Technische Universität Chemnitz
S. Dienelt

Chemnitz, 24. Oktober 2007
Abgabe: 06. November 2007

Die Abgabe erfolgt bitte bis 14 Uhr im Zimmer Rh. 39/715!!

Einführung in die Diskrete Mathematik
Aufgabenserie 3

1. (2 Punkte) Wieviele natürliche Zahlen $\leq 10^6$ sind weder von der Form k^2 noch k^3 noch k^5?

2. (2+2 Punkte) Berechnen Sie mit der Methode „Isolieren der Terme“:

   (a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$.

   (b) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2$.

3. (2+2 Punkte) Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$ auf zwei Arten:

   (a) durch Partialbruchzerlegung $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

   (b) durch partielle Summation.

4. (3 Punkte) Verallgemeinern Sie das Prinzip von Inklusion und Exklusion: Seien $P_1, \ldots, P_m$ Eigenschaften von Elementen einer n-elementigen Menge S. Beweisen Sie, dass

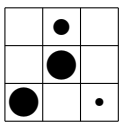
   $\sum_{i_1<\ldots<i_t} N(P_{i_1} \ldots P_{i_t}) - \binom{t+1}{t} \sum_{i_1<\ldots<i_{t+1}} N(P_{i_1} \ldots P_{i_{t+1}}) + \ldots$
   $\pm\binom{m}{t} N(P_1 \ldots P_m)$

   die Anzahl derjenigen Elementen von S ist, welche genau t dieser Eigenschaften besitzen.

5. (3 Punkte) Zeigen Sie durch Anwendung erzeugender Funktionen folgende Aussage

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

6. (4 Punkte) Ein Verkehrsminister will alle Verkehrssünder mit 3×3-Lochkarten erfassen.



An den einzelnen Positionen sollen Löcher verschiedener Größe gestanzt werden (kein Loch = Lochgröße 0, mehrere Löcher gleicher Größe möglich). Vorder- und Rückseite der Karten sind nicht unterscheidbar. Wie viele verschiedene Lochgrößen sind notwendig (und auch hinreichend), wenn 5 Millionen unterschiedliche Karten erzeugt werden sollen?