Aufgabenkomplex 2: Differentialrechnung

Allgemeine Hinweise:

- *Bitte Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen!*
- *Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh.Str 39/712.*
- *Bei sämtlichen Aufgaben ist der Rechenweg anzudeuten.*

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2^x - \frac{21}{5}x$.
   a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[0,5]$.
   b) Geben Sie die Newton-Iterationsformel an.
   c) Legen Sie sich mit Hilfe der Skizze geeignete Startwerte für die Newtoniteration fest und bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion auf diesem Intervall mit einer Genauigkeit von 2 Nachkommastellen.

2. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die jeweils angegebenen Grenzwerte
   a) $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ $\qquad \lim_{x\to 1} f(x)$
   b) $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x-2}$ $\qquad \lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$
   c) $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ $\qquad \lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$
   d) $f(x) = \frac{\tan x}{\tan 3x}$ $\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ $\qquad$ *Hinweis: Verwenden Sie* $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

3. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die ersten drei Terme ihrer Taylorentwicklung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
   a) $f(x) = e^{2x-x^2}$
   b) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$

4. Wir betrachten ein Fahrzeug, dass sich nach dem Gesetz $s(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$ bewegt. Dabei wird der Weg s in Kilometern, die Zeit t in Stunden gemessen.
   a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit.
   Hinweis: die Geschwindigkeit entspricht $s'(t)$ und die Beschleunigung $s''(t)$
   b) Berechnen Sie den Zahlenwert der Beschleunigung in $\mathrm{km/h^2}$sowie $\mathrm{m/s^2}$ bei $t = 1$.
   c) Wann ändert das Fahrzeug seine Beschleunigung?
   d) In welchem Zeitraum fährt das Fahrzeug rückwärts?
   e) Gibt es einen Zeitpunkt in dem das Fahrzeug wieder im Startpunkt ankommt?

5. a) Ermitteln Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ wenn $f(x) = x^2 - x + 3$ und $g(x) = 3^x + 4$ gilt.
   b) Zeigen Sie anhand von selbst gewählten Beispielen, dass $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ gilt.