Technische Universität Chemnitz
S. Dienelt

Chemnitz, 05. Dezember 2007
Abgabe: 11. Dezember 2007

Einführung in die Diskrete Mathematik
Aufgabenserie 7

1. (4 Punkte) Sei $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ eine Grundmenge und $A_i \in 2^T$, $i = 1, \ldots, m$ (nicht notwendigerweise $A_i \neq A_j$). Falls für eine Unterfamilie $\mathcal{A}_I = \{A_i : i \in I\}$ mit $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ eine injektive Abbildung (*A*uswahlfunktion) $\varphi : I \to \{1, \ldots, n\}$ mit $t_{\varphi(i)} \in A_i$ existiert, heißt $T_I = \{t_{\varphi(i)} : i \in I\}$ *Transversale* oder *System von verschiedenen Repräsentanten* der Unterfamilie $\mathcal{A}_I$.

   Zeige: $(T, \mathcal{F} = \{T_I : \exists I \subseteq \{1, \ldots, m\} : T_I \text{ ist Transversale von } \mathcal{A}_I\})$ ist ein Matroid (das *Transversalmatroid*).

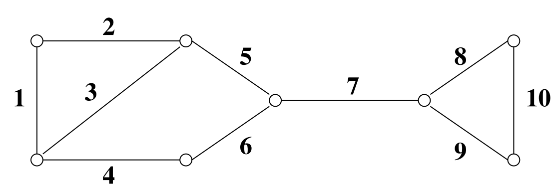
   Hinweis: Konstruiere einen bipartiten Graphen

   $$(V = \mathcal{A}_{\{1,\ldots,m\}} \cup T, E = \{\{A_i, t_j\} : t_j \in A_i\});$$

   Transversalen entsprechen Matchings; falls $X, Y \in \mathcal{F}$ mit $|X| < |Y|$, dann enthält die Vereinigung der entsprechenden Matchings einen alternierenden Weg, mit dem X vergrößert werden kann.

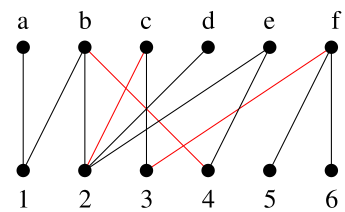
2. (4 Punkte) Ein (gerichteter) Weg in einem Digraphen $D = (V, A)$ heißt hamiltonscher Weg, wenn er alle Knoten aus V besucht. Formuliere das Problem, in einem Digraphen $D = (V, A)$ einen hamiltonschen Weg zu finden, als die Suche nach einer unabhängigen Menge maximaler Kardinalität im Schnitt dreier Matroide.

3. (4 Punkte) Gib das System der Kreise und das System der Cokreise des graphischen Matroids mit folgendem Graphen an:



4. (2 Punkte) Wie können kürzeste Wege Algorithmen für gerichtete Graphen auch für ungerichtete Graphen mit nichtnegativen Kantengewichten eingesetzt werden? Geht das auch bei beliebigen Gewichten?

5. (4 Punkte) Ermittle für folgenden bipartiten Graphen ein maximales Matching mit dem Matroidschnitt-Algorithmus von Edmonds. Starte mit dem Anfangsmatching $X = \{2c, 3f, 4b\}$. Gib für jeden Iterationsschritt den Hilfsgraphen D_X und die Mengen S_X, T_X an.



Anleitung: Sei $G = (V, E)$ obiger Graph. $\mathcal{F}_1$ enthalte alle Kantenmengen $E' \subseteq E$, für die gilt, dass jeder Knoten aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit höchstens einer Kante aus E' inzidiert. $\mathcal{F}_2$ enthalte alle Kantenmengen $E'' \subseteq E$, für die gilt, dass jeder Knoten aus $\{a, b, c, d, e, f\}$ mit höchstens einer Kante aus E'' inzidiert. Der Schnitt der beiden Matroide $(E, \mathcal{F}_1)$ und $(E, \mathcal{F}_2)$ ergibt gerade das Unabhängigkeitssystem aller Matchings von G.