißt *unabhängig*, falls keine zwei Knoten aus U durch eine Kante verbunden sind.

4. Sei $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ eine Grundmenge und $A_i \in 2^T$, $i = 1, \dots, m$ (nicht notwendigerweise $A_i \neq A_j$). Falls für eine Unterfamilie $\mathcal{A}_I = \{A_i : i \in I\}$ mit $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine injektive Abbildung (Auswahlfunktion) $\varphi : I \rightarrow \{1, \dots, n\}$ mit $t_{\varphi(i)} \in A_i$ existiert, heißt $T_I = \{t_{\varphi(i)} : i \in I\}$ *Transversale* oder *System von verschiedenen Repräsentanten* der Unterfamilie \mathcal{A}_I .
Zeige: $(T, \mathcal{F} = \{T_I : \exists I \subseteq \{1, \dots, m\} : T_I \text{ ist Transversale von } \mathcal{A}_I\})$ ist ein Matroid (das *Transversalmatroid*).

Hinweis: Konstruiere einen bipartiten Graphen ($V = \mathcal{A}_{\{1, \dots, m\}} \cup T, E = \{\{A_i, t_j\} : t_j \in A_i\}$); Transversalen entsprechen Matchings; falls $X, Y \in \mathcal{F}$ mit $|X| < |Y|$, dann enthält die Vereinigung der entsprechenden Matchings einen alternierenden Weg, mit dem X vergrößert werden kann. (4 Punkte)