Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Ableitung

Allgemeine Hinweise:

- *Bitte Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen!*
- *Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh.Str 39/712.*
- *Bei sämtlichen Aufgaben ist der Rechenweg anzudeuten.*
- *Sämtliche Lösungen sind ohne elektronische Hilfsmittel zu berechnen.*

1. Ermitteln Sie alle $x \in [0,\pi)$, welche die folgenden Gleichungen erfüllen:

   a) $4\sin^2(x) = 4\cos(x) + 1$

   b) $\sin(2x) = \cos(x)$

2. Handelt es sich bei den folgenden Zuordnungsvorschriften um Funktionen?

   a) $y = |x-3| + |1+x|$

   b) $y = \min(0, -x, x^2)$

   c) $y = \begin{cases} -x-1 & x \leq 0 \\ -x^2-1 & x \leq 0 \end{cases}$

   d) $y = \begin{cases} x^2+1 & x \leq 3 \\ -5x & x \geq 3 \end{cases}$

   Geben Sie für die Funktionen den zugehörigen Definitions- und Wertbereich an. Untersuchen Sie außerdem die Monotonieeigenschaften der Funktionen, indem Sie für jede Funktion größtmögliche Intervalle angeben auf denen die Funktion streng monoton steigt, streng monoton fällt bzw. konstant ist (falls solche Intervalle existieren). Sind die Funktionen eineindeutig? Geben Sie wenn möglich die Umkehrfunktion an.

3. Gegeben seien die Punkte $P_0(2,4)$, $P_1(4,6)$, $P_2(6,2)$ und $P_3(8,6)$.
   Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrange-Interpolation das Polynom, welches durch diese Punkte verläuft. Skizzieren Sie das Polynom.

4. Berechnen Sie jeweils die erste Ableitung folgender Funktionen:

   a) $f(x) = \cos(\ln(\sin(x)))$

   b) $f(x) = \frac{e^{(x^2)}}{\sin(cx-d)}$

   c) $f(x) = e^{\sin(x^2)}$

   d) $f(x) = \cos(x)\, e^{(a^x)}$

   e) $f(x) = 2\cos^2(x^2+4)$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit $x \in \mathbb{R}$:

   a) $\ln(x) + \ln(x+4) = \ln(2x+3)$

   b) $3\ln(x^2) + 7 = 13$

   c) $x\mathrm{e}^x - 3x = 0$

   d) $4^{2x+3} - 3^{3x+2} = 4^{2x+1} - 3^{3x+1}$

   Hinweis: Bei manchen Aufgaben ist es sinnvoll die Gleichungen zu logarithmieren.