

## Einführung in die Diskrete Mathematik Übung 6

1. (**3 Punkte**) Zeige, dass in einem zusammenhängenden Graphen je zwei längste Wege immer einen gemeinsamen Knoten haben.
2. (**4 Punkte**) Sei  $G = (V, E)$  gegeben. Für  $V' \subseteq V$  bezeichne  $R(V')$  die Menge der Knoten in  $V \setminus V'$ , die mindestens einen Nachbarn aus  $V'$  haben. Beweise:

$$b(G) \geq \max_{1 \leq s \leq |V|} \min_{|V'|=s} |R(V')|$$

3. (**2 Punkte**) Zeige, dass eine Kante genau dann eine Brücke ist, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.  
(**1 Punkt**) Welche Graphen haben nur Brücken?  
(**2 Punkte**) Zeige ferner, dass  $G$  keine Brücke hat, falls alle Grade gerade sind.
4. Der vollständige bipartite Graph  $K_{1,n-1}$  heißt *Stern*. Beweise oder widerlege:
  - a) (**2 Punkte**) Falls ein Graph  $G$  Durchmesser 2 hat, dann enthält  $G$  einen aufspannenden Stern (enthält alle Knoten von  $G$ ).
  - b) (**1 Punkt**) Falls  $G$  einen aufspannenden Stern enthält, dann hat  $G$  Durchmesser 2.
5. (**5 Punkte**) Für einen Graphen  $G = (V, E)$  heißt  $\bar{G} = (V, \bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E)$  der Komplementgraph ( $uv \in E \Leftrightarrow uv \notin \bar{E}$ ). Sei  $G = (V, E)$  mit  $|V| = n$  ein  $k$ -regulärer Graph. Zeige, dass die Gesamtzahl der Dreiecke in  $G$  und  $\bar{G}$  genau  $\binom{n}{3} - \frac{n}{2}k(n-k-1)$  ist.