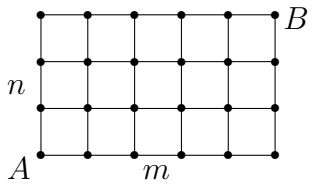
Technische Universität Chemnitz
S. Dienelt

Chemnitz, 17. Oktober 2007
Abgabe: 23. Oktober 2007

Einführung in die Diskrete Mathematik
Aufgabenserie 2

1. (3 Punkte) Leiten Sie folgende Rekursion für die (ungeordneten) Zahl-Partitionszahlen $P_{n,k}$ ab: $P_{n,1} = P_{n,n} = 1$ und $P_{n,k} = P_{n-k,1} + P_{n-k,2} + \ldots + P_{n-k,k}$.

2. (4 Punkte) Betrachten Sie ein Gitter, das von m horizontalen und n vertikalen Kanten aufgespannt wird.



   Bestimmen Sie die Anzahl der Wege von A nach B, die stets nach rechts oder nach oben gehen.

3. (4 Punkte) Beim Schachspiel kann ein Turm nur horizontal und vertikal schlagen. Wir nehmen nun den allgemeinen Fall an, dass das Spielbrett aus $n \times n$ unterscheidbaren Feldern besteht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, n einander gleiche Türme auf dieses Brett zu stellen, so dass keiner den anderen bedroht?

   Bezeichnet A_n die gesuchte Zahl, so könnte man wie folgt argumentieren: für einen Turm hat man n^2 Möglichkeiten, ihn zu platzieren; dieser bedroht dann eine Reihe und eine Spalte. Das Problem reduziert sich daher auf ein $(n-1) \times (n-1)$-Brett mit $n-1$ Türmen, so dass $A_n = n^2 A_{n-1}$ gilt. Dies bedeutet aber $A_n = n^2(n-1)^2(n-2)^2 \ldots 2^2 1^2 = (n!)^2$. Warum ist dies *nicht* die gesuchte Lösung?

4. (2 Punkte) Beweisen Sie *Markovs Ungleichung (diskrete Version):*
   Sei X eine (diskret verteilte) Zufallsvariable, die nur Werte ≥ 0 annimmt, dann gilt $p(X \geq \alpha) \leq \frac{EX}{\alpha}$ für $\alpha > 0$.

5. (1 Punkt) Schätzen Sie mit Hilfe der vorigen Aufgabe die Wahrscheinlichkeit ab, dass eine Permutation $k+1$ Fixpunkte hat (alle Permutationen gleichwahrscheinlich).