Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktion, Differentialgleichungen, Eigenwertprobleme

Allgemeine Hinweise:

- *Bitte Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen!*
- *Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh.Str 39/712.*
- *Bei sämtlichen Aufgaben ist der Rechenweg anzudeuten.*

1. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen.
   a) $y' - \frac{y}{x} = \frac{x-1}{x}$
   b) $y' + 2y = 2\sin x$
   c) $y' + \frac{y}{x+1} = -x^2$

2. a) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 - y_3 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_3 \end{aligned}$$

   b) Wie lautet die spezielle Lösung (y_1, y_2, y_3) des obigen Gleichungssystems, wenn bekannt ist, dass $y_1(0) = 6$, $y_2(0) = 0$ und $y_3(0) = 0$ gilt?

3. Sind folgende Matrizen diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Matrix P an, für die $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist. Wie lautet diese Diagonalmatrix?

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   Hinweis: Bei Aufgabe b) kann es sinnvoll sein zur Bestimmung der Nullstellen des Minimalpolynoms kleine ganzzahlige Werte für x auszuprobieren.

4. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf stationäre Punkte, Extremwerte sowie Sattelpunkte.
   a) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$
   b) $f(u,v) = 2u(v-2) - 2v$
   c) $f(s,t) = s^3 + 8t^3 - 6st + 1$

5. Untersuchen Sie folgende symmetrische Matrizen auf ihre Definitheit.

   a) $A = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$