

Höhere Mathematik I.1

Übung 7: Vektoren II, Skalarprodukt

1. a) Wann heißt eine Menge Unterraum des \mathbb{R}^n ?
b) Beschreiben Sie geometrisch, welche Mengen Unterräume des \mathbb{R}^3 sind!
2. a) Für welche Werte von c ist der Vektor $\begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Linearkombination von $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, für welche nicht?
b) In welchen Fällen handelt es sich bei den Mengen $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} c \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ um Unterräume des \mathbb{R}^3 ? Was stellen die Mengen geometrisch dar?
3. Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Notieren Sie für die drei Paare dieser Vektoren jeweils die Dreiecksungleichung! Welche geometrische Bedeutung hat diese?
4. Gegeben seien die Vektoren $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Berechnen Sie die Längen der Vektoren und den von ihnen eingeschlossenen Winkel!
 - b) Zerlegen Sie den Vektor \vec{F} in seine Komponente in Richtung des Vektors \vec{s} und die dazu orthogonale Komponente!
 - c) Bestimmen Sie die Arbeit, die die Kraft \vec{F} längs des Weges \vec{s} leistet!
5. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, indem Sie tatsächlich nur ein einziges Skalarprodukt ausrechnen!
6. a) Unter welchem Winkel sieht man die Strecke zwischen den Punkten $(2, -3, 6)$ und $(2, 4, 8)$ vom Punkt $(0, 0, 7)$ aus?
b) Von welchen Punkten der z -Achse aus sieht man sie unter einem rechten Winkel?