

Einführung in die Diskrete Mathematik Übung 8

- (5 Punkte)** Eine *Färbung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : V \rightarrow C$ (Farbmenge), so dass $uv \in E$ impliziert $f(u) \neq f(v)$. Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist die kleinste Anzahl von Farben, die wir zur Färbung von G benötigen. Bestimme $\chi(K_n)$, $\chi(K_{m,n})$, $\chi(Q_n)$, $\chi(P_n)$ (Weg), $\chi(C_n)$ (Kreis).
- (4 Punkte)** Bestimme für folgende Liste der Kanten und Kantengewichte eines Graphen auf 14 Knoten einen minimalen aufspannenden Baum:
1 2 4. 2 3 5. 4 5 2. 6 7 2. 8 13 3. 10 11 5.
1 8 6. 2 14 3. 5 6 7. 6 13 6. 9 10 1. 10 12 3.
1 11 7. 3 4 1. 5 13 6. 7 8 6. 9 11 5. 11 12 6.
1 13 1. 3 14 1. 5 14 5. 7 9 3. 9 12 6. 13 14 2.
- (3 Punkte)** Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $w_e \in \mathbb{R}_+$ für $e \in E$. Ein *hamiltonscher* Kreis in G ist ein Kreis, der alle Knoten aus V überdeckt. Das *Rundreiseproblem* (Travelling Salesman Problem, TSP) besteht darin, einen hamiltonschen Kreis minimalen Gewichts zu bestimmen. Formuliere dieses Problem als ein Minimierungsproblem über einem Unabhängigkeitssystem.
- (4 Punkte)** Beweise:
 - Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $S \subseteq V$ eine unabhängige Menge in G , $k_s \in \mathbb{N}_0$ für $s \in S$. Es bezeichne $\delta_F(s) = \{e \in F : s \in e\}$. Dann ist $(E, \mathcal{F} = \{F \subseteq E : |\delta_F(s)| \leq k_s \forall s \in S\})$ ein Matroid.
 - Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, $S \subseteq V$, $k_s \in \mathbb{N}_0$ für $s \in S$. Es bezeichne $\delta_F^-(s) = \{a \in F : a = (u, s) \text{ für ein } u \in V\}$. Dann ist $(A, \mathcal{F} = \{F \subseteq A : |\delta_F^-(s)| \leq k_s \forall s \in S\})$ ein Matroid.
- (4 Punkte)** Beschreibe die Systeme der Kreise, Basen und das Unabhängigkeitssystem des Matrix-Matroids bezüglich der Spalten der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$