Technische Universität Chemnitz
Dr. F. Göring

Chemnitz, 27. Oktober 2003
fällig: 3. November 2003

# Einführung in die Diskrete Mathematik
# Übung 3

1. Die Zufallszahl $X$ nehme nur die Werte 0 und 1 an. Zeige
$$VX = EX \cdot E(1 - X).$$

2. Die Felder eines $4 \times 7$ Schachbretts werden auf irgendeine Weise mit weiß und schwarz gefärbt. Zeige, dass es immer ein Rechteck gibt, dessen Ecken gleich gefärbt sind. Stimmt dies auch für ein $4 \times 6$ Schachbrett?

3. Beweise Markovs Ungleichung:
Sei $X$ eine Zufallsvariable, die nur Werte $\geq 0$ annimmt, dann gilt $p(X \geq \alpha) \leq \frac{EX}{\alpha}$ für $\alpha \geq 0$.

   Folgere daraus Tschebyscheffs Ungleichung:
$p(|X - EX| \geq \alpha) \leq \frac{VX}{\alpha^2}$ für eine Zufallsvariable $X$ und $\alpha \geq 0$.

4. Schätze mit Hilfe der vorigen Übung die Wahrscheinlichkeit ab, dass eine Permutation $k+1$ Fixpunkte hat (alle Permutationen gleichwahrscheinlich).

5. Zeige den Satz von Ramsey:
Es seien $k$, $l$ natürliche Zahlen $\geq 2$. Dann gibt es eine kleinste Zahl $R(k, l)$, genannt Ramsey Zahl, so dass Folgendes gilt:
Treffen einander $n \geq R(k, l)$ Personen, so gibt es immer $k$, die einander alle gegenseitig kennen, oder $l$, die einander paarweise nicht kennen.

   Hinweis: $R(k, 2) = k$, $R(2, l) = l$, für alle $k, l$. Zeige nun $R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$ und schließe den Satz mit Induktion.

   Folgere daraus $R(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.