Technische Universität Chemnitz
Dr. F. Göring

Chemnitz, 27. Januar 2005
fällig: 4. Februar 2005

Einführung in die Diskrete Mathematik
Übung 14

1. Zeige, dass die Laufzeit von Heapsort $O(n \log n)$ ist.

2. Sortiere die Zahlenfolge 0,8,15,3,7,42,47,11 mit Mergesort, Quicksort, und Heapsort und zähle die Anzahl der konkret benötigten Vergleichsoperationen zwischen diesen Zahlen.

3. Schreibe ein Programm für eine deterministische Turing Maschine, die zu einer natürlichen Zahl (in Binärdarstellung mit dem höchstwertigen bit auf dem Feld 1 gegeben) eins dazuzählt, leere Eingaben aber nicht akzeptiert. Teste die Arbeitsweise für die Zahlen fünf und drei.

4. Beim *Rucksack-Problem* (Englisch: *Knapsack-Problem*) sollen für eine gegebene Rucksackkapazität $k \in \mathbb{N}$ aus n gegebenen Gegenständen mit jeweils Gewicht $w_i \in \mathbb{N}$ und Wert $c_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$, eine Teilmenge $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ so ausgesucht werden, dass der Wert $\sum_{i \in S} c_i$ möglichst groß ist, aber alle Gegenstände aus S noch in den Rucksack passen, $\sum_{i \in S} w_i \leq k$. Zeige: Mit einem Algorithmus für das Rucksackproblem lässt sich PARTITION leicht lösen.

5. Zeige: Für einen Graphen $G = (V, E)$ und eine Teilmenge $V' \subseteq V$ sind äquivalent:
   (i) V' ist eine Knotenüberdeckung (vertex cover) für G (d.h., $\{u, v\} \in E \Rightarrow u \in V'$ oder $v \in V'$).
   (ii) $V - V'$ ist eine unabhängige Menge in G.
   (iii) $V - V'$ induziert eine Clique (vollständiger Untergraph) im Komplementgraph $\overline{G}$.

   Folgere daraus, dass ein (bezüglich $|V|$ und $|E|$) polynomialer Algorithmus zur Bestimmung einer minimalen Knotenüberdeckung auch einen polynomialen Algorithmus zur Bestimmung einer größten Clique liefert und umgekehrt.