Technische Universität Chemnitz
Dr. F. Göring

Chemnitz, 11. November 2004
fällig: 19. November 2004

Einführung in die Diskrete Mathematik
Übung 5

1. Beweise die folgenden Gleichungen:
   (a) **3 Punkte** $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$,
   (b) **2 Punkte** Falls $f(n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, dann $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$,
   (c) **2 Punkte** $O(f(n)) + O(g(n)) = O(|f(n)| + |g(n)|)$.

2. Sei $f(n) = n^2$ (n gerade) und $f(n) = 2n$ (n ungerade). Zeige, dass
   - **1 Punkt** $f(n) = O(n^2)$ gilt,
   - **1 Punkt** $f(n) = o(n^2)$ nicht gilt und
   - **1 Punkt** $n^2 = O(f(n))$ auch nicht gilt.

3. **3 Punkte** Sei $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \lg n$. Zeige (für geeignete Zweierpotenzen) $T(n) = O(\lg n \lg \lg n)$.

4. **2 Punkte** Angenommen, wir haben einen Algorithmus, der für eine Eingabe der Länge n, n Schritte aufweist, wobei der i-te Schritt i^2 Operationen benötigt. Zeige, dass die Laufzeit des Algorithmus $O(n^3)$ ist.

5. Die übliche Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen A und B erfordert $\Theta(n^3)$ Flops (Fließkommaoperationen '$*$' und '$+$'), insbesondere 8 Multiplikationen für $n = 2$. Die folgende Methode von Strassen benötigt nur 7 Multiplikationen.
   Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.
   - **2 Punkte** Zeige, dass die Elemente von AB eine Summe von Termen $\pm m_i$ ist, wobei $m_1 = (a+d)(\alpha+\delta)$, $m_2 = (c+d)\alpha$, $m_3 = a(\beta-\delta)$, $m_4 = d(\gamma-\alpha)$, $m_5 = (a+b)\delta$, $m_6 = (a-c)(\alpha+\beta)$, $m_7 = (b-d)(\gamma+\delta)$.
   - **1 Punkt** Wieviele Additionen/Subtraktionen benötigt die normale Berechnung, wieviele Strassens Methode?
   - **2 Punkte** Finde eine Methode, die $\Theta(n^{\log_2 7})$ Flops für das Produkt zweier $n \times n$-Matrizen benötigt.

   Hinweis: Viertele die Matrizen und verwende Rekursion mit $n = 2$ als Start.