Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 27. Oktober 2010
Abgabe: 04. November 2010

Einführung in die Diskrete Mathematik
Aufgabenserie 4

1. Beweise, dass die Anzahl der (ungeordneten) Zahl-Partitionen von n, deren Summanden alle nicht durch 3 teilbar sind, gleich ist der Anzahl, in denen kein Summand mehr als zweimal vorkommt.
   Beispiel: $4 = 4,\ 2{+}2,\ 2{+}1{+}1,\ 1{+}1{+}1{+}1$ sowie $4 = 4,\ 3{+}1,\ 2{+}2,\ 2{+}1{+}1$.
   Verallgemeinere auf d statt 3. (Hinweis: Inklusion-Exklusion) (3 Punkte)

2. Turm von Hanoi. Wir haben drei Stäbe A, B und C. Auf A sind n verschieden große Scheiben der Größe nach geordnet (kleinste oben, größte unten). Ein Zug bewegt eine oberste Scheibe auf einen anderen Stab, wobei die Scheibe immer nur auf eine größere gesetzt werden darf. Stelle Rekursionen für die Folgenden Zahlen auf und berechne sie:

   (a) T_n = Kleinste Anzahl der Züge, den Turm von A nach B zu bewegen. (2 Punkte)

   (b) S_n wie in (a), mit der Einschränkung, dass Scheiben nur zwischen A und C sowie B und C bewegt werden dürfen. (2 Punkte)

   (c) R_n = Kleinste Anzahl der Züge, den Turm von A nach B zu bewegen, wobei diesmal von jeder Größe zwei Scheiben auf dem Turm liegen (d. h. es gibt insgesamt $2n$ Scheiben). Scheiben gleicher Größe sind nicht unterscheidbar, d. h. es ist egal, welche unten liegt. (1 Punkt)

3. Berechne $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$ auf zwei Arten:

   (a) durch Partialbruchzerlegung $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. (2 Punkte)

   (b) durch partielle Summation. (2 Punkte)

4. Bestimme die diskrete Stammfunktion von $f(x) = x \cdot 10^x$ und überprüfe das Ergebnis! (3 Punkte)

5. Die Folge $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1$ sei durch ein Polynom f vom Grade ≤ 4 gebildet, d.h. $a_x = f(x)$. Bestimme die (diskrete) Newton-Darstellung von f! (3 Punkte)