

## Höhere Mathematik I.1

### Übung 7: Vektoren II, Skalarprodukt

- Wann heißt eine Menge Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ ?
  - Beschreiben Sie geometrisch, welche Mengen Unterräume des  $\mathbb{R}^3$  sind!
- Für welche Werte von  $c$  ist der Vektor  $\begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$  Linearkombination von  $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , für welche nicht?
    - In welchen Fällen handelt es sich bei den Mengen  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$  und  $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$  um Unterräume des  $\mathbb{R}^3$ ? Was stellen die Mengen geometrisch dar?
- Berechnen Sie die Längen der Vektoren  $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$  und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Notieren Sie für die drei Paare dieser Vektoren jeweils die Dreiecksungleichung! Welche geometrische Bedeutung hat diese?
- Gegeben seien die Vektoren  $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
  - Berechnen Sie die Längen der Vektoren und den von ihnen eingeschlossenen Winkel!
  - Zerlegen Sie den Vektor  $\vec{F}$  in seine Komponente in Richtung des Vektors  $\vec{s}$  und die dazu orthogonale Komponente!
  - Bestimmen Sie die Arbeit, die die Kraft  $\vec{F}$  längs des Weges  $\vec{s}$  leistet!
- Berechnen Sie  $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ , indem Sie tatsächlich nur ein einziges Skalarprodukt ausrechnen!
- Unter welchem Winkel sieht man die Strecke zwischen den Punkten  $(2, -3, 6)$  und  $(2, 4, 8)$  vom Punkt  $(0, 0, 7)$  aus?
  - Von welchen Punkten der  $z$ -Achse aus sieht man sie unter einem rechten Winkel?