Technische Universität Chemnitz
S. Reiß

Chemnitz, 21. Oktober 2010
Abgabe: 28. Oktober 2010

Einführung in die Diskrete Mathematik
Aufgabenserie 3

1. Die Felder eines 4×7 Schachbretts werden auf irgendeine Weise mit Weiß und Schwarz gefärbt. Zeige, dass es immer ein Rechteck gibt, dessen Ecken gleich gefärbt sind. Stimmt dies auch für ein 4×6 Schachbrett?(3 Punkte)

2. Beim Schachspiel kann ein Turm nur horizontal und vertikal schlagen. Wir nehmen nun den allgemeinen Fall an, dass das Spielbrett aus $n \times n$ unterscheidbaren Feldern besteht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, n einander gleiche Türme auf dieses Brett zu stellen, so dass keiner den anderen bedroht? (2 Punkte)

3. Zeige, dass eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau dann eine ungerade Anzahl von Teilern besitzt, wenn $\sqrt{n}$ eine natürliche Zahl ist. (2 Punkte)

4. Familie Rumpelstilzchen hat 4 Mädchen und 8 Jungen. Wenn alle Kinder, bei zufälliger Anordnung, im Kreis ums Feuer tanzen wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Mädchen nebeneinander tanzen? (4 Punkte)

5. Für natürliches n sei $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ gesetzt. Zeige, dass für positives ganzes n dann $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ gilt. (2 Punkte)

6. (a) Zeige den *Satz von Ramsey*:

   Es seine $k,\ l$ natürliche Zahlen ≥ 2. Dann gibt es eine kleinste Zahl $R(k,l)$, genannt Ramsey Zahl, so dass Folgendes gilt: Treffen einander $n \geq R(k,l)$ Personen, so gibt es immer k, die einander alle gegenseitig kennen, oder l, die einander paarweise nicht kennen.

   Hinweis: $R(k,2) = k,\ R(2,l) = l$, für alle $k,\ l$. Zeige nun $R(k,l) \leq R(k-1,l)+R(k,l-1)$ und schließe den Satz mit Induktion. (4 Punkte)

   (b) Folgere aus obiger Abschätzung: $R(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$. (2 Punkte)