Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

18. November 2013

Höhere Mathematik I.1

Übung 6: Vektoren I

1. Die Komponenten x_i eines Vektors $\vec{x} = (x_i)_{i=1}^5$ seien Mengen von Waren i in entsprechenden Mengeneinheiten. Ein Lager habe zu Beginn einer Woche einen Warenbestand $\begin{pmatrix} 1000 \\ 700 \\ 8 \\ 50 \\ 235 \end{pmatrix}$, es erhalte in der Woche eine Lieferung von $\begin{pmatrix} 800 \\ 50 \\ 0 \\ 10 \\ 250 \end{pmatrix}$ und realisiere 5 Auslieferungen von je $\begin{pmatrix} 200 \\ 20 \\ 1 \\ 5 \\ 45 \end{pmatrix}$.
   Wie groß ist der Lagerbestand am Ende der Woche?

2. a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ Linearkombination, der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ hingegen keine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ ist.

   b) Bei einem Bäcker soll ein Kunde für 1 Brot und 12 Brötchen 5 €, ein zweiter Kunde für 2 Brote und 4 Brötchen 4 € und ein dritter Kunde für 1 Brot und 8 Brötchen ebenfalls 4 € bezahlen. Warum kann das nicht sein?

3. Handelt es sich bei folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^2$:
   $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x+3 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$?

4. a) Welches der Vektorsysteme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig, wann handelt es sich um eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   b) Geben Sie die Dimensionen der linearen Hüllen der beiden Vektorsysteme an!

   c) Stellen Sie, sofern das möglich ist, die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombinationen der Vektorsysteme aus a) sowie als Linearkombinationen der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ („kanonische Basis“) dar! Sind die Darstellungen eindeutig?