

Einführung in die Diskrete Mathematik Übung 9

1. **(3 Punkte)** Zeige: Sei E eine endliche Menge, und E_1, \dots, E_k seien nicht-leere Teilmengen von E mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^k E_i = E$. Seien b_1, \dots, b_k nicht-negative ganze Zahlen, dann ist $(E, \mathcal{F} = \{F \subseteq E : |F \cap E_i| \leq b_i, i = 1, \dots, k\})$ ein Matroid (genannt *Partitionsmatroid*). Insbesondere sind beide Matroide aus Übung 8.4 Partitionsmatroide.
2. **(5 Punkte)** Ein (gerichteter) Weg in einem Digraphen $D = (V, A)$ heißt hamiltonscher Weg, wenn er alle Knoten aus V besucht. Formuliere das Problem, in einem Digraphen $D = (V, A)$ einen hamiltonschen Weg zu finden, als die Suche nach einer unabhängigen Menge maximaler Kardinalität im Schnitt dreier Matroide.
3. **(5 Punkte)** Sei $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ eine Grundmenge und $A_i \in 2^T$, $i = 1, \dots, m$ (nicht notwendigerweise $A_i \neq A_j$). Falls für eine Unterfamilie $\mathcal{A}_I = \{A_i : i \in I\}$ mit $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ eine injektive Abbildung (Auswahlfunktion) $\varphi : I \rightarrow \{1, \dots, n\}$ mit $t_{\varphi(i)} \in A_i$ existiert, heißt $T_I = \{t_{\varphi(i)} : i \in I\}$ *Transversale* oder *System von verschiedenen Repräsentanten* der Unterfamilie \mathcal{A}_I . Zeige: $(T, \mathcal{F} = \{T_I : \exists I \subseteq \{1, \dots, m\} : T_I \text{ ist Transversale von } \mathcal{A}_I\})$ ist ein Matroid (das *Transversalmatroid*). Hinweis: Konstruiere einen bipartiten Graphen ($V = \mathcal{A}_{\{1, \dots, m\}} \cup T, E = \{\{A_i, t_j\} : t_j \in A_i\}$); Transversalen entsprechen Matchings; falls $X, Y \in \mathcal{F}$ mit $|X| < |Y|$, dann enthält die Vereinigung der entsprechenden Matchings einen alternierenden Weg, mit dem X vergrößert werden kann.
4. **(3 Punkte)** Auf m freie Stellen bewerben sich n Personen. Jede Person ist nur für eine Teilmenge der Stellen geeignet, hat aber einen stellenunabhängigen Wert für den Betrieb. Entwerfe einen Greedy-Algorithmus über einem Unabhängigkeitssystem für das Problem, eine Besetzung mit maximalem Wert zu finden. Welche Gütegarantie kann man erzielen?
5. **(4 Punkte)** Gib das System der Kreise und das System der Cokreise des folgenden Graphen an:

