Technische Universität Chemnitz
S. Dienelt

Chemnitz, 28. November 2007
Abgabe: 04. Dezember 2007

Einführung in die Diskrete Mathematik
Aufgabenserie 6

1. (4 Punkte) Beschreiben Sie die Systeme der Kreise, Basen und das Unabhängigkeitssystem des Matrix-Matroids bezüglich der Spalten der folgenden Matrix:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (4 Punkte) Bestimmen Sie für folgende Liste der Kanten und Kantengewichte eines Graphen auf 14 Knoten einen minimalen aufspannenden Baum:

1 2 4.	2 3 5.	4 5 2.	6 7 2.	8 13 3.	10 11 5.
1 8 6.	2 14 3.	5 6 7.	6 13 6.	9 10 1.	10 12 3.
1 11 7.	3 4 1.	5 13 6.	7 8 6.	9 11 5.	11 12 6.
1 13 1.	3 14 1.	5 14 5.	7 9 3.	9 12 6.	13 14 2.

3. (4 Punkte) Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e \in \mathbb{R}_+$ für $e \in E$. Ein *hamiltonscher* Kreis in G ist ein Kreis, der alle Knoten aus V überdeckt. Das *Rundreiseproblem* (Travelling Salesman Problem, TSP) besteht darin, einen hamiltonschen Kreis minimalen Gewichts zu bestimmen. Formulieren Sie dieses Problem als ein Minimierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem.

4. (2 + 2 Punkte) Beweisen Sie:

   (a) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $S \subseteq V$ eine unabhängige Menge in G, $k_s \in \mathbb{N}_0$ für $s \in S$. Für eine Kantenteilmenge $F \subseteq E$ bezeichne $\delta_F(s) = \{e \in F : s \in e\}$.
   Dann ist $(E, \mathcal{F} = \{F \subseteq E : |\delta_F(s)| \leq k_s \ \forall s \in S\})$ ein Matroid.

   (b) Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $S \subseteq V$, $k_s \in \mathbb{N}_0$ für $s \in S$. Für eine Kantenteilmenge $F \subseteq A$ bezeichne $\delta_F^-(s) = \{a \in F : a = (u, s)$ für ein $u \in V\}$.
   Dann ist $(A, \mathcal{F} = \{F \subseteq A : |\delta_F^-(s)| \leq k_s \ \forall s \in S\})$ ein Matroid.

Hinweis: Eine Knotenmenge U in einem Graphen G heißt *unabhängig*, falls keine zwei Knoten aus U durch eine Kante verbunden sind.