

Einführung in die Diskrete Mathematik Übung 6

1. (**3 Punkte**) Zeige, dass in einem zusammenhängenden Graphen je zwei längste Wege immer einen gemeinsamen Knoten haben.
2. (**4 Punkte**) Sei $G = (V, E)$ gegeben. Für $V' \subseteq V$ bezeichne $R(V')$ die Menge der Knoten in $V \setminus V'$, die mindestens einen Nachbarn aus V' haben. Beweise:

$$b(G) \geq \max_{1 \leq s \leq |V|} \min_{|V'|=s} |R(V')|$$

3. (**2 Punkte**) Zeige, dass eine Kante genau dann eine Brücke ist, wenn sie in keinem Kreis enthalten ist.
(**1 Punkt**) Welche Graphen haben nur Brücken?
(**2 Punkte**) Zeige ferner, dass G keine Brücke hat, falls alle Grade gerade sind.
4. Der vollständige bipartite Graph $K_{1,n-1}$ heißt *Stern*. Beweise oder widerlege:
 - a) (**2 Punkte**) Falls ein Graph G Durchmesser 2 hat, dann enthält G einen aufspannenden Stern (enthält alle Knoten von G).
 - b) (**1 Punkt**) Falls G einen aufspannenden Stern enthält, dann hat G Durchmesser 2.
5. (**5 Punkte**) Für einen Graphen $G = (V, E)$ heißt $\bar{G} = (V, \bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E)$ der Komplementgraph ($uv \in E \Leftrightarrow uv \notin \bar{E}$). Sei $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ ein k -regulärer Graph. Zeige, dass die Gesamtzahl der Dreiecke in G und \bar{G} genau $\binom{n}{3} - \frac{n}{2}k(n-k-1)$ ist.