Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 18. November 2010
Abgabe: 25. November 2010

Einführung in die Diskrete Mathematik
Aufgabenserie 7

1. Sei $f(n) = \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade} \\ 2n & n \text{ ungerade.} \end{cases}$

   Zeige, dass

   - $f(n) = O(n^2)$ gilt, (1 Punkt)
   - $f(n) = o(n^2)$ nicht gilt und (1 Punkt)
   - $n^2 = O(f(n))$ auch nicht gilt. (1 Punkt)

2. Beweise die folgenden Gleichungen:

   (a) $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$, (2 Punkte)

   (b) Falls $f(n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, dann $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$. (2 Punkte)

   (c) $O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$. (2 Punkte)

   Hinweis: wie üblich

   $O(f(n))O(g(n)) = \{x(n) * y(n) : x(n) \in O(f(n)), y(n) \in O(g(n))\}$,

   Addition analog.

3. Auf eine Eingabe der Länge n führe ein Algorithmus n Schritte aus, wobei der i-te Schritt i^{41} Operationen benötigt. Zeigen Sie, dass die Laufzeit des Algorithmus $O(n^{42})$ beträgt. (2 Punkte)

4. Die übliche Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen A und B erfordert $\Theta(n^3)$ Flops (Fließkommaoperationen '$*$' und '$+$'), insbesondere 8 Multiplikationen für $n = 2$. Die folgende Methode von Strassen benötigt nur 7 Multiplikationen.
   Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

   - Zeige, dass die Elemente von AB eine Summe von Termen $\pm m_i$ ist, wobei $m_1 = (a+d)(\alpha+\delta)$, $m_2 = (c+d)\alpha$, $m_3 = a(\beta-\delta)$, $m_4 = d(\gamma-\alpha)$, $m_5 = (a+b)\delta$, $m_6 = (a-c)(\alpha+\beta)$, $m_7 = (b-d)(\gamma+\delta)$. (2 Punkte)
   - Wieviele Additionen/Subtraktionen benötigt die normale Berechnung, wieviele Strassens Methode? (1 Punkt)

- Finde eine Methode, die $\Theta(n^{\log_2 7})$ Flops für das Produkt zweier $n \times n$-Matrizen ($n = 2^k$) benötigt. (2 Punkte)

Hinweis: Viertele die Matrizen und verwende Rekursion mit $n = 2$ als Start.