

Einführung in die Diskrete Mathematik Aufgabenserie 5

1. (2 Punkte) Auf eine Eingabe der Länge n führe ein Algorithmus n Schritte aus, wobei der i -te Schritt i^9 Operationen benötige. Zeigen Sie, dass die Laufzeit des Algorithmus $O(n^{10})$ ist.
2. (5 Punkte) Lösen Sie das folgende Problem, indem Sie einen geeigneten Graphen konstruieren:
Ein Wolf, eine Ziege und ein Kohlkopf sind von einem Fährmann über einen Fluss zu setzen. Der Wolf möchte gern die Ziege fressen, und die hat es auf den Kohlkopf abgesehen. Deshalb dürfen weder Wolf-Ziege noch Ziege-Kohlkopf ohne Aufsicht vom Fährmann allein gelassen werden. Das Boot trägt außer dem Fährmann jeweils nur einen der drei. Wie kann er sie alle heil ans andere Ufer bringen?
3. (2 + 2 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussagen:
 - (a) Zeigen Sie, dass jeder Graph mit n Knoten und m Kanten wenigstens einen Knoten der Valenz $\geq \lceil \frac{2m}{n} \rceil$ hat, wobei für reelles x mit $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl bezeichnet wird, die nicht kleiner x ist.
 - (b) Zeigen Sie, dass in einem zusammenhängenden Graphen je zwei längste Wege immer einen gemeinsamen Knoten haben.
4. (1 + 2 + 2 Punkte) Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
 - (a) Bei welchen Graphen sind alle Kanten Brücken?
 - (b) Zeigen Sie, dass eine Kante genau dann eine Brücke ist, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.
 - (c) Zeigen Sie ferner, dass G keine Kante hat, die eine Brücke ist, falls alle Grade gerade sind.
5. (4 Punkte) Ein Graph auf 10 Knoten sei durch die folgenden Adjazenzlisten gegeben:

1: 6,5,3,2	4: 2,3,5	7: 10	10: 7
2: 1,3,4	5: 4,3,1,6	8: 9	
3: 1,5,4,2	6: 1,9,5	9: 8,6	

Führen Sie den BFS und DFS Algorithmus beginnend mit $v_0 = 1$ und der gegebenen Adjazenzreihenfolge durch und bestimmen Sie die erzeugten Kantenmengen und Knotennummerierungen.